۶۷۹

مجموعه مقالات فارسی

پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران

تدوین و گردآوری:

زینب سعیدیان طرئی
(عضو هیات علمی دانشگاه کاشان)

مرجان حکیمی نژاد

سید علی رضا اشرفی
(عضو هیات علمی دانشگاه کاشان)

۲۷ بهمن تا ۲ اسفند ۱۳۹۹

ایران، دانشگاه کاشان



پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران



بسم اللّه الرحمن الرحيم

پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران

۲۷ بهمن تا ۲ اسفند ۱۳۹۹، دانشگاه کاشان

مجموعه مقالات فارسی پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران

آدرس دبیرخانه: کاشان، بلوار قطب راوندی، دانشگاه کاشان، دانشکده علوم ریاضی
تلفن: ۵۵۹۱۲۹۱۸ (۰۳۱)
دورنگار: ۵۵۹۱۲۳۳۲ (۰۳۱)
ایمیل: aimc51@kashanu.ac.ir
http://aimc51.kashanu.ac.ir

سازمان اسناد و کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

سرشناسه: کنفرانس ریاضی ایران (پنجاه و یکمین: ۱۳۹۹: کاشان)
Annual Iranian Mathematics Conference (51st: 2021: Kashan)
عنوان و نام پدیدآور: مجموعه مقالات فارسی پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران/ تدوین و گردآوری زینب سعیدیان طرئی، مرجان حکیمی‌نژاد، سید علی‌رضا اشرفی؛ [برای] دانشگاه کاشان، انجمن ریاضی ایران.
مشخصات نشر: کاشان: دانشگاه کاشان، کاشان: سوره تماشا، ۱۴۰۰
مشخصات ظاهری: ۴۵۳ ص. : جدول، نمودار.
فروست: دانشگاه کاشان، ۶۷۹.
شابک: ۱-۲۰-۶۵۴۶-۶۲۲-۹۷۸
وضعیت فهرست‌نویسی: فیپا
یادداشت: کتابنامه.
موضوع: ریاضیات – ایران – راهنمای آموزشی – کنگره‌ها
موضوع: ریاضیات – راهنمای آموزشی – کنگره‌ها
شناسه افزوده: سعیدیان طرئی، زینب، ۱۳۶۳-
شناسه افزوده: حکیمی‌نژاد، مرجان، ۱۳۶۴-
شناسه افزوده: اشرفی، سید علی‌رضا، ۱۳۴۳، گردآورنده
شناسه افزوده: دانشگاه کاشان
شناسه افزوده: انجمن ریاضی ایران
شناسه افزوده: دانشگاه کاشان. انتشارات
رده‌بندی کنگره: QA۱۴
رده‌بندی دیویی: ۵۱۰/۷۱۰۹۵۵
شماره کتابشناسی ملی: ۷۶۶۲۹۲۲
اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیپا



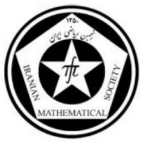
پنجاه ویکمین کنفرانس ریاضی ایران
۲۷ بهمن تا ۲ اسفند ۱۳۹۹، دانشگاه کاشان
مجموعه مقالات فارسی پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران

تدوین و گردآوری: زینب سعیدیان طرئی، مرجان حکیمی نژاد، سید علی‌رضا اشرفی
آماده‌سازی: دانشکده علوم ریاضی دانشگاه کاشان
ناشر: انتشارات دانشگاه کاشان، انتشارات سوره تماشا
طراح جلد: آرمینا زارع بر اساس طرحی از نازیلا جهانگیر و فتحعلی قشقائی‌فر
چاپ: باران
سال و نوبت چاپ: ۱۴۰۰- اول
شمارگان: ۲۰۰ نسخه
شابک: ۱-۲۰-۶۵۴۶-۶۲۲-۹۷۸
قیمت: ۱۰۰۰۰۰ تومان

انتشارات دانشگاه کاشان: کاشان، بلوار قطب راوندی، دانشگاه کاشان، صندوق پستی ۸۷۳۱۷۵۳۱۵۳
انتشارات سوره تماشا: کاشان، صندوق پستی ۱۷۸۸، همراه ۰۹۱۳۲۷۶۳۶۶۸

© حقوق چاپ و نشر محفوظ است.

سازمان‌دهندگان کنفرانس





حامیان مالی کنفرانس













پیام شهردار محترم شهر کاشان

باری دیگر ریاضیدانان برجسته جهان، اساتید، دانش پژوهان و دانشجویان ریاضی در یک کنفرانس علمی در شهر تاریخی کاشان گرد هم آمده‌اند. دانشکده ریاضیات دانشگاه کاشان مفتخر است که برگزار کننده پنجاه و یکمین کنفرانس سالانه ریاضی ایران است.

بی‌تردید، فلسفه علم بدون توجه به مصادیق عینی پدیده‌ها امری ناقص به نظر می‌آید و ریاضیات به عنوان علم پایه در درک حقایق هستی و مبنای نظم کائنات به شمار آمده و شناخت قواعد آن بزرگی و توانمندی خالق آن را یادآور می‌شود.

پوشیده نیست که دیار تمدن‌ساز کاشان از دیرباز، مهد بزرگ مردان و زنانی بوده که در عرصه‌های مختلف علمی و به ویژه در عرصه ریاضی دنیا به نام آورانی همچون غیاث الدین جمشید کاشانی مفتخر بوده و هنوز هم امتداد حضور این بزرگان پابرجاست و مایه مباهات است که در این کنفرانس شاهد حضور دکتر جواد مشرقی استاد و دانشمندی از فرزندان این سرزمین هستیم که در این شهر متولد شد و اکنون رئیس انجمن ریاضی کاناداست. اینجانب، به عنوان شهردار کاشان برخود لازم می‌دانم خوشامدگوی حضور تمام عالمان و عاشقان ریاضیات در این همایش بوده و از تمام سخنرانان کلیدی، سخنرانان مدعو و شرکت‌کنندگان صمیمانه تشکر کنم. از یزدان پاک سلامتی و توفیق روزافزون همه شرکت‌کنندگان را مسئلت نموده و جهانی عاری از هرگونه بیماری و تکرار کنفرانس‌های حضوری را آرزومندم.

با تشکر
شهردار کاشان
سعید ابریشمی‌راد

پیش‌گفتار

پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران در دانشگاه کاشان و با همکاری انجمن ریاضی ایران در روزهای ۲۷ بهمن الی ۲ اسفند ۱۳۹۹ در حال برگزاری است. مشتاق بودیم که در دانشگاه کاشان میزبان حضور جامعه بزرگ ریاضی کشور باشیم و با فراهم آوردن فضایی صمیمی و آکادمیک ضمن فراهم ساختن زمینه‌های تبادل نظر و مشارکت علمی برای همگان در زمینه‌های علوم ریاضی و کاربردهای آن، شما را با دانشگاه بزرگ کاشان بیشتر آشنا نماییم.

دانشگاه کاشان که در سال ۱۳۵۲ با نام مدرسه عالی علوم کاشان شروع به کار کرده است تنها دانشگاه جامع کشور است که در شهری قرار دارد که مرکز یک استان رسمی کشور نیست. قرارگرفتن در موقعیت جغرافی مناسب، فضای فرهنگی منطقه و سابقه دیرینه در علم و هنر بستر موفقیت‌های بزرگ را برای این دانشگاه فراهم آورده است و اکنون به‌عنوان مثال در ارزیابی‌ها توسط ISC به عنوان هفتمین دانشگاه جامع کشور معرفی شده است.

دانشکده علوم ریاضی دانشگاه کاشان با نزدیک به چهل عضو هیأت علمی تمام وقت در سه مقطع کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری فعال است و سهم بسزایی در پیشرفت و افتخار آفرینی دانشگاه کاشان داشته است. برگزاری کنفرانس‌های موفق، مسابقات دانشجویی انجمن ریاضی ایران و سمینارهای تخصصی متنوع از جمله فعالیت‌های این دانشکده بوده است. سردبیری «بولتن انجمن ریاضی» و «مجله فرهنگ و اندیشه ریاضی» توسط اعضای هیأت علمی این دانشکده در مقاطع مختلف از جمله همکاری‌های موثر با انجمن ریاضی ایران بوده و هست.

تقدیر چنین بود که به دلیل شیوع ویروس کرونا، پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران برای اولین بار در تاریخ برگزاری کنفرانس‌های ریاضی به‌صورت مجازی در شهر کاشان برگزار شود. درکنار محدودیت‌های ایجاد شده به‌دلیل برگزاری کنفرانس به‌صورت مجازی، فرصت‌های جدیدی نیز به‌دست آمده است. ما فرصت پیدا کردیم که با استفاده از امکانات فضای مجازی و با دعوت از اساتید برجسته ملی و بین‌المللی از ۲۲ کشور مختلف، بر غنای علمی کنفرانس بیفزاییم. همه دوستان استحضار دارند که به دلایل مختلف و مشکلات موجود در ابعاد آموزشی و اقتصادی و اجتماعی استقبال از رشته ریاضی از دبیرستان با کاهش محسوس در چند سال اخیر روبرو بوده است. به‌طوری‌که بزرگان کشور از جمله مقام معظم رهبری بر تقویت علوم پایه و به‌ویژه ریاضی تأکید نموده‌اند و آن‌ها را به عنوان گنجینه پشتوانه توسعه کشور معرفی نموده‌اند. بر جامعه ریاضی ایران است که از فرصت حمایت مسئولین استفاده نماید و برای ارتقا و گسترش ریاضی برنامه‌ریزی نماید. به‌عنوان گامی در جهت انجام مسئولیت در این موضوع، امسال بخش جدیدی به نام «ترویج و همگانی‌سازی ریاضی» در کنفرانس اضافه نمودیم. این ایده مورد استقبال مسئولین محترم انجمن ریاضی ایران نیز قرار گرفت و امید می‌رود به‌عنوان بخشی از کنفرانس در سال‌های آینده دنبال شود. برای امسال و با کمک مدیریت آموزش و پرورش منطقه فراخوانی داده شد و تاکنون بیش از ۴۰۰ اثر که بیشتر از دانش آموزان علاقمند در مقاطع مختلف دبستان و دبیرستان از سراسر کشور است به کنفرانس رسیده است. در نهایت مقرر شد اولین گردهمایی ترویج و همگانی‌سازی ریاضی به عنوان بخشی از کنفرانس ریاضی در آینده نزدیک برگزار گردد و آثار برگزیده ارائه شود. از کلیه شرکت کنندگان که با ارسال آثار ارزشمند و شرکت در کنفرانس بر غنای آن افزودند قدردانی می‌نمایم.

برگزاری کنفرانس بزرگی مانند کنفرانس ریاضی ایران به‌صورت مجازی تجربه‌ای جدید برای ما بود. امیدوارم توانسته باشیم این رویداد بزرگ را به‌خوبی و به نحو مطلوب و شایسته انجام داده باشیم و این تجربه اندوخته‌ای برای گسترش فعالیت‌های مجازی در آینده باشد. از همه کاستی‌ها و نواقص که عمدتاً به دلیل کمبود تجربه ما در برگزاری چنین کنفرانس‌ها و فعالیت‌های مجازی بوده است از شرکت‌کنندگان محترم پوزش می‌خواهم.

به امید دیدار شما در کنفرانس‌های بعدی
حسن دقیق
دبیر پنجاه و یکمین کنفرانس ریاضی ایران

قدردانی

ما در تدوین این گزارش از همان الگویی تبعیت کردیم که قبلاً در گزارش فارسی پنجاهمین کنفرانس ریاضی کشور در دانشگاه شیراز به‌کار رفته بود. این کار بدون کمک‌های ارزشمند آقای دکتر اشکان نیک‌سرشت عضو محترم هیئت علمی این دانشگاه امکان‌پذیر نبود. لذا صمیمانه‌ترین سپاس‌های خود را تقدیم ایشان می‌کنیم.

سازمان کنفرانس

دبیر کنفرانس: حسن دقیق

دبیر علمی کنفرانس: سید علی‌رضا اشرفی

دبیر اجرایی کنفرانس: مجتبی بهرامیان

اعضای کمیته علمی :

- سعید اعظم — دانشگاه اصفهان
- کیوان امینی — دانشگاه رازی
- حسین اشراقی — دانشگاه کاشان
- علی افتخاری — دانشگاه کاشان
- ترانه اقلیدس — دانشگاه صنعتی شریف
- فریبرز آذرپناه — دانشگاه شهید چمران
- علی ایرانمنش — دانشگاه تربیت مدرس
- سید مرتضی بابامیر — دانشگاه کاشان
- رجبعلی برزوئی — دانشگاه شهید بهشتی
- مجتبی بهرامیان — دانشگاه کاشان
- رضا جهانی نژاد — دانشگاه کاشان
- مسعود حجاریان — دانشگاه شهید بهشتی
- کینکار داس — دانشگاه سئول، کره جنوبی
- مصطفی داوطلب علیائی — دانشگاه کاشان
- مهدی دهقانی— دانشگاه کاشان
- بیژن دواز — دانشگاه یزد
- عبدالرحمن رازانی — دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)
- مارک راهب قمصری — دانشگاه لوما لیندا، آمریکا
- فرهاد رحمتی — دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- علی اصغر رضائی — دانشگاه کاشان
- عباس سالمی پاریزی — دانشگاه شهید باهنر کرمان
- عباس سعادتمندی — دانشگاه کاشان
- مهدی شمس — دانشگاه کاشان
- فرشید عبدالهی — دانشگاه شیراز
- سهراب عفتی — دانشگاه فردوسی مشهد
- سعید علیخانی — دانشگاه یزد
- غلامحسین فتح‌تبار — دانشگاه کاشان
- ویلموس کاتونا — دانشگاه سوپرون، مجارستان
- اشتفان کوهل — سنت اندروز، آلمان
- سید محمدباقر کاشانی — دانشگاه تربیت مدرس
- رسول کاظمی نجف‌آبادی — دانشگاه کاشان
- رضا کهکشانی — دانشگاه کاشان
- مجید گازر — دانشگاه صنعتی اصفهان
- فرانک گودرزی — دانشگاه کاشان

- زهرا گویا — دانشگاه شهید بهشتی
- اکبر محبی— دانشگاه کاشان
- علیرضا مدقالچی — دانشگاه خوارزمی
- علی معدنشکاف — دانشگاه سمنان
- فرشته ملک — دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
- مرتضی منیری — دانشگاه شهید بهشتی
- سید سیف‌الله موسی‌زاده موسوی — دانشگاه کاشان
- سید منصور واعظ پور — دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- مسعود هادیان — دانشگاه علم و صنعت
- ابراهیم هاشمی — دانشگاه صنعتی شاهرود

اعضای شورای سیاست گذاری

- سید علی‌رضا اشرفی
- علی افتخاری
- بهنام بازیگران
- مجتبی بهرامیان
- روح‌الله جهانی‌پور
- رضا جهانی‌نژاد
- حسن دقیق
- علی‌اصغر رضائی
- اکبر محبی
- امیرحسین نخودکار

اعضای کمیته اجرائی

- مهدی اسدی
- علی افتخاری
- محمد اقبالی
- سعید آسعیدی
- مرتضی بیشه‌نیاسر
- مرضیه پوربابایی
- فاطمه ذبیحی
- مرجان حکیمی‌نژاد
- ابوالفضل خدمتی
- الهه خلدی
- مهدی سبزواری
- زینب سعیدیان طرئی
- زینب سلطانی
- جلال عسکری فرسنگی
- سید علی محمدیه
- محمد حسن ملکیان

عوامل اجرائی

خانم‌ها نرگس برزگران، غزل توکلی، نازیلا جهانگیر، زینب جعفری طادی، الهام حاجی رضائی، مرضیه سادات حسینی، شیرین حیدری، مریم رضایی کاشی، مهسا رفیعی، آرمینا زارع، سمانه زارعیان، مینا شافوری، مریم طاهری‌سده، مریم عزیزی، لیلا گودرزی، فائزه محمدی، شیدا مداح، نسرین ملک محمدی فرادنبه، الهه مهابادیان، محدثه نصراصفهانی و مریم نصراصفهانی

آقایان محمد ایزدی، بردیا جهانگیری، علی‌رضا خلیلیان، سجاد راحتی، جلال عباسی، علی قلاوند، مصطفی کربلایی‌رضا، مهدی عابدی، کوروش مودت‌نژاد و محسن یعقوبی

سخنرانان کلیدی

ردیف	نام	نام خانوادگی	دانشگاه
۱	جواد	اسداللهی	دانشگاه اصفهان، جمهوری اسلامی ایران
۲	مسعود	اصغریان	دانشگاه مک‌گیل، کانادا
۳	پردارگ	استانیمیرووِیچ	دانشگاه نیس، صربستان
۴	محمد	باقری	سردبیر مجله تاریخ علم، جمهوری اسلامی ایران
۵	آلن	برتو	دانشگاه کائن، فرانسه
۶	مائوریزیو	برونتی	دانشگاه دی ناپولی فدریکو، ایتالیا
۷	خداخواست	بی باک	دانشگاه میامی، آمریکا
۸	کنستانتین	تسیناکیس	دانشگاه وندربیلت، آمریکا
۹	چانگ چانگ	چی	دانشگاه جامع مرکزی در پکن، چین
۱۰	هنری	دارمون	دانشگاه مک‌گیل، کانادا
۱۱	تومیسلاو	داسلیک	دانشگاه زاگرب، کرواسی
۱۲	لوکا	دفئو	دانشگاه سنت کوئنتین ورسای، فرانسه
۱۳	کیس	روس	دانشگاه صنعتی دلفت، هلند
۱۴	تکیسو	سرتلو	دانشگاه لیمپوپو، آفریقای جنوبی
۱۵	احمدرضا	سلطانی	دانشگاه کویت، کویت
۱۶	مجید	سلیمانی دامنه	دانشگاه تهران، جمهوری اسلامی ایران
۱۷	تراپونگ	سوکسومران	دانشگاه چیانگ مای، تایلند
۱۸	آندره	سولوتار	دانشگاه بوئنوس آیرس، آرژانتین
۱۹	خلیل	شفیعی هولیقی	دانشگاه کلرادو شمالی، آمریکا
۲۰	محمد	شهریاری	دانشگاه سلطان قابوس، عمان
۲۱	امیدعلی	شهنی کرم‌زاده	دانشگاه شهید چمران اهواز، جمهوری اسلامی ایران
۲۲	محمد	صال مصلحیان	دانشگاه فردوسی مشهد، جمهوری اسلامی ایران
۲۳	علی‌رضا	عبدالهی	دانشگاه شیراز، جمهوری اسلامی ایران
۲۴	بیژن	ظهوری زنگنه	دانشگاه صنعتی شریف، جمهوری اسلامی ایران
۲۵	روبرتو	گاراپا	دانشگاه باری، ایتالیا
۲۶	زهرا	گویا	دانشگاه شهید بهشتی، جمهوری اسلامی ایران
۲۷	موکات	مانی تریپاثی	دانشگاه هندو باناراس، هند
۲۸	جواد	مشرقی	دانشگاه لاوال، کانادا
۲۹	نظام الدین	مهدوی امیری	دانشگاه صنعتی شریف، جمهوری اسلامی ایران
۳۰	داوود	میرزایی	دانشگاه اصفهان، جمهوری اسلامی ایران
۳۱	آندری	یوو وسنین	آکادمی علوم روسیه، روسیه

سخنرانان مدعو

ردیف	نام	نام خانوادگی	دانشگاه
۱	ابراهیم	ریحانی	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی تهران، جمهوری اسلامی ایران
۲	علی	شکور	دانشگاه دولتی بلاروس، بلاروس و دانشگاه اسلامی نجف، عراق
۳	اکبر	علی	دانشگاه هایل، عربستان سعودی
۴	محسن	قاسمی	دانشگاه ارومیه، جمهوری اسلامی ایران
۵	گولیستان	کایاگوک	دانشگاه هاکاری، ترکیه
۶	محسن	کیان	دانشگاه بجنورد، جمهوری اسلامی ایران

شرکت‌کنندگان در کنفرانس

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۱	محمدعلی	احمدپور جاده کناری	دانشگاه گیلان
۲	کامبیز	احمدی	دانشگاه شهرکرد
۳	علیرضا	احمدی	دانشگاه یزد
۴	قاسم	احمدی	دانشگاه پیام نور
۵	جواد	اسداللهی	دانشگاه اصفهان
۶	محمدباقر	اسدی	دانشگاه تهران
۷	محمدعلی	اسدی	دانشگاه آزاد اسلامی
۸	مهدی	اسدی	دانشگاه کاشان
۹	میثم	اسدی‌پور	دانشگاه یاسوج
۱۰	راضیه	احمدیان	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
۱۱	نرگس	اخلاقی‌نیا	دانشگاه شهید بهشتی
۱۲	فهیمه	اخوان قصاب‌زاده	مجتمع آموزش عالی گناباد
۱۳	مرجان	ادیب	دانشگاه پیام نور
۱۴	علی‌رضا	اشرفی	دانشگاه کاشان
۱۵	مسعود	اصغریان	دانشگاه مک‌گیل، کانادا
۱۶	حامد	اصلانی	دانشگاه گیلان
۱۷	سعید	اعظم	دانشگاه اصفهان
۱۸	زهره	اکبری	دانشگاه مازندران
۱۹	نجمه	اکبری	دانشگاه صنعتی اصفهان
۲۰	باسم	العبد الحمید	دانشگاه کربلا، عراق
۲۱	احمد	العبیدی	دانشگاه کوفه، عراق
۲۲	محسن	العکاشی	دانشگاه کوفه، عراق
۲۳	حانیه	امجدیان	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۲۴	صادق	امیری	دانشگاه هوایی شهید ستاری
۲۵	لطافت	امیری	دانشگاه تربیت مدرس
۲۶	دیبا	امین شایان جهرمی	دانشگاه شیراز
۲۷	کیوان	امینی	دانشگاه رازی کرمانشاه
۲۸	مصطفی	امینی	دانشگاه پیام نور
۲۹	مهدی	انبارلویی	دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)
۳۰	هاجر	انصاری	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۳۱	آسیه	ابراهیم‌زاده	دانشگاه فرهنگیان
۳۲	ندا	ابراهیمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۳	علی	ابراهیمی جهان	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۳۴	پردارگ	استانیمیروویچ	دانشگاه نیس، صربستان
۳۵	مرتضی	اسمعیلی	دانشگاه خوارزمی
۳۶	حسین	اشراقی	دانشگاه کاشان
۳۷	محمدرضا	اصلاحچی	دانشگاه تربیت مدرس
۳۸	معصومه	اعتبار	دانشگاه شهید چمران اهواز
۳۹	علی	افتخاری	دانشگاه کاشان
۴۰	لیلا	افتخاری	دانشگاه تربیت مدرس
۴۱	محمد	اقبالی	دانشگاه کاشان
۴۲	ترانه	اقلیدس	دانشگاه صنعتی شریف
۴۳	فریبرز	آذرپناه	دانشگاه شهید چمران اهواز
۴۴	فاطمه السادات	آقائی میبدی	دانشگاه یزد

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۴۵	علی	انصاری اردلی	دانشگاه شهرکرد
۴۶	جعفر	اوج‌بگ	دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
۴۷	علی	ایرانمنش	دانشگاه تربیت مدرس
۴۸	علی	ایرانمنش	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۴۹	محمد علی	ایرانمنش	دانشگاه یزد
۵۰	محمد مهدی	ایزدخواه	دانشگاه صنعتی بیرجند
۵۱	مرضیه	ایزدی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۵۲	مهدی	ایزدی	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
۵۳	جواد	ایزدی	دانشگاه پیام نور
۵۴	کیانا	ایزدیار	دانشگاه شهید چمران اهواز
۵۵	محمد	ایلاتی	دانشگاه صنعتی سهند
۵۶	پروانه	آتش پیکر	دانشگاه بناب
۵۷	مهدیه	آذری	دانشگاه آزاد اسلامی
۵۸	فرشته	آراد	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۵۹	سعید	آسعیدی	دانشگاه کاشان
۶۰	فاطمه	آهنگری	دانشگاه الزهرا (س)
۶۱	مهرآسا	آیت‌اللهی	دانشگاه پیام نور
۶۲	سید مرتضی	بابامیر	دانشگاه کاشان
۶۳	علی	بارانی	دانشگاه لرستان
۶۴	فاطمه	بازی‌کار	دانشگاه گیلان
۶۵	بهنام	بازیگران	دانشگاه کاشان
۶۶	محمد	باقری	سردبیر مجله تاریخ علم
۶۷	ندا	باقری	دانشگاه مازندران
۶۸	علی	براتی	دانشگاه رازی کرمانشاه
۶۹	آلن	برتو	دانشگاه کائن، فرانسه
۷۰	علی	برزنونی	دانشگاه حکیم سبزواری
۷۱	رجبعلی	برزویی	دانشگاه شهید بهشتی
۷۲	حسن	برسم	دانشگاه جیرفت
۷۳	مائوریزیو	برونتی	دانشگاه دی ناپولی فدریکو، ایتالیا
۷۴	علی	بزرگمهر	دانشگاه علوم پزشکی ایران
۷۵	اسماعیل	بشکار	دانشگاه ولایت
۷۶	فریبا	بکرانی	دانشگاه شهید بهشتی
۷۷	نرجس سادات	بنی‌طبا	دانشگاه یزد
۷۸	سیده صدیقه	بنی‌هاشمی	دانشگاه مازندران
۷۹	شیما	بهارلوئی	دانشگاه صنعتی اصفهان
۸۰	کرم	بهاری	دانشگاه رازی
۸۱	فرشته	بهبودی	دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)
۸۲	مجتبی	بهرامیان	دانشگاه کاشان
۸۳	فائزه	بهمنی	دانشگاه کاشان
۸۴	عرفان	بهمنی	دانشگاه زنجان
۸۵	مصطفی	بیات	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۸۶	خداخواست	بی‌باک	دانشگاه میامی، آمریکا

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۸۷	رضا	بیرانوند	دانشگاه لرستان
۸۸	مرتضی	بیشه نیاسر	دانشگاه کاشان
۸۹	مهدی	پارسی	دانشگاه شهید چمران اهواز
۹۰	لیلا	پدرام	دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)
۹۱	روح‌الله	پروینیان‌زاده	دانشگاه یاسوج
۹۲	فاطمه	پریشانی	دانشگاه اصفهان
۹۳	مرضیه	پوربابایی	دانشگاه کاشان
۹۴	حسین	پوربشاش	دانشگاه گرمسار
۹۵	علیرضا	پورمسلمی	دانشگاه پیام نور
۹۶	مینا	پیرزاده	دانشگاه گیلان
۹۷	سجاد	پیرعدل	دانشگاه پیام نور
۹۸	شیما	پیرمحمدی	دانشگاه اصفهان
۹۹	وحید	پیرهادی	دانشگاه کاشان
۱۰۰	سمیه	تاری	دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
۱۰۱	حمیدرضا	تبریزی‌دوز	دانشگاه کاشان
۱۰۲	هاله	تجددی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۱۰۳	فرخنده	تخته	دانشگاه خلیج فارس
۱۰۴	فاطمه	ترابی	دانشگاه دامغان
۱۰۵	ولی	ترکاشوند	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۰۶	ثریا	ترکمن	دانشگاه یزد
۱۰۷	کنستانتین	تسیناکیس	دانشگاه وندربیلت، آمریکا
۱۰۸	مژگان	تقوی	دانشگاه شهید بهشتی
۱۰۹	ابراهیم	تمیمی	دانشگاه سمنان
۱۱۰	عبدالصالح	توغدری	دانشگاه یزد
۱۱۱	مصطفی	توکلی	دانشگاه فردوسی مشهد
۱۱۲	محمدرضا	توکلی مقدم	دانشگاه شهید بهشتی
۱۱۳	فائزه	تیبا	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۱۱۴	عطیه	تیمورزاده	دانشگاه مازندران
۱۱۵	محسین	جابل عطیا	دانشگاه مستنصریه، عراق
۱۱۶	محسن	جان‌نثاری لادانی	مرکز آموزش عالی شهرضا
۱۱۷	الهام	جاویدمنش	دانشگاه فردوسی مشهد
۱۱۸	نفیسه السادات	جعفرزاده	دانشگاه تربیت مدرس
۱۱۹	حسنا	جعفرمنش	دانشگاه حکیم سبزواری
۱۲۰	محمد	جعفری	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۲۱	نسرین	جعفری	دانشگاه یزد
۱۲۲	حبیب‌اله	جعفری	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۲۳	مرضیه	جمالی	دانشگاه کاشان
۱۲۴	صدیقه	جمشیدوند	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۱۲۵	مریم	جولائی	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۲۶	سعید	جوهری	دانشگاه اصفهان
۱۲۷	فرنگیس	جوهری	دانشگاه فدرال میناس گرایس، برزیل
۱۲۸	مهدی	جهانگیری	دانشگاه مراغه

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۱۲۹	روح‌الله	جهانی‌پور	دانشگاه کاشان
۱۳۰	رضا	جهانی‌نژاد	دانشگاه کاشان
۱۳۱	چانگ چانگ	چی	دانشگاه جامع مرکزی در پکن، چین
۱۳۲	عباس	چراغی چالشتری	دانشگاه اصفهان
۱۳۳	مهران	چه لابی	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۳۴	فاطمه	چوپانی	دانشگاه فردوسی مشهد
۱۳۵	مرضیه	حاتم خانی	دانشگاه اراک
۱۳۶	نرگس	حاج ابوطالبی	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۳۷	الهام	حاجی رضایی	دانشگاه کاشان
۱۳۸	سمیه	حاجی رضایی	دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان
۱۳۹	حمید رضا	حاجی شریفی	دانشگاه اصفهان- پردیس خوانسار
۱۴۰	اشرف	حاجی علو زرنق	دانشگاه کاشان
۱۴۱	آرمین	حاجیان	دانشگاه بجنورد
۱۴۲	مهناز	حبیبی	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۴۳	علی	حبیبی راد	دانشگاه صنعتی شیراز
۱۴۴	علی	حبیبی مؤخر	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
۱۴۵	مسعود	حجاریان	دانشگاه شهید بهشتی
۱۴۶	اعظم	حجازی نوقابی	دانشگاه فردوسی مشهد
۱۴۷	اسماعیل	حسام الدینی	دانشگاه صنعتی شیراز
۱۴۸	مصطفی	حسنلو	دانشگاه ارومیه
۱۴۹	مهدی	حسنی	دانشگاه زنجان
۱۵۰	حسن	حسین زاده	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۵۱	زهرا سادات	حسینی	دانشگاه بوعلی سینا
۱۵۲	سیده محیا	حسینی	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
۱۵۳	عبدالعزیز	حصاری	دانشگاه شهید چمران اهواز
۱۵۴	سعید	حق جو	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
۱۵۵	دنیا	حقیقی	دانشگاه بین‌الملل قزوین
۱۵۶	نوشین	حکمی‌پور	دانشگاه فنی و مهندسی بوئین زهرا
۱۵۷	مرجان	حکیمی‌نژاد	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
۱۵۸	داریوش	حیدری	مرکز آموزش عالی محلات
۱۵۹	ساغر	حیدری	دانشگاه شهید بهشتی
۱۶۰	سمیرا	حیدری	دانشگاه بین‌الملل قزوین
۱۶۱	محمد	حیدری	دانشگاه خوارزمی
۱۶۲	رسول	حیدری دستجردی	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
۱۶۳	سید محمد امین	خاتمی	دانشگاه صنعتی بیرجند
۱۶۴	محمود	خاکسارعشاق	موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب
۱۶۵	قادر	خالدی	مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تهران
۱۶۶	محسن	خالقی مقدم رستمکلایی	دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری
۱۶۷	داود	خجسته سالکویه	دانشگاه گیلان
۱۶۸	اختیار	خدادادی	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۶۹	حمید	خدائی	دانشگاه ملایر
۱۷۰	ابوالفضل	خدمتی	دانشگاه کاشان

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۱۷۱	حسن	خسروی	دانشگاه گنبد کاووس
۱۷۲	عیسی	خسروی دهدزی	دانشگاه خلیج فارس
۱۷۳	سمیه	خلاشی قزل احمد	دانشگاه آزاد اسلامی
۱۷۴	الهه	خلدی	دانشگاه کاشان
۱۷۵	یاسر	خلیلی	دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری
۱۷۶	علیرضا	خلیلی اسبویی	دانشگاه فرهنگیان
۱۷۷	امیر	خمسه	دانشگاه خوارزمی
۱۷۸	محمد احسان	دادکانی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۱۷۹	هنری	دارمون	دانشگاه مک گیل، کانادا
۱۸۰	کینکار	داس	دانشگاه سئول، کره جنوبی
۱۸۱	تومیسلاو	داسلیک	دانشگاه زاگرب، کرواسی
۱۸۲	زهرا	داوری شلمزاری	دانشگاه یزد
۱۸۳	مصطفی	داوطلب علیائی	دانشگاه کاشان
۱۸۴	محمد رضا	درفشه	دانشگاه تهران
۱۸۵	راضیه	دروازه‌بان زاده	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
۱۸۶	فاطمه	دری	دانشگاه فردوسی مشهد
۱۸۷	عاطفه	دریس	دانشگاه اراک
۱۸۸	مهشید	دشتی	دانشگاه ملایر
۱۸۹	لوکا	دفئو	دانشگاه سنت کوئنتین ورسای، فرانسه
۱۹۰	حسن	دقیق	دانشگاه کاشان
۱۹۱	زهرا	دنیاری	دانشگاه شهید چمران اهواز
۱۹۲	بیژن	دواز	دانشگاه یزد
۱۹۳	سکینه	دهقان	دانشگاه شهید بهشتی
۱۹۴	فاطمه	دهقانی	دانشگاه یزد
۱۹۵	محمدعلی	دهقان	دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
۱۹۶	مهدی	دهقانی	دانشگاه کاشان
۱۹۷	نجمه	دهقانی	دانشگاه خلیج فارس
۱۹۸	زهرا	دهواری	دانشگاه یزد
۱۹۹	سعید	دوست علی	دانشگاه کاشان
۲۰۰	رضا	دوستکی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۰۱	فاطمه	ذبیحی	دانشگاه کاشان
۲۰۲	فرزاد	رادمهر	دانشگاه علوم کاربردی نروژ غربی، نروژ
۲۰۳	عبدالرحمن	رازانی	دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)
۲۰۴	مرضیه	راعی	دانشگاه صنعتی مالک اشتر
۲۰۵	مارک	راهب قمصری	دانشگاه کالیفرنیا، آمریکا
۲۰۶	مریم	ربیعی فراهانی	دانشگاه فردوسی مشهد
۲۰۷	علی	رجایی	پژوهشگاه دانش های بنیادی-دانشگاه تربیت مدرس
۲۰۸	محمد حسین	رحمانی دوست	دانشگاه نیشابور
۲۰۹	هرمز	رحمتان	دانشگاه پیام نور
۲۱۰	فرهاد	رحمتی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۲۱۱	مرضیه	رحمتی	مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تهران
۲۱۲	پریسا	رحیم‌خانی	دانشگاه الزهرا (س)

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۲۱۳	غلامرضا	رحیم‌لو	دانشگاه فنی و حرفه‌ای
۲۱۴	سعید	رحیمی	دانشگاه خلیج فارس
۲۱۵	مرتضی	رحیمی خرزوقی	دانشگاه تهران
۲۱۶	اسماعیل	رستمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۱۷	سلیمه	رستمی	دانشگاه یزد
۲۱۸	مهدی	رستمی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۲۱۹	محسن	رستمیان دلاور	دانشگاه بجنورد
۲۲۰	جلیل	رشیدی‌نیا	دانشگاه علم و صنعت ایران
۲۲۱	رضا	رضاوند	دانشگاه تهران
۲۲۲	اکبر	رضایی	دانشگاه پیام نور
۲۲۳	مریم	رضایی کاشی	دانشگاه کاشان
۲۲۴	پریسا	رضائی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۲۲۵	علی‌اصغر	رضائی	دانشگاه کاشان
۲۲۶	پردیس	رمضانی	دانشگاه پیام نور
۲۲۷	سید مهراب	رمضانی	دانشگاه یاسوج
۲۲۸	آرتا	روحی	دانشگاه سمنان
۲۲۹	محمد صابر	روحی	دانشگاه شهید بهشتی
۲۳۰	کیس	روس	دانشگاه صنعتی دلفت، هلند
۲۳۱	نازنین	روشندل توانا	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۲۳۲	منیره	ریاحی	دانشگاه دامغان
۲۳۳	مهدی	ریاضی کرمانی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۳۴	ابراهیم	ریحانی	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
۲۳۵	ماجد	رئیسی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۲۳۶	احمدرضا	رئیسی دهکردی	دانشگاه اصفهان
۲۳۷	حسین	زارع	دانشگاه تربیت مدرس
۲۳۸	بهنام	زرباک	دانشگاه شاهد
۲۳۹	امیر حسام	زعیم	دانشگاه پیام نور
۲۴۰	الهام	زنگی آبادی	دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
۲۴۱	مسیب	زهره‌وند	دانشگاه ملایر
۲۴۲	علی	زیدی عبدیان	دانشگاه لرستان
۲۴۳	الهام	زینال	دانشگاه آزاد اسلامی یادگار امام خمینی (ره)
۲۴۴	مریم	زینالی	دانشگاه شهید چمران اهواز
۲۴۵	سامان	ساکی	دانشگاه علم و صنعت ایران
۲۴۶	عباس	سالمی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۲۴۷	کریم	سامعی	دانشگاه بوعلی سینا
۲۴۸	محمد اسماعیل	سامعی	دانشگاه بوعلی سینا
۲۴۹	بهناز	ساویزی	دانشگاه غیرانتفاعی رفاه
۲۵۰	امیرحسین	سبحانی	دانشگاه سمنان
۲۵۱	مهدی	سبزواری	دانشگاه کاشان
۲۵۲	زهرا	سجادنیا	دانشگاه شیراز
۲۵۳	تکیسو	سرتلو	دانشگاه لیمپوپو، آفریقای جنوبی
۲۵۴	عباس	سعادتمندی	دانشگاه کاشان

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۲۵۵	رضا	سعادتی	دانشگاه علم و صنعت ایران
۲۵۶	مریم	سعادتی	دانشگاه بین‌الملل قزوین
۲۵۷	حجت‌الله	سعیدی	دانشگاه شهرکرد
۲۵۸	جمشید	سعیدیان	دانشگاه خوارزمی
۲۵۹	زینب	سعیدیان طرئی	دانشگاه کاشان
۲۶۰	فرهاد	سعیدیون	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۲۶۱	مریم	سقالرزاده	دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول
۲۶۲	محمدعلی	سلحشور	دانشگاه کاشان
۲۶۳	احمدرضا	سلطانی	دانشگاه کویت، کویت
۲۶۴	زینب	سلطانی	دانشگاه کاشان
۲۶۵	سمیه	سلطانپور	دانشگاه صنعت نفت
۲۶۶	غلامرضا	سلطانی ابری	دانشگاه تهران
۲۶۷	سیما	سلطانی رنانی	دانشگاه صنعتی اصفهان
۲۶۸	مهدی	سلمان‌پور	دانشگاه کاشان
۲۶۹	رسول	سلیمانی	دانشگاه پیام نور
۲۷۰	فرناز	سلیمانی	دانشگاه ارومیه
۲۷۱	فضل‌الله	سلیمانی	دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
۲۷۲	مریم	سلیمانی	پژوهشگاه دانش های بنیادی
۲۷۳	مجید	سلیمانی دامنه	دانشگاه تهران
۲۷۴	حمید	سلیمی	دانشگاه تهران
۲۷۵	قیام	سودان	دانشگاه بوعلی سینای همدان
۲۷۶	تراپونگ	سوکسومران	دانشگاه چیانگ مای، تایلند
۲۷۷	آندره	سولوتار	دانشگاه بوئنوس آیرس، آرژانتین
۲۷۸	مهدی	سهرابی حقیقت	دانشگاه اراک
۲۷۹	مهسا	سهیل شمائی	دانشگاه کاشان
۲۸۰	خدیجه	سیاری	دانشگاه خوارزمی
۲۸۱	یامین	سیاری	دانشگاه صنعتی سیرجان
۲۸۲	زهرا	سیدی لاهرودی	دانشگاه تربیت مدرس
۲۸۳	سمیه	سیف‌اله زاده	دانشگاه تبریز
۲۸۴	مهرنوش	شادروان	دانشگاه شهید بهشتی
۲۸۵	مریم	شاه سیاه	دانشگاه اصفهان-پردیس خوانسار
۲۸۶	امین	شاه‌کرمی	دانشگاه لرستان
۲۸۷	فرزاد	شاویسی	دانشگاه رازی
۲۸۸	رضا	شرف دینی	دانشگاه خلیج فارس
۲۸۹	جواد	شرفی	دانشگاه کاشان
۲۹۰	سیده فاطمه	شریعتی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۲۹۱	کامران	شریفی	دانشگاه صنعتی شاهرود
۲۹۲	شیرین	شعاعی	دانشگاه شهید بهشتی
۲۹۳	زهرا	شعبانی سیاهکلده	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۲۹۴	سعید	شعبانیان	دانشگاه تربیت مدرس
۲۹۵	خلیل	شفیعی هولیقی	دانشگاه کلرادو شمالی، آمریکا
۲۹۶	راهله	شکرپور	دانشگاه تبریز

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۲۹۷	علی	شکور	دانشگاه دولتی بلاروس، بلاروس
۲۹۸	حیدر	شلاش	دانشگاه کوفه، عراق
۲۹۹	حسن محمد علی سعید	شلکا	دانشگاه کوفه، عراق
۳۰۰	مهدی	شمس	دانشگاه کاشان
۳۰۱	افسانه	شمسکی	دانشگاه دامغان
۳۰۲	علیرضا	شمسیان	دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
۳۰۳	مینا	شمگانی	دانشگاه کاشان
۳۰۴	محمد	شهریاری	دانشگاه سلطان قابوس، عمان
۳۰۵	حکیمه	شهریاری پور	دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و فناوری پیشرفته
۳۰۶	امیدعلی	شهنی کرم‌زاده	دانشگاه شهید چمران اهواز
۳۰۷	نگار	شهنی کرم‌زاده	دانشگاه شهید بهشتی
۳۰۸	مرجان	شیبانی عبد الیوسفی	دانشگاه سمنان
۳۰۹	عفت	شیخی	دانشگاه پیام نور
۳۱۰	فرخ	شیرژیان	دانشگاه تربیت مدرس
۳۱۱	مریم	شیرعلی	دانشگاه شهید چمران اهواز
۳۱۲	نسرین	شیرعلی	دانشگاه شهید چمران اهواز
۳۱۳	پریسا	شیری یایشهری	دانشگاه صنعتی سهند
۳۱۴	سمانه	صابرعلی	دانشگاه ارومیه
۳۱۵	صدیقه	صابرماهانی	دانشگاه الزهرا (س)
۳۱۶	بهروز	صادقی متنق	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
۳۱۷	علیرضا	صالحی	دانشگاه صنعت نفت
۳۱۸	سمانه	صانعی فر	دانشگاه یزد
۳۱۹	سلمه	صداقت کالمرزی	مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا
۳۲۰	نسرین	صدری	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی
۳۲۱	منیره	صدقی	دانشگاه تبریز
۳۲۲	مرضیه	صفاریان	دانشگاه کاشان
۳۲۳	مهدی	عابدی	دانشگاه شهید باهنر کرمان
۳۲۴	فخرالسادات	عابدیان	دانشگاه یزد
۳۲۵	آلما	عابدین زاده	دانشگاه تهران
۳۲۶	قدرت	عبادی	دانشگاه تبریز
۳۲۷	جواد	عبادپور گلنبر	دانشگاه پیام نور
۳۲۸	مصطفی	عباس زاده	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۳۲۹	ناصر	عباسی	دانشگاه لرستان
۳۳۰	محمد یحیی	عبد	دانشگاه کربلا، عراق
۳۳۱	علیرضا	عبدالهی	دانشگاه اصفهان
۳۳۲	فهیمه	عبداللهی	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۳۳۳	عاطفه	عبداله ابیانه	دانشگاه خوارزمی
۳۳۴	فرشید	عبدالهی	دانشگاه شیراز
۳۳۵	معراج	عبدی	مجتمع آموزش عالی بم
۳۳۶	نسیم	عبدی کورانی	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۳۳۷	محمدرضا	عبودی	دانشگاه شیراز
۳۳۸	رضا	عرفی	دانشگاه خوارزمی

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۳۳۹	جلال	عسکری فرسنگی	دانشگاه کاشان
۳۴۰	احمد رضا	عطاری پل سنگی	دانشگاه شیراز
۳۴۱	سهراب	عفتی	دانشگاه فردوسی مشهد
۳۴۲	اکبر	علی	دانشگاه هایل، عربستان سعودی
۳۴۳	غزاله	علی‌اصغری	دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی
۳۴۴	مهدی	علی‌اکبری	دانشگاه تربت حیدریه
۳۴۵	فاطمه	علیا	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۳۴۶	سعید	علیخانی	دانشگاه یزد
۳۴۷	مرتضی	علیشاهی	دانشگاه آزاد اسلامی
۳۴۸	هاجر	علیمراد	دانشگاه جهرم
۳۴۹	محمدرضا	علیمرادی	دانشگاه ملایر
۳۵۰	علی	غفارپناه	دانشگاه سلمان فارسی کازرون
۳۵۱	پیمان	غیاثوند	دانشگاه پیام نور
۳۵۲	غلامحسین	فتح‌تبار فیروزجایی	دانشگاه کاشان
۳۵۳	سبا	فتوحی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۳۵۴	فاطمه	فصیحی	دانشگاه بوعلی سینای همدان
۳۵۵	سمیه	صادقی	دانشگاه اصفهان
۳۵۶	محمد	صال مصلحیان	دانشگاه فردوسی مشهد
۳۵۷	راحله	صباغ	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۳۵۸	علی	صفایی	دانشگاه مراغه
۳۵۹	فرزانه	صفری	دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)
۳۶۰	اکرم	صفری هفشجانی	دانشگاه پیام نور
۳۶۱	نسرین	صمدیار	دانشگاه الزهرا (س)
۳۶۲	امیرحسین	صنعت‌پور	دانشگاه خوارزمی
۳۶۳	سید محمود	ضابط زاده	دانشگاه پیام نور استان اصفهان (مرکز وزوان)
۳۶۴	امید	ضابطی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۳۶۵	میثم	طاهری دهکردی	دانشگاه کاشان
۳۶۶	مریم	طاهری سده	دانشگاه کاشان
۳۶۷	مریم	طهماسبی	دانشگاه شهید بهشتی
۳۶۸	رضا	طیبی خرمی	دانشگاه آزاد اهواز
۳۶۹	حسن	ظاهری‌فر	دانشگاه یزد
۳۷۰	بیژن	ظهوری زنگنه	دانشگاه صنعتی شریف
۳۷۱	محمدجواد	فاضلی	دانشگاه بیرجند
۳۷۲	فرهاد	فخار ایزدی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۳۷۳	فرح‌ناز	فخرالدین آرانی	دانشگاه غیرانتفاعی-غیردولتی رفاه
۳۷۴	حمید	فرجی	دانشگاه آزاد اسلامی
۳۷۵	جواد	فرخی استاد	دانشگاه صنعتی بیرجند
۳۷۶	محمدرضا	فرمانی	دانشگاه خوارزمی
۳۷۷	فرزانه	فرهنگ بافتانی	دانشگاه آزاد اسلامی
۳۷۸	فرشته	فروزش	مجتمع آموزش عالی بم
۳۷۹	امین	فقیه	دانشگاه صنعتی سهند
۳۸۰	فریبا	فیاضی	دانشگاه قم
۳۸۱	رضا	فیاضی	دانشگاه فردوسی مشهد

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۳۸۲	محسن	قاسمی	دانشگاه ارومیه
۳۸۳	محمدحسام	قاسمی	دانشگاه شهید بهشتی
۳۸۴	هادی	قاسمی	دانشگاه حکیم سبزواری
۳۸۵	محمدرضا	قانعی	پردیس خوانسار دانشگاه اصفهان
۳۸۶	سمیه	قدمیاری	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۳۸۷	منصور	قدیری	دانشگاه یزد
۳۸۸	حمید	قربانی	دانشگاه کاشان
۳۸۹	علی	قلاوند	دانشگاه کاشان
۳۹۰	فاطمه	قنادیان	دانشگاه دامغان
۳۹۱	فاطمه	قندی	دانشگاه کاشان
۳۹۲	علیرضا	قورچی‌زاده	دانشگاه بیرجند
۳۹۳	ویلموس	کاتونا	دانشگاه سوپرون، مجارستان
۳۹۴	سید محمدباقر	کاشانی	دانشگاه تربیت مدرس
۳۹۵	رامین	کاظمی	دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)
۳۹۶	کیانوش	کاظمی	دانشگاه بیرجند
۳۹۷	محمدباقر	کاظمی	دانشگاه زنجان
۳۹۸	سید مهدی	کاظمی تربقان	دانشگاه بجنورد
۳۹۹	رسول	کاظمی نجف‌آبادی	دانشگاه کاشان
۴۰۰	اعظم	کاهنی	دانشگاه بیرجند
۴۰۱	گولیستان	کایاگوک	دانشگاه هاکاری، ترکیه
۴۰۲	علیرضا	کبگانی	دانشگاه صنعتی ارومیه
۴۰۳	اکرم	کبیری سامانی	دانشگاه پیام نور
۴۰۴	رقیه	کتانی	دانشگاه یاسوج
۴۰۵	غلامرضا	کرمعلی	دانشگاه علم و صنعت ایران
۴۰۶	الهه	کرمی	دانشگاه آزاد اسلامی
۴۰۷	محمدرضا	کریم‌زاده	دانشگاه مراغه
۴۰۸	الهام	کریمی	دانشگاه الزهرا (س)
۴۰۹	ساجد	کریمی	دانشگاه صنعتی شریف
۴۱۰	نیلوفر	کشاورز	دانشگاه خلیج فارس
۴۱۱	وحید	کشاورز	دانشگاه صنعتی شیراز
۴۱۲	زهرا	کشت‌کار	دانشگاه شهید چمران اهواز
۴۱۳	زهرا	کمالی	دانشگاه آزاد اسلامی
۴۱۴	زینب	کوثری	دانشگاه خوارزمی
۴۱۵	مجید	کوکبی	مجتمع آموزش عالی گناباد
۴۱۶	معصومه	کوهستانی	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۴۱۷	اشتفان	کوهل	دانشگاه سنت اندروز، اسکاتلند
۴۱۸	رضا	کهکشانی	دانشگاه کاشان
۴۱۹	محسن	کیان	دانشگاه بجنورد
۴۲۰	مریم	کیوانی مراغی	دانشگاه مراغه
۴۲۱	روبرتو	گاراپا	دانشگاه باری، ایتالیا
۴۲۲	مجید	گازر	دانشگاه صنعتی اصفهان

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۴۲۳	فرزانه	گرجی زاده آبده گاه	دانشگاه شهرکرد
۴۲۴	آذین	گلبهاران	دانشگاه خوارزمی
۴۲۵	بتول	گنجی صفار	دانشگاه الزهرا (س)
۴۲۶	پونم	گوپتا	دانشگاه دکتر هری سینگ گور، هند
۴۲۷	فرانک	گودرزی	دانشگاه کاشان
۴۲۸	لیلا	گودرزی	دانشگاه کاشان
۴۲۹	زهرا	گویا	دانشگاه شهید بهشتی
۴۳۰	ساناز	لامعی	دانشگاه گیلان
۴۳۱	بهناز	لجمیری	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۴۳۲	احسان	لطفعلی قصاب	دانشگاه شهید چمران اهواز
۴۳۳	مریم	لطفی‌پور	دانشگاه فسا
۴۳۴	سمیرا	لطیفی	دانشگاه محقق اردبیلی
۴۳۵	سید جلال	لنگری	دانشگاه فرهنگیان
۴۳۶	موکات	مانی تریپاثی	دانشگاه هندو باناراس، هند
۴۳۷	اکبر	محبی	دانشگاه کاشان
۴۳۸	زهرا	محتشم	دانشگاه شهید بهشتی
۴۳۹	زهرا	محمدزاده	دانشگاه بیرجند
۴۴۰	مهدی	محمدزاده کاریزکی	دانشگاه تربت حیدریه
۴۴۱	شهناز	محمدی	دانشگاه تبریز
۴۴۲	مریم	محمدی	دانشگاه صنعتی اصفهان
۴۴۳	هدا	محمدی	مرکز تحصیلات تکمیلی پیام نور تهران
۴۴۴	رضا	محمدی آرانی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۴۴۵	سیدعلی	محمدیه	دانشگاه کاشان
۴۴۶	زهرا	محمودی	دانشگاه آزاد اسلامی
۴۴۷	مژگان	محمودی	دانشگاه شهید بهشتی
۴۴۸	رضا	مختاری	دانشگاه صنعتی اصفهان
۴۴۹	علیرضا	مدقالچی	دانشگاه خوارزمی
۴۵۰	علی	مرادزاده دهکردی	مرکز آموزش عالی شهرضا
۴۵۱	رسول	مرادی	دانشگاه خلیج فارس
۴۵۲	سیروس	مرادی	دانشگاه لرستان
۴۵۳	صادق	مرآتی	دانشگاه شیراز
۴۵۴	سید عادل	مروجی	دانشگاه لاوال، کانادا
۴۵۵	مجید	مزروعی	دانشگاه کاشان
۴۵۶	زهره	مستقیم	دانشگاه علم و صنعت ایران
۴۵۷	مریم	مسعودی آرانی	دانشگاه فنی وحرفه‌ای
۴۵۸	علی	مس‌فروش	دانشگاه صنعتی شاهرود
۴۵۹	ولی سلطانی	مسیح	دانشگاه پیام نور
۴۶۰	حسین	مشایخی مزار	آموزش وپرورش
۴۶۱	جواد	مشرقی	دانشگاه لاوال، کانادا
۴۶۲	میثم	مصدق	دانشگاه آزاد اسلامی
۴۶۳	مرضیه	مطهری	دانشگاه تربیت مدرس
۴۶۴	عباس	معارف‌پرور	پژوهشگاه دانش‌های بنیادی

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۴۶۵	علی	معدنشکاف	دانشگاه سمنان
۴۶۶	ایمان	معصومی	دانشگاه تفرش
۴۶۷	مهدیه	معنوی	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۴۶۸	محمدمهدی	معیری	دانشگاه شهید بهشتی
۴۶۹	مینا	معینی	دانشگاه ملایر
۴۷۰	علیرضا	مفیدی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۴۷۱	امیرعباس	مفیدیان نائینی	دانشگاه صنعتی اصفهان
۴۷۲	رویا	مکرونی	دانشگاه سیستان و بلوچستان
۴۷۳	طاهره	ملائی	دانشگاه الزهرا (س)
۴۷۴	مهدیه	ملائی درختنجانی	دانشگاه بیرجند
۴۷۵	فرشته	ملک	دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
۴۷۶	مریم	ملک پور	دانشگاه الزهرا(س)
۴۷۷	نسرین	ملک محمدی فرادنبه	دانشگاه کاشان
۴۷۸	حسن	ملکی	دانشگاه ملایر
۴۷۹	محمدحسن	ملکیان	دانشگاه کاشان
۴۸۰	سپیده	ملکی رودپشتی	دانشگاه گیلان
۴۸۱	سمیه	ملکی‌نژاد	دانشگاه پیام نور
۴۸۲	احسان	ممتحن	دانشگاه یاسوج
۴۸۳	مرتضی	منیری	دانشگاه شهید بهشتی
۴۸۴	کورش	مودّت‌نژاد	دانشگاه کاشان
۴۸۵	نظام‌الدین	مهدوی امیری	دانشگاه صنعتی شریف
۴۸۶	سهیلا	مهدوی زفرقندی	دانشگاه کاشان
۴۸۷	علی	مهدی‌پور	دانشگاه کاشان
۴۸۸	سمیرا	مهرانگیز	دانشگاه شیراز
۴۸۹	حمید	مهراوران	دانشگاه آزاد اسلامی
۴۹۰	الهه	مهربان	دانشگاه گیلان
۴۹۱	احسان	موحدنیا	دانشگاه صنعتی خاتم الانبیا بهبهان
۴۹۲	حمید	موسوی	دانشگاه تبریز
۴۹۳	فاطمه سادات	موسوی نژاد	دانشگاه یزد
۴۹۴	منصوره	موسی‌پور	دانشگاه فرهنگیان
۴۹۵	کامران	موسی‌زاده	دانشگاه آزاد اسلامی
۴۹۶	سید سیف‌اله	موسی‌زاده موسوی	دانشگاه کاشان
۴۹۷	آذر	میرزایی	دانشگاه رازی کرمانشاه
۴۹۸	فاطمه	میرزائی	دانشگاه پیام نور
۴۹۹	داوود	میرزایی	دانشگاه اصفهان
۵۰۰	فاطمه	میرزائی گسکرئی	دانشگاه آزاد اسلامی
۵۰۱	مهسا	میرزرگر	مرکز آموزش عالی محلات
۵۰۲	سید مجتبی	ناصر شیخ الاسلامی	دانشگاه دولتی سمنان
۵۰۳	مهران	نامجو	دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان
۵۰۴	مریم	نجفوند دریکوندی	دانشگاه کاشان
۵۰۵	محمدجواد	نجفی آرانی	مرکز آموزش عالی محلات
۵۰۶	علیرضا	نجفی‌زاده	دانشگاه پیام نور

ردیف	نام	نام خانوادگی	موسسه / دانشگاه(فرستنده)
۵۰۷	امیرحسین	نخودکار	دانشگاه کاشان
۵۰۸	نسیم	نصرآبادی	دانشگاه بیرجند
۵۰۹	منیره	نصرتی	دانشگاه بناب
۵۱۰	زهره	نظری	دانشگاه ولیعصر (عج) رفسنجان
۵۱۱	طاهره	نظری	دانشگاه پیام نور
۵۱۲	علی‌محمد	نظری	دانشگاه اراک
۵۱۳	علی	نظیری کردکندی	دانشگاه پیام نور
۵۱۴	بهزاد	نعمتی‌سرای	دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان
۵۱۵	رضا	نقی‌پور	دانشگاه خوارزمی
۵۱۶	محمد علی	نقی‌پور	دانشگاه جهرم
۵۱۷	مهران	نقی زاده قمی	دانشگاه مازندران
۵۱۸	رضیه	نقیبی	دانشگاه یزد
۵۱۹	بهاره	نوری	دانشگاه خوارزمی
۵۲۰	محسن	نیازی	دانشگاه بیرجند
۵۲۱	سوگل	نیازیان	دانشگاه علوم پزشکی آزاد اسلامی تهران
۵۲۲	فاطمه	نیک‌زاد	دانشگاه پیام نور
۵۲۳	اشکان	نیک‌سرشت	دانشگاه شیراز
۵۲۴	زهره	نیکوروش	دانشگاه صنعتی بیرجند
۵۲۵	سید منصور	واعظ‌پور	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۵۲۶	فرزانه	وحدانی‌پور	دانشگاه محقق اردبیلی
۵۲۷	سریاس	وکیلی	دانشگاه تبریز
۵۲۸	امیر	ویسی	دانشگاه یاسوج
۵۲۹	مسعود	هادیان دهکردی	دانشگاه علم و صنعت ایران
۵۳۰	امیرحسین	هادیان رسنان	دانشگاه شهید بهشتی
۵۳۱	ابراهیم	هاشمی	دانشگاه صنعتی شاهرود
۵۳۲	فرزانه	هاشمی	دانشگاه کاشان
۵۳۳	سینا	هدایتیان	دانشگاه شهید چمران اهواز
۵۳۴	محمد	همامی	دانشگاه شهید بهشتی
۵۳۵	زهرا	یاراحمدی	دانشگاه آزاد اسلامی
۵۳۶	محمد	یاراحمدی	دانشگاه شهید چمران اهواز
۵۳۷	محمدرضا	یاسمیان	مرکز تحصیلات تکمیلی دانشگاه پیام نور تهران
۵۳۸	اعظم	یزدانی	دانشگاه صنعتی امیرکبیر (پلی تکنیک تهران)
۵۳۹	مرجان	یغمایی	دانشگاه خوارزمی
۵۴۰	محسن	یوسف نژاد	دانشگاه شیراز
۵۴۱	آندری	یوو وسنین	آکادمی علوم روسیه، روسیه

فهرست مقالات ارائه شده

بخش ۱. سخنران مدعو ۱

ا. ریحانی،
تحلیل کیفیت استدلال دانشجو معلمان دوره کارشناسی ریاضی در تعیین ارزش یک گزاره ریاضی ۳

بخش ۲. سخنرانی‌ها — آمار ۹

ف. آراد و ا. شیخی،
بهبود مدل‌های رگرسیونی با استفاده از توابع مفصل ۱۱

ز. سیدی لاهرودی و م. جعفری خالدی،
مدل‌های رگرسیونی مبتنی بر توزیع برن‌بام - سندرز ۱۶

بخش ۳. سخنرانی‌ها — آنالیز ۲۱

م. اسمعیلی و م. رستمی،
ارتباط شرط (W) برای جبرهای باناخ با گروه همانستگی مرتبه اول ۲۳

م. اسمعیلی و م. رستمی،
ویژگی موروثی مفهوم مرتبط با ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ ۲۷

بخش ۴. سخنرانی‌ها — آنالیز عددی ۳۳

ف. بهمنی و ع. افتخاری،
یک روش هم‌مکانی هیبریدی در حل معادلات همرفت-پخش زمان-کسری ۳۵

م. پوربابایی و ع. سعادتمندی،
حل معادله دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی با استفاده از ماتریس عملیاتی لژاندر ۴۰

ح. پوربشاش و م. خاکسار عشاق،
یک روش حجم محدود برای حل معادله پخش با مشتقات کسری ۴۵

ا. حجازی نوقابی و ع. سهیلی،
بررسی حل عددی مدل ریاضی رفتارهای بشری هنگام مواجهه با یک فاجعه به صورت یک مدل اپیدمی از نوع مشتقات معمولی و کسری ۵۱

م. ا. دادکانی، م. علیپور و س. صردی زید،
حل تقریبی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون ۵۶

ا. شاه‌کرمی و ب. غضنفری،
یک مدل کسری-تصادفی برای تشکیل مویرگ همراه با تجزیه و تحلیل روش تفاضلات متناهی به‌عنوان جواب عددی آن ۶۱

پ. شیری یایشهری و م. حاجی‌پور،
یک روش شبه‌طیفی کسری برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری ۶۷

س. م. ضابط زاده،
حل عددی مدل انتشار واکنشی مرتبه چهارم غیرخطی با مشتقات کسری زمانی با استفاده از روش بدون شبکه درونیابی نقطه‌ای شعاعی مبتنی بر فرم ضعیف ۷۲

م. ج. فاضلی و م. پناهی،
تحقق انتهای طیف‌ها به وسیله ماتریس‌های فلشی حقیقی متقارن ۷۸

ر. کتانی،
حل عددی معادله غیرخطی قرنیه ۸۲

ز. محمودی،
حل عددی مسئله براتو با استفاده از روش بی‌اسپلاین درجه پنجم ۸۷

ع. مهدی‌پور و ع. افتخاری،
یک روش سینک-نیشتروم در حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم-همرشتاین ۹۲

آ. میرزایی و م. کامرانی،
ارائه یک روش ضمنی جدید برای حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی و بررسی B-پایداری آن ۹۷

بخش ۵. سخنرانی‌ها — بهینه‌سازی ۱۰۳

ز. اکبری،
مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی با روش جستجوی خطی نایکنواخت تعمیم‌یافته ۱۰۵

م. ایزدی و م. ع. یعقوبی،
استفاده از روش برنامه‌ریزی تصادفی در مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری شامل پارامترهای بازه‌ای ۱۱۱

ع. عبداله ابیانه و م. ع. رعایت پناه،
طراحی قابل اطمینان از شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن با حداقل‌سازی انرژی مصرفی ۱۱۶

ج. عسکری و م. خلیلی،
یک مدل بهینه برای کنترل زمان-حافظه در شبکه‌های حسگر بی‌سیم ۱۲۱

ف. قندی و م. داوطلب علیائی،
ارزیابی کارایی متقاطع در زنجیره تامین به‌کمک نظریه بازی ۱۲۶

م. داوطلب علیائی و م. نجفوند دریکوندی،
ارزیابی کارایی متقاطع بی‌طرف در چارچوب تحلیل متامرزی ۱۳۱

بخش ۶. سخنرانی‌ها — تاریخ، آموزش و فلسفه ریاضی ۱۳۷

م. توکلی‌مقدم و ز. گویا،
اثر چرتکه‌های جدید بر یادگیری ریاضی: از رویا تا واقعیت ۱۳۹

ف. فخرالدین آرانی و ب. ساویزی،
فراتحلیلی بر تحقیقات انجام شده بر متون کتاب‌های درسی ریاضی ایران از سال ۸۷ تا ۹۸ ۱۴۳

م. ح. قاسمی و ز. گویا،
جایگاه مبهم برنامه و کتاب درسی ریاضی پایه نهم در پایان دوره عمومی ۱۴۸

ز. محتشم و ز. گویا،
«علوم–فناوری–مهندسی–ریاضی»: راهی برای مواجهه با بحران رشته ریاضیِ دانشگاهی در ایران ۱۵۲

بخش ۷. سخنرانی‌ها — جبر ۱۵۵

ر. بیرانوند و ا. فرضی صفرآبادی،
تعمیمی از گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز ۱۵۷

م. ع. سلحشور،
مطالبی درباره گراف جابجایی رده تزویج گروه‌های متناهی ۱۶۲

ف. شیرژیان و ع. ایرانمنش،
حدس هوپرت و تعمیم آن به گروه‌های تقریباً ساده ۱۶۷

م. صامت و ف. فروزش،
نتایجی از ۰–ایده‌ال‌های توسعه یافته در PMV–جبرها ۱۶۹

ف. فیاضی و ع. ر. اشرفی،
رده‌های هم‌ارزی کدهای بدون کاما ۱۷۴

ن. ملک محمدی،
گراف توان مبتنی بر یک زیرگروه نرمال از گروهی متناهی ۱۷۸

بخش ۸. سخنرانی‌ها — رمزنگاری ۱۸۳

س. جوهری،
تسهیم راز آستانه‌ای چند گروهی وابسته به هم با استفاده از قضیه باقیمانده چینی ۱۸۵

م. رضایی کاشی و م. بهرامیان،
انتقال بی‌اطلاع با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته خم‌های بیضوی ۱۹۱

ج. شرفی و ح. دقیق،
پروتکل تبادل کلید دیفی–هلمن در رمزنگاری مشبکه–مبنا ۱۹۶

بخش ۹. سخنرانی‌ها — ریاضیات بین رشته‌ای ۲۰۱

ص. رضائی آدریانی، ز. عیدی نژاد و ر. سعادتی،
پایداری معادله انتگرو–دیفرانسیل کسری ولترا با استفاده از عملگر $\Psi-$هادامارد ۲۰۳

م. مطهری و م. ر. اصلاحچی،
حل عددی سیستم PDE مرز آزاد، غیرخطی برگرفته از عود سرطان سینه با روش طیفی هم‌مکانی و تفاضلات محدود ۲۰۸

م. یوسف‌نژاد و س. ع. محمدی،
الگوی بهینه شیمی‌درمانی تومور مغزی با مدلی ریاضی ۲۱۴

بخش ۱۰. سخنرانی‌ها — ریاضیات فازی ۲۱۷

ر. حیدری دستجردی،
به‌کارگیری سیستم استنتاج فازی مبتنی بر وب برای ارزیابی خطر بیماری‌های قلبی عروقی ۲۱۹

ب. دارابی و م. ر. کریم‌زاده،
نامساوی دیاز-متکالف برای انتگرال‌های فازی ۲۲۴

بخش ۱۱. سخنرانی‌ها — نظریه گراف و ترکیبیات ۲۲۷

م. حکیمی‌نژاد و م. قربانی،
پیرامون طیف ماتریس سایدل گراف‌ها ۲۲۹

ا. خمسه و م. قاصدیان،
بازی‌هایی براساس برچسب‌گذاری گراف‌ها ۲۳۳

ع. قلاوند،
ضرائب چندجمله‌ای‌های لاپلاسی و جورسازی یک گراف ۲۳۸

بخش ۱۲. سخنرانی‌ها — معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی ۲۴۳

س. شعبانیان،
نگاهی به عمل برنولی ۲۴۵

ج. عبادپور گلنبر و ف. فرزانفر،
بررسی فردهلم بودن معادله بیضوی کوشی-ریمان شامل پارامتر در شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی ۲۵۰

ز. محمدزاده و ا. عازمی،
کاربردهای همزمان‌سازی شبکه عصبی بم در سیگنال‌های نوار قلب ۲۵۴

س. س. موسی‌زاده،
پایداری مسألهٔ نیم‌عکس دارای شرایط مرزی وابسته به پارامتر طیفی ۲۵۹

بخش ۱۳. سخنرانی — منطق و علوم کامپیوتر ۲۶۵

س. تاری،
خاصیت حذف سور در برخی نظریه‌های مرتبه اول ۲۶۷

بخش ۱۴. سخنرانی‌ها — هندسه و توپولوژی ۲۷۱

ع. معارف‌پرور و ع. رجایی،
گروه پولیا در توسیع‌های دووجهی از $\mathbb{Q}$ ۲۷۳

غ. سلطانی ابری،
روشی برای اثبات امکان ترسیم دقیق ۱۷ضلعی منتظم ۲۷۸

س. صابرعلی،
بررسی تبدیلات حافظ دایره ژئودزیکی در فضای فینسلری ۲۸۲

ع. معارف‌پرور و ج. شرفی،
وجود پایه‌ی صحیح از میدان‌های دومربعی روی زیرمیدان‌های مربعی ۲۸۷

بخش ۱۵. ارائه پوستری — احتمال و فرایندهای تصادفی ۲۹۱

م. سلمان‌پور،
روشی ساده برای بررسی استقلال متغیرهای تصادفی در فضای دو بعدی ۲۹۳

بخش ۱۶. ارائه‌های پوستری — آمار ۲۹۷

ر. روزگار و ع. توغدری،
مجموع وزنی متغیرهای تصادفی وابسته القا شده با توابع مفصل ۲۹۹

آ. روحی، ف. جهادی، م. روزبه و س. زالزاده،
مقایسه مدل‌بندی داده‌های بورس اوراق بهادار با استفاده از روش ماشین‌های بردار پشتیبان و رگرسیون نیمه پارامتری ۳۰۳

م. شمس،
یک شرط معادل برای اصل ارشمیدسی در نظریه مطلوبیت ۳۰۸

م. شمس،
کاربرد نظریه اطلاع و آمار بیز در موسیقی‌شناسی و تجزیه تحلیل ضرب آهنگ ۳۱۳

بخش ۱۷. ارائه‌های پوستری — آنالیز ۳۱۹

س. م. ا. خاتمی،
تعمیمی برای مفهوم متر ۳۲۱

ب. دارابی و م. ر. کریم‌زاده،
نامساوی دیاز–متکالف برای شبه‌انتگرال‌ها ۳۲۶

ن. اخلاقی و م. ر. یاسمیان،
معیاری برای منظم‌پذیری آرون–برنر نگاشت سه‌خطی کران‌دار ۳۲۹

بخش ۱۸. ارائه‌های پوستری — آنالیز عددی ۳۳۵

م. پوربابایی و ع. سعادتمندی،
حل معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی با استفاده از روش هم‌مکانی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر ۳۳۷

ا. حاجی‌علو و ف. ذبیحی،
روش هم‌مکانی مبتنی بر توابع چبیشف شیفت‌یافته و پایه شعاعی در تقریب یک معادله سهموی با شرط اولیه غیرمحلی ۳۴۲

م. رئیسی و م. عرب عامری،
روش عملیاتی موجک لژاندر برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی ۳۴۷

م. مهموم سالکویه و م. سبزواری،
حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم با به‌کارگیری موجک‌های لژاندر ۳۵۲

ز. محمودی،
حل عددی مسئله براتو با استفاده از روش انتگرال‌گیری گاوس–توران ۳۵۷

بخش ۱۹. ارائه پوستری — بهینه‌سازی ۳۶۳

ف. تیبا،
جواب بهینه تقریبی مسئله برنامه‌ریزی خطی اعداد فازی ۳۶۵

بخش ۲۰. ارائه‌های پوستری — تاریخ، آموزش و فلسفه ریاضی ۳۶۹

ع. ا. رضائی و م. فتوحی راغب،
خوارزمی؛ جبردانی که هندسه می‌دانست ۳۷۱

ه. وکیلی، ر. فیاضی و ا. فیاضی،
بررسی تأثیر متقابل فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی در تاریخ ریاضی ایران بعد از اسلام ۳۷۵

پ. امیری‌فرد و ع. نظری،
گودل و مسئله گزاره‌های زبانی در فضای مجازی ۳۸۰

بخش ۲۱. ارائه‌های پوستری — جبر ۳۸۷

م. بی باک و پ. رمضانی،
تشخیص‌پذیری گروه‌های ساده $O_8^-(5)$ و $O_8^-(8)$ توسط بزرگ‌ترین مرتبه عضوهایشان ۳۸۹

م. سقالرزاده و ا. عصاری،
مطالبی درباره گروه‌های تمام ۳۹۳

ی. سیاری و ا. محمدحسنی،
مهتری و ماتریس‌های خودمعکوس ۳۹۷

ف. دهقانی و م. قدیری،
به‌کارگیری نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار در تحلیل کلینیکوپاتولوژی ضایعات ستون مهره‌ای و استخراج قوانین تصمیم‌گیری ۴۰۱

س. مهدوی زفرقندی،
ساخت دسته‌های جدیدی از گروه‌های چرخشی ۴۰۶

بخش ۲۲. ارائه پوستری — رمزنگاری ۴۱۱

ا. حاجی‌رضائی و م. بهرامیان،
رمزنگاری شناسه کاربری با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته خم‌های بیضوی ۴۱۳

بخش ۲۳. ارائه پوستری — نظریه گراف و ترکیبیات ۴۱۷

ع. قلاوند و ع. ر. اشرفی،
اثبات دو حدس روی اندازه‌های بی‌نظمی در گراف‌ها ۴۱۹

بخش ۲۴. ارائه پوستری — معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی ۴۲۳

ز. داوری شلمزاری و م. ح. اکرمی ابرقویی،
بررسی دینامیک و انشعاب هاپف در یک مدل فیتزهاگ-ناگومو ۴۲۵

بخش ۲۵. ارائه‌های پوستری — منطق و علوم کامپیوتر ۴۲۹

س. آسعیدی و ع. محدث،
بازسازی پویای دیاگرام ورونوی با موانع متحرک در گرید ۴۳۱

س. م. ا. خاتمی،
ابرضرب ساختارها در منطق فازی مرتبه اول مبتنی بر نرم مثلثی پیوسته ۴۳۸

بخش ۲۶. ارائه پوستری — هندسه و توپولوژی ۴۴۷

ف. راعی و م. ب. کاظمی،
منیفلدهای پاراسایای آماری با التصاق نامتقارن متریک ۴۴۹

سخنران مدعو

تحلیل کیفیت استدلال دانشجو معلمان دوره کارشناسی ریاضی در تعیین ارزش یک گزاره ریاضی

ابراهیم ریحانی*
دانشکده علوم، گروه ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

چکیده. توانمندی معلمان ریاضی برای آموزش استدلال و اثبات به دانش آموزان، به‌طور طبیعی به دانش محتوایی و دانش پداگوژی محتوایی آنان وابسته است. شرط لازم برای مفید بودن دانش پداگوژی محتوا، تسلط بر دانش محتوایی ریاضی است. هدف پژوهش حاضر این است که با استفاده از یک نظریه آموزش ریاضی عملکرد دانشجو معلمان دوره کارشناسی ریاضی در بررسی درستی یک گزاره ریاضی مورد بررسی قرار دهد. روش پژوهش توصیفی از نوع پیمایشی است. در یک مطالعه موردی پاسخ‌های ۴۲ نفر از دانشجو معلمان ریاضی به یک تکلیف از گزاره‌ای ریاضی، با استفاده از نظریه سولو مورد بررسی قرار گرفت و کیفیت پاسخ‌ها به کمک نظریه در ۴ طبقه دسته بندی شد. یافته‌ها نشان داد که اکثر دانشجویان در سطح تک ساختاری سولو قرار دارند و قادر به برقراری ارتباط با مفاهیم و مباحث مختلف درگیر در حل تکلیف نیستند. شایع‌ترین مشکل دانشجویان ناتوانی در درک کامل گزاره ریاضی، یافتن نقیض گزاره، ارائه مثال نقض، عدم درک تاثیرجابجایی سورها و ناتوانی در ترتیب دادن یک اثبات ریاضی به روش برهان خلف است. همچنین یافته‌ها دلالت دارند که دانشجویان در نوشتن یک اثبات رسمی به رسا بودن و کامل بودن نوشته‌های خود توجه مناسبی ندارند.

واژه‌های کلیدی: استدلال و اثبات، دانشجو معلمان ریاضی، گزاره‌های منطقی، برهان خلف و نظریه سولو.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97E50.

۱. مقدمه

استدلال و اثبات از جمله فرآیندهای مهم ریاضی است که تقریبا در تمام برنامه‌های درسی ریاضی مدرسه‌ای حضور دارد. نقش معلمان ریاضی در کمک و هدایت دانش آموزان برای ارائه استدلال و اثبات در فرآیند حل مسئله مورد تأکید پژوهش‌های مختلف بوده است [۲]. درهمین راستا درک و فهم دانشجو معلمان ریاضی از فرآیند استدلال و اثبات و بررسی مشکلات احتمالی آنان، یک موضوع مهم پژوهشی می‌باشد. انتظار طبیعی و معقول از یک دانشجو معلم دوره کارشناسی ریاضی این است که توانایی درک گزاره‌های معمول ریاضی که در قالب نمادها و علائم و عبارت‌های ریاضی بیان می‌شوند را داشته باشد. درک جزیی و یا درک ناقص از این مباحث باعث می‌شود که دانشجو معلم در آینده به بسیاری از جنبه‌هایی که در آموزش استدلال به دانش آموزان موثر هستند توجه نکند. استدلال منطقی از اهمیت اجتماعی زیادی برخوردار است و همانطور که در چارچوب مهارت‌های قرن بیست و یکم تأکید شده است، یک جنبه کلیدی برای توسعه تفکر انتقادی در نظر گرفته شده است [۷]. از جمله روش‌های استدلال که دانشجویان در درک و به کارگیری آن با مشکل مواجه هستند، استدلال به شیوه برهان خلف است [۳، ۶]. ترتیب دادن یک اثبات منطقی مبتنی بر روش برهان خلف به‌طور کلی یک فعالیت شناختی دشوار برای دانشجویان است. به ویژه هنگامی که این اثبات بر محور یک گزاره –شامل سورها، نمادها و عبارات– ریاضی است، چالش‌های بسیاری آشکار خواهد شد. ممکن است فرد بفهمد که یک حکم صحیح و اثبات یک استدلال درست است، زیرا مراحل اثبات را درک می‌کند، ولی بدون این احساس که حکم و اثبات آشکار، واضح و لزوماً معتبر است. به‌ویژه، اثبات با برهان خلف، از ساختار منطقی پیچیده‌ای برخوردار است. از یک زنجیره استنتاجی تشکیل می‌شود که با نفی آن‌چه باید اثبات شود شروع می‌شود و با یک تناقض پایان می‌یابد [۳]. استفاده از چارچوب‌های نظری مناسب برای تشخیص و تبیین و تفکیک این مشکلات، به آموزش بهتر دانشجو معلمان و برطرف ساختن بدفهمی‌های آنان کمک شایانی خواهد کرد. هدف این پژوهش مطالعه عملکرد دانشجو معلمان

* سخنران

دوره کارشناسی ریاضی در تعیین ارزش یک گزاره ریاضی با استفاده از نظریه سولو است. نظریه سولو (ساختار نتایج یادگیری قابل مشاهده) یکی از نظریه‌های آموزش ریاضی است که کاربرد زیادی در شناخت ما از درک و فهم دانش‌آموزان / دانشجویان و یادگیری ریاضی دارد. این مدل از دو جنبه درک فراگیران از مفاهیم ریاضی را مورد بررسی قرار می‌دهد؛ یکی از طریق نوع تفکر آن‌ها (حسی–حرکتی، تصویری، عینی نمادین، صوری، فراصوری) و دیگری کیفیت پاسخ‌ها که به سطوح پیش ساختاری، تک ساختاری، چندساختاری، رابطه‌ای و انتزاع تعمیم یافته کدگذاری می‌شوند. بر خلاف روش سنتی که "چه مقدار" آموختن را مورد توجه قرار می‌دهد، این تجزیه و تحلیل بر این تمرکز دارد که مطالب "تا چه حد خوب" آموخته شده‌اند [۱]. دانشجو معلمان این تحقیق، دانشجویان سال دوم دوره کارشناسی بودند و با توجه به دروسی که گذرانده بودند، ظرفیت دست ورزی با نمادها و گزاره‌های ریاضی به شکل صوری و رسمی را دارا بودند.

۲. مبانی نظری

بررسی این پژوهش معطوف به کیفیت و سطوح پاسخ‌های دانشجو معلمان در تعیین درستی یک گزاره است که شامل وضعیت‌هایی متفاوت از ناتوانی در درک یک مفهوم تا ارائه یک پاسخ کامل مبتنی بر درک و مهارت عالی است. بیگز و کولیس [۴] در تبیین نظریه سولو، ساختار نتایج یادگیری قابل مشاهده را به‌صورت زیر تبیین کردند:

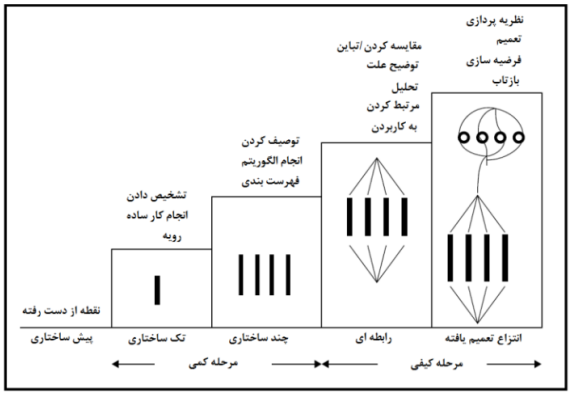
- **نتایج یادگیری:** اظهاراتی است که نشان می‌دهد در پایان دوره، دانش آموزان چه چیزی را خواهند دانست، مورد اهمیت قرار خواهند داد و قادر به انجام آن خواهند بود. این نتایج، هدف‌های قابل ارزیابی آموزش هستند، با تمرکز بر آن‌چه انتظار داریم که دانش آموزان در صورت یادگیری موفق، به آن برسند.
- **نتایج یادگیری قابل مشاهده:** پاسخ‌های است که فراگیران به سؤالات ارزیابی می‌دهند. به منظور ارزیابی، باید موارد قابل مشاهده کلی را مشخص کرد، نه فعالیت‌ها یا تشریح جزء به جزء آن‌چه در ذهن دانش آموزان درونی شده است.
- **ساختار نتایج یادگیری قابل مشاهده:** پاسخ‌های فراگیران را که به سؤالات ارزیابی داده‌اند از دو جنبه کدگذاری می‌کند. جنبه اول بر اساس نوع تفکر با استفاده از ۵ حالت رشد شناختی، توصیف می‌کند و جنبه دیگر، کیفیت پاسخ را درون یک حالت، با استفاده از ۵ سطح توصیف می‌کند. تکیه این پژوهش بر کیفیت پاسخ‌های ارائه شده توسط دانشجو معلمان است. طبقه‌بندی سولو بر اساس تجزیه و تحلیل دقیق پاسخ‌های دانش آموز/ دانشجو به سؤالات ارزیابی، بنا شده است. در سولو سطوح درک، مبتنی بر افزایش تعداد و پیچیدگی روابطی در نظر گرفته می‌شود که توسط دانش آموزان/ دانشجویان ارائه می‌شود.

در سطح پیش ساختاری، دانش آموزان/دانشجویان فاقد دانش ابتدایی مناسب برای درک موضوع هستند. به‌عنوان مثال، دانش آموز ممکن است در ارائه پاسخ مشارکت نکند یا ممکن است داده‌های کاملاً غیرمرتبط بدهد، که منجر به پاسخ نخواهد شد.

در سطح تک ساختاری دانش آموزان/دانشجویان ممکن است دانش محدودی در مورد موضوع داشته باشند یا فقط حقایق مجزایی را بدانند. به‌عنوان مثال، دانش آموز می‌تواند برای پاسخ دادن به یک تکلیف بخش‌هایی از اطلاعات را استفاده کند اما ارتباطی بین ایده‌ها نمی بیند. آن‌ها ممکن است ایده‌هایی حفظ شده را به شیوه رویه‌ای و از پیش تعیین شده مورد استفاده قرار دهند و حقایق یا مفاهیم را جداگانه و ایزوله ارائه کنند.

در سطح چند ساختاری دانش آموزان/دانشجویان ممکن است حقایقی را در مورد موضوعی بدانند اما هنوز قادر به اتصال آن‌ها به یکدیگر نیستند. به‌عنوان مثال، دانش آموز ممکن است از اطلاعات مختلفی استفاده کند اما ساختار و اهمیت ایده‌ها را درک نمی‌کند. پاسخ‌های دانشجو ممکن است چندین واقعیت مرتبط را ارائه دهد یا ویژگی‌های یک پدیده را به درستی شناسایی کند، اما این حقایق یکپارچه نیستند و یک کل واحد را ترسیم نمی‌کنند.

در سطح رابطه‌ای همزمان با حرکت به سمت سطح بالاتری از تفکر، دانش آموزان/دانشجویان می‌توانند اطلاعات را بهم مرتبط نمایند و چندین ایده مربوط به یک موضوع را توضیح دهند. به‌عنوان مثال، دانش آموز ممکن است اطلاعات مجزایی را برای ارائه یک راه حل مناسب برای یک تکلیف با یکدیگر ادغام کند. پاسخ‌های دانش آموز شواهدی را به‌دست می‌دهد که جزئیات مرتبط در فرآیند تلفیق را شرح می‌دهد. آن‌ها ممکن است پاسخ‌های خود را بر اساس ایده‌های انتزاعی با حقایق مشخص بیان کنند [۴]. با استفاده از سولو می‌توان نتایج یادگیری قصد شده‌ای را به کمک عبارات و افعال مناسب با هر سطح نظریه سولو طراحی کرد که در شکل ۱ نمونه‌ای از آن به تصویر کشیده شده است [۵].



شکل ۱. کلمات و افعال متناسب با هر سطح نظریه سولو.

سطح انتزاع تعمیم یافته مرحله آخر و پیچیده ترین مرحله است و دانشجویان در این سطح دارای تفکر انتزاعی هستند. آن‌ها می‌توانند از طریق بازتاب و ارزیابی، بسیاری از ایده‌ها را به هم پیوند دهند و آن‌ها را به مفاهیم عالی تر متصل کنند. به‌عنوان مثال، دانشجو می‌تواند یک اصل کلی را از داده‌های یکپارچه استخراج کند و آن را در موقعیت‌های جدید به کار برد. پاسخ‌های دانش آموز با به کارگیری استدلال، پیش بینی احتمالات، ایجاد ارتباطات چندگانه و ترکیب (یا ابداع) اصولی برای به کارگیری دانش در موقعیت‌های جدید یک قدم جلوتر می‌رود [۳]. پاسخ‌های انتزاعی تعمیم یافته از لحاظ ساختاری شبیه پاسخ‌های رابطه‌ای هستند، اما در این‌جا داده‌ها، مفاهیم و فرآیندها، خارج از دامنه دانش و تجربه‌ای که در سؤال مفروض است، ترسیم می‌شوند. به عبارت دیگر ماهیت پاسخ در سطح انتزاع تعمیم یافته، فراتر از سطح تجریدی است که در تکلیف گنجانده شده است، در حالی که پاسخ رابطه‌ای در سطح تکلیف داده شده می‌ماند [۵].

تکلیف ارائه شده به دانشجو معلمان مبتنی بر یک گزاره ریاضی بود که باید به کمک استدلال درستی یا نادرستی آن بررسی می‌شد.

- **تکلیف:** ارزش گزاره زیر را با ذکر دلیل تعیین کنید.

$$\nexists x, \forall y, \forall z : \ ۲x + y - ۳z < ۰. \tag{۱}$$

- **یافته‌ها:** انجام تکلیف فوق مستلزم درک کامل گزاره و مهارت کافی در ارائه استدلال به روش برهان خلف است. وجود بیش از یک سور و وجود نقیض در متن گزاره بر پیچیدگی آن می‌افزاید. پاسخ‌های ارائه شده توسط دانشجو معلمان بر مبنای نظریه سولو به ۴ گروه متفاوت تقسیم شدند. در پاسخ‌های گروه اول ارتباط درستی دیده نمی شود و به‌طور مثال یک فرآیند یا داده نادرست یا ایده‌ای نامربوط ارائه شده است. در جدول ۱ زیر نمونه‌ای از این پاسخ‌ها دیده می‌شود. لازم به ذکر است که عین پاسخ دانشجویان ارائه شده است. همان‌گونه که دیده می‌شود دانشجو مقادیر حقیقی را به جای گزاره‌هایی در

نظر گرفته است و برای آن‌ها جدول ارزش را ارائه کرده است. این پاسخ با سطح پیش ساختاری سولو متناظر است.

$$\nexists x, \forall y, \forall z : \ ۲x + y - ۳z < ۰. \tag{۲}$$

جدول ۱. نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح پیش ساختاری.

x	y	z	$۲x + y - ۳z < ۰$
د	د	ن	ن
د	ن	د	ن
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

پاسخ‌های گروه دوم با سطح تک ساختاری سولو متناظر است. در جدول ۲ نمونه‌ای از این پاسخ‌ها و تحلیل‌های ارائه شده برای انتخاب سطح تک ساختاری داده شده است. همان‌گونه که در بخش نظری تشریح شد، پاسخ‌ها نشان می‌دهند که دانشجو حقایق مجزایی را و آن هم بیشتر در قالب رویه‌ها و الگوریتم‌ها می‌داند و برای پاسخ قطعاتی از اطلاعاتی را که در دسترس داشته مورد استفاده قرار داده است.

جدول ۲. نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح تک ساختاری.

نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح تک ساختاری	تحلیل پاسخ
مثال نقض: $x = ۱, y = ۲, z = ۳ : ۲ + ۱ - ۶ < ۰$ حداقل یک x وجود دارد که در گزاره بالا صدق کند $-۳ < ۰$ پس گزاره $\nexists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$ غلط است.	دانشجو تشخیص داده است که باید نقیض گزاره داده شده را بررسی کند، اما نوع استدلال او نشان می‌دهد که در نوشتن نقیض گزاره اشتباه کرده است درستی گزاره زیر را نشان داده است: $\exists x, \exists y, \exists z : ۲x + y - ۳z < ۰$
غلط است. چون یک x وجود دارد که به ازای هر y و به ازای هر z برقرار است $۲x + y - ۳z < ۰$. مثال ۲ $x =$ یعنی $\exists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$	دانشجو نقیض گزاره را درست تشخیص داده است ولی دربررسی درستی یا نادرستی نقیض ناموفق بوده و دلیلی برای ادعای خود ارائه نکرده است.
وجود ندارد x ی که به ازای هر y و z عبارت $۲x + y - ۳z < ۰$ فرض کنیم $y = ۰, z = ۱$ کافی است به x مقدار ۱ را بدهیم آنگاه ناتساوی[نامساوی] برقرار می‌شود $۲x + y - ۳z < ۰$ $۲(۱) + ۰ - ۳ = -۱ < ۰$ پس عبارت غلط است.	به نظر می‌رسد که دانشجو گزاره اصلی را چنین گرفته است: $\forall y, \forall z, \nexists x : ۲x + y - ۳z < ۰$ و نشان داده است که نقیض آن یعنی گزاره زیر درست است: $\exists y, \exists z, \exists x : ۲x + y - ۳z < ۰$

پاسخ‌های گروه سوم با سطح چند ساختاری نظریه سولو متناظر است. در این گروه از پاسخ‌ها به بیش از یک جنبه درست و موثر در ارائه پاسخ توجه شده است ولی بین تمامی اجزای پاسخ ارتباط کامل برقرار نشده و به حل موفقیت آمیز تکلیف منجر نشده است. البته در مواردی هم ارتباط نادرست بین حقایق موجود برقرار و به نتیجه‌ای نادرست منجر شده است. در جدول ۳ نمونه‌ای از این پاسخ‌ها و تحلیل‌های ارائه شده برای انتخاب سطح چند ساختاری داده شده است.

پاسخ‌های گروه چهارم در سطح رابطه‌ای نظریه سولو قرار می‌گیرد. سطح رابطه‌ی بر تمام داده‌های در دسترس متمرکز است به‌گونه‌ای که هر داده، در موزائیک کلی روابط تنیده شده است تا به کل، ساختاری منسجم بدهد [۱]. در حل تکلیف داده شده این گروه از پاسخ‌ها یک حل کامل را در دسترس قرار می‌دهد. دانشجو معلم مفهوم گزاره ریاضی را به‌طور کامل درک کرده است و با برقراری ارتباط با مفاهیم و روش‌های مختلف درگیر در حل مسئله و استفاده مناسب از آن‌ها پاسخ صحیح را ارئه کرده است. نمونه‌ای از این پاسخ‌ها در جدول ۴ ارائه شده است. البته

جدول ۳. نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح چند ساختاری.

نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح چند ساختاری	تحلیل پاسخ
این گزاره صحیح است. زیرا اگر طبق برهان خلف فرض کنیم: $\exists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$ پس باید x را کوچکترین عدد صحیح منفی در نظر و می‌دانیم که هر عدد صحیح منفی مانند x که در نظر بگیریم $x - ۱$ عددی صحیح و کوچکتر از آن است و نمی‌توانیم کوچکترین عدد صحیح را به‌دست آوریم. پس هیچ xی وجود ندارد و گزاره صحیح است.	ایده برهان خلف به درستی تشخیص داده شده و نقیض حکم هم با نمادهای ریاضی درست بیان شده است. اما در ادامه دانشجو نتوانسته است مفهوم گزاره‌ای را که نوشته است درک کند.
گزاره $\nexists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$. را داریم و نقیض آن $\exists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$ می‌باشد. چون نقیض آن درست است پس خود آن غلط می‌باشد. نقیض آن درست است چون x را $۱ - \frac{۳z-y}{۲}$ بگیریم و $۰ > -۱$.	نقیض گزاره به درستی نوشته شده است، ولی در واقع دانشجو درستی گزاره $\exists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$ را بررسی نکرده است. دانشجو نشان داده است که گزاره زیر برقرار است: $\forall y, \forall z, \exists x : ۲x + y - ۳z < ۰$ او توجه نکرده است که تعویض سورهای غیر همنام در حالت کلی مجاز نیست. بسیاری از دانشجویان به اشتباه گزاره‌های زیر را هم ارز در نظر می‌گیرند: $\forall y, \exists x : x < y$ $\exists x, \forall y : x < y.$ در حالی‌که اولی گزاره‌ای درست و دومی گزاره‌ای نادرست است.
درست است. به برهان خلف فرض کنیم که $\exists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$ اما هیچ x ی نمی‌توان ارائه داد که به ازای هر y و z شرط $۰ > ۲x + y - ۳z$ برقرار باشد.	با آن‌که در نوشته‌های دانشجو هیچ مطلب نادرستی مشاهده نمی‌شود. با این حال ادعای خود را ثابت نکرده است و حل تکلیف ناقص به حساب می‌آید.
غلط است. زیرا اگر y و z را برابر x قرار دهیم آن‌گاه خواهیم داشت: $۲x + y - ۳z < ۰$ که غلط است. زیرا حاصل عبارت برابر صفر است و کوچکتر از صفر نیست.	کوتاهی در نگارش کامل و دقیق مراحل حل، موجب شده است که دانشجو گزاره اصلی را نادرست محسوب نماید، در حالی‌که ایده حل او درست است و اگر دنباله استنتاج‌ها و استدلال‌ها با جزئیات کامل و با یک شیوه علمی ارائه می‌شد به راحتی درستی گزاره اصلی نتیجه می‌شد.

جدول ۴. نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح رابطه‌ای.

نمونه پاسخ‌های دانشجو معلمان در سطح رابطه‌ای	تحلیل پاسخ
گزاره زیر درست است. $\nexists x, \forall y, \forall z : ۲x + y - ۳z < ۰$ برهان خلف: فرض کنیم x ی وجود داشته باشد که در گزاره بالا صدق کند. آن‌گاه به ازای هر y و z باید به جواب برسیم: $y = ۲x$ $z = \frac{۴}{۳}x$ تناقض $۰ < ۰ \longrightarrow ۲x + ۲x - ۳(\frac{۴}{۳})x < ۰$	دانشجو استدلال به روش برهان خلف را به‌طور مناسبی به کار برده است و با اطلاع کافی از مفهوم نقیض و نیز تسلط بر مفهوم سورها و استفاده از سورهای متفاوت و برقراری ارتباط بین بخش‌های مختلف به حل درست و کامل دست یافته است. با این حال توضیحات می‌توانست کامل تر و مناسب‌تر ارائه شود.

با توجه به این که ظرفیت پاسخ به تکلیف ارائه شده در سطح رابطه‌ای تعریف می‌شود، قابل انتظار بود که آخرین سطح از پاسخ‌های مشاهده شده محدود به همین سطح باشد.

۳. بحث

هدف این پژوهش بررسی توانایی استدلال دانشجو معلمان در حل یک تکلیف ریاضی بر اساس نظریه سولو بود. یافته‌ها نشان داد که بیشتر دانشجویان در سطح تک ساختاری یا چند ساختاری هستند. تعداد بسیار کمی از

پاسخ‌ها در سطح رابطه‌ای بود. این موضوع از آن جهت نگران کننده است که توانایی کار با گزاره‌های ریاضی، برای فهم قضیه‌ها و تعاریف ریاضی و کار با آن‌ها یک قابلیت زیر بنایی و پایه به حساب می‌آید. به کمک نظریه سولو برخی از مشکلات دانشجویان در ارائه یک استدلال رسمی مشخص شد. یکی از مشکلات اساسی دانشجویان در کار با گزاره‌های ریاضی درک کارکرد و معنی سورها است. کار با سور عمومی مشکلات خاص مربوط به خودش را داراست. به‌طور مثال در هنگام کار با مفهوم حد به دانشجویان آموزش داده می‌شود که در اثبات گزاره‌ای مانند $\lim_{x\to a} f(x) = ۱$ (با توجه به تعریف صوری مفهوم حد) باید ε عددی دلخواه در نظر گرفته شود و سپس δ مناسبی ارائه گردد. از طرف دیگر وقتی که فرض می‌شود $\lim_{x\to a} f(x) = ۱$ با توجه به تعریف می‌توانیم به ε عددهای معین (و مناسب منظورمان) را نسبت دهیم. برخی دانشجویان تفاوت این دو حالت را درک نمی‌کنند و با هر دو حالت یکسان رفتار می‌کنند. همچنین برای دانشجویان نوشتن نقیض یک گزاره مشتمل بر سورها، به ویژه هنگامی که سور صفر هم داشته باشیم، با بدفهمی‌هایی همراه است. علاوه براین، برخی دانشجویان در هنگام برخورد با سورهای متفاوت، برای ترتیب آن‌ها اهمیتی قائل نیستند و تصور می‌کنند هر ترتیبی از آن‌ها هم ارز هستند. مشکل دانشجویان یا دانش آموزان در درک تکالیفی که به کمک سورها بیان شده‌اند در پژوهش‌ها مورد تأکید قرار گرفته است [۷]. بحث‌های کلاسی و تجزیه و تحلیل پاسخ‌های دانشجویان -شبیه آن‌چه که در این پژوهش بیان شد- می‌تواند به رفع بدفهمی‌های دانشجویان کمک نماید. در این پژوهش به‌طور ضمنی ظرفیت یک مسئله خوب برای ارزیابی توانایی دانشجو معلمان در ارائه یک استدلال منطقی به تصویر کشیده شد.

مراجع

۱. س. حق جو، و ا. ریحانی، مطالعه عملکرد دانش آموزان دوره دوم متوسطه در حل یک تکلیف توانایی فضایی با استفاده از نظریه *SOLO*، فناوری آموزش، **۴** (۱۳۹۸) ۶۳۹ – ۶۵۳.

2. F. K. Lester and J. Cai, *Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research*, In: P. Felmer, E. Pehkonen, J. Kilpatrick (eds) Posing and Solving Mathematical Problems, Research in Mathematics Education, Springer, Cham, 2016.
3. S. Antonini, *Intuitive acceptance of proof by contradiction*, ZDM Mathematics Education **51** (2019) 793–806.
4. J. B. Biggs and K. F. Collis, *Evaluating the Quality of Learning*, The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome), Academic Press, New York, 1982.
5. J. Biggs and C. Tang, *Teaching For Quality Learning At University*, 4th ed., McGraw Hill Education & Open University Press, Maidenhead, 2011.
6. B. Stacy, *Difficult dialogs about degenerate cases: A proof script study,* J. Math. Behavior **52** (2018) 61–76.
7. H. Bronkhorst, G. Roorda, C. Suhre and M. Goedhart, *Logical Reasoning in Formal and Everyday Reasoning Tasks*, Int. J. of Sci. and Math. Educ. **18** (2020) 1673–1694.

پست الکترونیکی: e_reyhani@sru.ac.ir

سخنرانی‌ها

آمار

بهبود مدل‌های رگرسیونی با استفاده از توابع مفصل

فرشته آراد*
دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
و ایوب شیخی
دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. یکی از فرضیات مهم رگرسیون این است که متغیرهای پیش‌بینی کننده مدل، مستقل از هم باشند اما در بسیاری از مسائل کاربردی این فرض نقض می‌شود. چنین مدل‌هایی را باید با فرض وابستگی بین داده‌ها مورد مطالعه قرار داد. برای دستیابی به چنین هدفی مفاهیم وابستگی معرفی گردیده است که عمدتاً بر پایه توابع مفصل بیان می‌شود. در این پژوهش، رگرسیون این مدل‌ها را در دو حالت مورد بررسی قرار داده‌ایم. در حالت اول فرض بر آن داشتیم که علاوه بر ارتباط متغیر ملاک با متغیرهای پیش‌بین از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی، متغیرهای پیش‌بین نیز از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی با یکدیگر مرتبط باشند و حالت دوم را به‌این‌صورت در نظر گرفتیم که، متغیر ملاک با متغیرهای پیش‌بین از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی مرتبط است اما متغیرهای پیش‌بین، مستقل از یکدیگرند و روش محاسبه رگرسیون مفصل در این حالات ارائه شده است. همچنین نتایج شبیه‌سازی انجام شده نشان داد که در حالتی که متغیرهای پیش‌بین مرتبط باشند، مدل رگرسیون مفصل نسبت به مدل رگرسیون خطی بهتر عمل می‌نماید.

واژه‌های کلیدی: مفصل، مفصل گاوسی، رگرسیون خطی، رگرسیون مفصل.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62J05, 62H05.

۱. پیش‌گفتار

مطالعه مفصل‌ها و کاربرد آن‌ها در آمار یک پدیده نوین محسوب می‌شود حتی تا سال‌های اخیر جای دادن واژه مفصل در ادبیات آمار دشوار بود. واژه مفصل اولین بار توسط اسکلار (۱۹۵۹) [۴] برای توصیف توابعی استفاده شد که توابع توزیع تک بعدی آن‌ها را به هم متصل می‌کرد. بهترین معرفی برای تابع مفصل و خلاصه‌ای از ویژگی‌های این تابع‌ها را می‌توان در نلسن (۲۰۰۶) یافت [۳]. در سال ۲۰۰۸، کرین و هوک فرمول امید ریاضی شرطی ساده با استفاده از مفصل‌ها را به‌دست آوردند و آن را برای ترکیبی از داده‌های شبیه‌سازی و داده‌های واقعی به کار بردند [۲]. مزیت اصلی روش رگرسیون مفصل این است که هیچ محدودیتی در نوع توزیع متغیر وابسته وجود ندارد. از این رو در سال‌های اخیر برای تسهیل تحلیل رگرسیون از تابع مفصل که دارای ویژگی‌های بارزی است استفاده شده است. در ادامه با تکیه بر مفهوم تابع توزیع شرطی، به تعریف تابع رگرسیون مفصل می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. [۲]. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی G و F باشند و از طریق $C(u,v,\theta)$ با هم مرتبط باشند. در این‌صورت می‌توان با استفاده از قضیه اسکلار تابع توزیع شرطی را به‌صورت زیر محاسبه کرد

$$P(Y \leq y|X = x) = \frac{\partial C(u,v;\theta)}{\partial u},$$

بنابراین می‌توان امید ریاضی شرطی را به‌صورت زیر به‌دست آورد

$$r_{Y|X}(x) = E(Y|X = x) = \int y \frac{\partial}{\partial y} P(Y \leq y|X = x)dy = \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial C(u,v;\theta)}{\partial u} dy,$$

که در آن $v = F(y)$ و $u = G(x)$.

* سخنران

حال فرض کنید متغیرهای تصادفی Y و X_j، $j = ۱,\ldots,n$ دارای تابع توزیع شرطی $Pr(Y \leq y|X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$ باشند. در این‌صورت امید ریاضی شرطی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$r_{Y|X_۱,X_۲,\ldots,X_n}(y|x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = E(Y|X_۱, X_۲, \ldots, X_n) = \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{D_{۱۲۳}C(u_۱, u_۲, \ldots, u_n, v)}{D_{۱۲۳}C(u_۱, \ldots, u_n, ۱)}\, dy, \quad (۱)$$

که $v = F(y)$، $u_۱ = G_۱(x_۱)$، ...، $u_n = G_n(x_n)$ همچنین $F(y)$ تابع توزیع متغیر Y و $G_۱(x_۱)$، $G_۲(x_۲)$، ...، $G_n(x_n)$ به‌ترتیب تابع توزیع متغیرهای $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n می‌باشند.

۲. رگرسیون مفصل

ایده اصلی روش رگرسیون مفصل تشخیص رابطه بین چند متغیر است. در واقع رگرسیون مفصل به پیش‌بینی متغیر ملاک هنگامی که متغیر ملاک Y با چند متغیر پیش‌بین $X_۱, \ldots, X_n$ از طریق تابع مفصل مرتبط باشد و متغیرهای پیش‌بین $X_۱, \ldots, X_n$ نیز از طریق تابع مفصل مرتبط باشند، می‌پردازد. برخی از مولفین که در زمینه رگرسیون مفصل تحقیقاتی انجام دادند عبارتند از: چروبینی (۲۰۰۴)، مک نیل و همکاران (۲۰۰۵)، کولیف و همکاران (۲۰۰۸). در این بخش به محاسبه رگرسیون مفصل در دو حالت که در حالت اول فرض می‌کنیم متغیر ملاک با متغیرهای پیش‌بین از طریق مفصل بیضوی گاوسی مرتبط باشد و متغیرهای پیش‌بین از طریق مفصل بیضوی گاوسی مرتبط باشند و در حالت دوم فرض می‌کنیم متغیر ملاک با متغیرهای پیش‌بین از طریق مفصل بیضوی گاوسی مرتبط باشد و متغیرهای پیش‌بین از طریق مفصل استقلال مرتبط باشند (از هم مستقل باشند) می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید متغیرهای Y، $X_۱$، $X_۲$، ...، X_n دارای تابع توزیع $F(y)$ و $G_۱(x_۱)$، $G_۲(x_۲)$، ...، $G_n(x_n)$ باشند و متغیر Y با $\boldsymbol{X} = (X_۱, X_۲, \ldots, X_n)$ مرتبط به وسیله‌ی مفصل بیضوی گاوسی $C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n, v)$ باشد. همچنین X_jها $j = ۱,\ldots,n$ از طریق مفصل بیضوی گاوسی $C^{Ga}(u_۱, u_۲, \ldots, u_n)$ با یکدیگر مرتبط باشند. آن‌گاه

$$r_{Y|X_۱,\ldots,X_n}(y|x_۱, \ldots, x_n) = \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{D_{۱۲۳}C^{Ga}(u_۱, u_۲, \ldots, u_n, v)}{D_{۱۲۳}C^{Ga}(u_۱, u_۲, \ldots, u_n)}\, dy. \quad (۲)$$

در نقاطی که

$$D_{۱۲۳}C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n, v) = \frac{\partial}{\partial u_۱ \ldots \partial u_n} C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n, v),$$
$$D_{۱۲۳}C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_۱ \ldots \partial u_n} C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n),$$

وجود داشته باشند. در مابقی نقاط برابر صفرند. $v = F(y)$ و $u_۱ = G_۱(x_۱)$، ...، $u_n = G_n(x_n)$.

اثبات. با توجه به (۱) و ویژگی مفصل‌ها، $C(u_۱, \ldots, u_n, ۱) = C(u_۱, u_۲, .., u_n)$ داریم

$$\begin{aligned} E(Y|X_۱ = x_۱, \ldots, X_n = x_n) &= \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial}{\partial u_۱ \ldots \partial u_n} C(u_۱, \ldots, u_n, v)}{\frac{\partial}{\partial u_۱ \ldots \partial u_n} C(u_۱, \ldots, u_n, ۱)}\, dy \\ &= \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial}{\partial u_۱ \ldots \partial u_n} C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n, v)}{\frac{\partial}{\partial u_۱ \ldots \partial u_n} C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n)}\, dy \\ &= \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{D_{۱۲۳}C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n, v)}{D_{۱۲}C^{Ga}(u_۱, \ldots, u_n)}\, dy. \end{aligned}$$

که همان رابطه (۲) و بیان‌کننده رابطه رگرسیونی بین Y و X_jها است. □

قضیه ۲.۲. فرض کنید متغیرهای Y، X_1، X_2، ...، X_n دارای تابع توزیع $F(y)$ و $G_1(x_1)$، $G_2(x_2)$، ...، $G_n(x_n)$ باشند و متغیر Y با $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ مرتبط به وسیله مفصل بیضوی گاوسی $C^{Ga}(u_1, \ldots, u_n, v)$ باشد. چنان‌چه X_jها، $j = 1, \ldots, n$ مستقل از هم باشند، آن‌گاه

$$r_{Y|X_1,\ldots,X_n}(y|x_1, \ldots, x_n) = \int y \frac{\partial}{\partial y} D_{123} C^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)\, dy.$$

در نقاطی که $D_{123} C^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = \dfrac{\partial C^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n}$، وجود داشته باشد. همچنین $v = F(y)$ و $u_1 = G_1(x_1)$، ...، $u_n = G_n(x_n)$.

اثبات. چون X_jها، $j = 1, 2,$ از هم مستقلند، $C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \Pi_{j=1}^{j=n} u_j$ پس

$$D_{123} C(u_1, u_2, \ldots, u_n, 1) = D_{123} C(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n} \Pi_{j=1}^{j=n} u_j = 1,$$

بنابراین باتوجه به (۱) و ارتباط متغیر Y با $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ از طریق مفصل گاوسی داریم

$$\begin{aligned} r_{Y|X_1,\ldots,X_n}(y|x_1, \ldots, x_n) &= \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{D_{123} C(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)}{D_{123} C(u_1, u_2, \ldots, u_n, 1)}\, dy \\ &= \int y \frac{\partial}{\partial y} \frac{D_{123} C(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)}{D_{123} C(u_1, u_2, \ldots, u_n)}\, dy \\ &= \int y \frac{\partial}{\partial y} D_{123} C^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_n, v)\, dy. \end{aligned}$$

□

حالت خاصی که در نتیجه زیر ارائه شده است، هم ارز روش حداقل مربعات برای مدل رگرسیون خطی است.

نتیجه ۳.۲. اگر متغیرهای Yو X_1، X_2، ...، X_n دارای توزیع نرمال استاندارد باشند و متغیر Y با $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ به وسیله‌ی مفصل بیضوی گاوسی به‌صورت زیر مرتبط باشند [۱].

$$C^{Ga}(u_1, u_2, \ldots, u_n, v) = \Phi(\Phi^{-1}(G_1(x_1)), \Phi^{-1}(G_2(x_2)), \ldots, \Phi^{-1}(G_n(x_n)), \Phi^{-1}(F(y))),$$

که $F(y)$ تابع توزیع متغیر Y و $G_1(x_1)$، $G_2(x_2)$، ...، $G_n(x_n)$ به‌ترتیب تابع توزیع متغیرهای X_1، X_2، ...، X_n می‌باشند و $v = F(y)$، $u_1 = G_1(x_1)$، ...، $u_n = G_n(x_n)$ در نظر می‌گیریم. چنان‌چه X_jها، $j = 1, \ldots, n$ از هم مستقل باشند، آن‌گاه

$$r_{Y|X_1,\ldots,X_n}(y|x_1, \ldots, x_n) = \rho_{1y} x_1 + \rho_{2y} x_2 + \cdots + \rho_{ny} x_n,$$

که در آن ρ_{1y}، ρ_{2y}، ...، ρ_{ny} به‌ترتیب ضریب همبستگی متغیر Y با متغیر X_1، ضریب همبستگی متغیر Y با متغیر X_2، ...، ضریب همبستگی متغیر Y با X_n می‌باشند.

مثال ۴.۲. فرض کنید متغیرهای تصادفی X_1، X_2 و Y دارای توزیع نرمال استاندارد باشند. X_1 و X_2 مستقل، و Y با X_1 و X_2 مرتبط به وسیله‌ی مفصل بیضوی گاوسی به‌صورت زیر باشد

$$C^{Ga}(u_1, u_2, v) = \Phi(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(v))),$$

آن‌گاه رگرسیون به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$r_{Y|X_1,X_2}(y|x_1, x_2) = \rho_{1y} x_1 + \rho_{2y} x_2,$$

که در آن ρ_{1y}، ρ_{2y} به‌ترتیب ضریب همبستگی متغیر Y با X_1 و ضریب همبستگی متغیر Y با X_2 است.

مثال ۵.۲. فرض کنید متغیرهای Y، X_1، X_2 دارای توزیع نرمال استاندارد باشند، و متغیر Y با X_1، X_2 مرتبط از طریق مفصل بیضوی گاوسی به‌صورت زیر باشد

$$C^{Ga}(u_۱, u_۲, v) = \Phi(\Phi^{-۱}(G_۱(x_۱)), \Phi^{-۱}(G_۲(x_۲)), \Phi^{-۱}(F(y))),$$

و X_jها، $j = ۱, ۲$ مرتبط با مفصل بیضوی گاوسی به‌صورت زیر باشند

$$C^{Ga}(u_۱, u_۲) = \Phi(\Phi^{-۱}(G_۱(x_۱)), \Phi^{-۱}(G_۲(x_۲))),$$

و مدل رگرسیون خطی چندگانه را به‌صورت زیر داشته باشیم

$$Y = \alpha + \beta_۱ X_۱ + \beta_۲ X_۲ + \varepsilon,$$

آن‌گاه رگرسیون را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود

$$r_{Y|X_۱,X_۲}(y|x_۱, x_۲) = \frac{\rho_{۱y} - \rho_{۲y}\rho_{۱۲}}{۱ - \rho_{۱۲}^۲} x_۱ + \frac{\rho_{۲y} - \rho_{۱y}\rho_{۱۲}}{۱ - \rho_{۱۲}^۲} x_۲,$$

که $\rho_{۲y}$،$\rho_{۱y}$ و $\rho_{۱۲}$ به‌ترتیب ضریب همبستگی متغیر Y با $X_۱$، ضریب همبستگی متغیر Y با $X_۲$ و ضریب همبستگی متغیر $X_۱$ با $X_۲$ می‌باشند.

۳. شبیه‌سازی

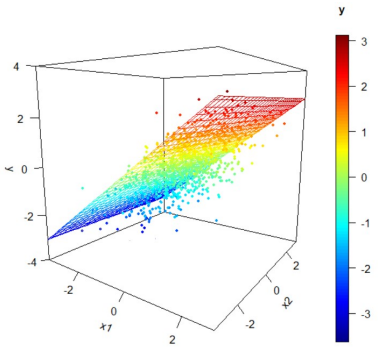
با استفاده از نرم افزار R داده‌ها را طبق فرضیات مثال ۵.۲ تولید کردیم به‌این‌صورت که متغیرهای Y، $X_۱$ و $X_۲$ دارای توزیع نرمال استاندارد باشند و متغیر Y با $X_۱$ و $X_۲$ از طریق مفصل بیضوی گاوسی با ماتریس همبستگی $\mathrm{R} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰.۵ & ۰.۶ \\ ۰.۵ & ۱ & ۰.۲ \\ ۰.۶ & ۰.۲ & ۱ \end{bmatrix}$، مرتبط باشند. همچنین $X_۱$ و $X_۲$ نیز از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی با ماتریس همبستگی

$$\mathbf{R_{XX}} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰.۲ \\ ۰.۲ & ۱ \end{bmatrix},$$

مرتبط هستند. همان‌طور که در جدول ۱ مشخص است مدل رگرسیون مفصل AIC و BIC کمتری نسبت به مدل رگرسیون خطی دارد. بنابراین با توجه مجموعه داده تولید شده بر طبق فرضیات مثال ۵.۲، مدل رگرسیون مفصل عملکرد بهتری نسبت به مدل رگرسیون خطی دارد.

جدول ۱. معیار AIC و BIC در مثال ۵.۲.

	AIC	BIC
رگرسیون خطی	۲۲۳۹.۳۷	۲۲۵۹.۰۰۱
رگرسیون مفصل	۲۱۵۰.۳۸	۲۱۷۰.۰۱۱



شکل ۱. شبیه‌سازی مثال ۵.۲.

۴. نتیجه گیری

همان‌طور که بیان شد در بسیاری از مدل‌های رگرسیونی متغیرها مستقل از هم نیستند، در این‌گونه مدل‌ها باید متغیرها را با فرض وابستگی بین آن‌ها مورد مطالعه قرار داد که وابستگی بین متغیرها بر پایه تابع مفصل بیان می‌شود. در این پژوهش، به محاسبه رگرسیون مفصل در دو حالت پرداخته شده است که در حالت اول علاوه بر ارتباط متغیر ملاک با متغیرهای پیش‌بین از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی، متغیرهای پیش‌بین نیز از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی با یکدیگر مرتبط در نظر گرفته شدند و در حالت دوم متغیر ملاک با متغیرهای پیش‌بین از طریق تابع مفصل بیضوی گاوسی مرتبط است اما متغیرهای پیش‌بین از هم مستقلند. در انتها با شبیه‌سازی انجام شده مثال ۵.۲ با استفاده از نرم افزار R و دو معیار AIC و BIC به مقایسه دو مدل رگرسیون خطی و رگرسیون مفصل پرداخته شده است و به این نتیجه دست یافته‌ایم که همان‌طور که در جدول ۱ مشخص است مدل رگرسیون مفصل دارای AIC و BIC کمتری نسبت به رگرسیون خطی است. بنابراین می‌توان گفت با توجه به مجموعه داده تولید شده بر طبق فرضیات مثال ۵.۲، مدل رگرسیون مفصل نسبت به رگرسیون خطی نتایج معتبر و دقیق‌تری را به ارمغان می‌آورد. همچنین شبیه‌سازی دیگری هم درصورتی که متغیرهای پیش‌بین مستقل باشند انجام شده است که با توجه به برابر بودن مقادیر AIC و BIC برای هر دو مدل رگرسیون مفصل و رگرسیون خطی می‌توان گفت مدل رگرسیون مفصل در این حالت همان مدل رگرسیون خطی است و برای پژوهش‌های آتی می‌توان حالت‌های دیگر را در نظر گرفت که متغیرهای مدل از طریق دیگر مفصل‌ها با یکدیگر مرتبط باشند و به محاسبه رگرسیون مفصل پرداخت و یا با استفاده از مجموعه داده‌های واقعی رگرسیون‌های مفصل محاسبه شده در این پژوهش را مورد آزمون قرار داد.

مراجع

1. U. Cherubini, E. Luciano and W. Vecchiato, *Copula Methods in Finance*, John Wiley and Sons, New York, 2004.
2. G. Crane and J. Hoak, *Conditional expectation formulae for copulas, Australian and New Zealand J. Stat.* **50** (1) (2008) 53–76.
3. R. B. Nelsen *An Introduction to Copulas, (Springer Series in Statistics)*, Springer-Verlag, New York, Inc., Seacaucus, NJ, 2006.
4. A. Sklar, *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l′Institut Statistique de l′Université de Paris, **8** (1959) 229–231.

پست الکترونیکی: fereshteh_arad@math.uk.ac.ir
پست الکترونیکی: sheikhy.a@uk.ac.ir

مدل‌های رگرسیونی مبتنی بر توزیع برن‌بام - سندرز

زهرا سیدی لاهرودی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
و مجید جعفری خالدی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. توزیع برن‌بام ـ سندرز یک توزیع چوله مثبت است که اغلب برای تجزیه و تحلیل داده‌های طول عمر استفاده می‌شود. امروزه توزیع برن‌بام ـ سندرز (BS) در زمینه‌های مختلف از جمله آلودگی هوا، تجارت، علوم زمین، صنعت و پزشکی به محبوبیت فزاینده‌ای دست یافته است. این مقاله سه مدل رگرسیون را بر اساس توزیع برن‌بام ـ سندرز بررسی می‌کند. اولین مدل مستقیماً از توزیع حاصل می‌شود، مدل دوم از طریق یک تبدیل لگاریتمی در متغیر پاسخ به‌دست می‌آید و مدل سوم از باز پارامتربندی میانگین این توزیع استفاده می‌کند. هدف اصلی این مقاله مقایسه عملکرد سه مدل رگرسیون برن‌بام ـ سندرز است. در نهایت مثالی از داده‌های واقعی برای مقایسه مدل‌های رگرسیون ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: توزیع‌های برن بام ـ سندرز، مدل رگرسیون، طول عمر.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62J05, 62E05, 62F10.

۱. پیش‌گفتار

رگرسیون خطی یکی از پرکاربردترین ابزارهای آماری است که بر مبنای روش کمترین توان دوم خطا آغاز شد. به‌دلیل ارتباطی که مدل رگرسیون خطی نرمال با زمینه‌های مختلف دانش دارد در طول سالیان طولانی وجود داشته است. اگرچه مدلی که توسط گاوس پیشنهاد شده است در تحقیقاتی که داده‌ها شواهدی از نرمال بودن ارائه نمی‌کنند کاربردی ندارد. با انگیزه حل این مشکل در [۵] کلاس گسترده‌ای از مدل‌ها را تعریف کردند که ساختار خطی دارند. این مدل‌ها این واقعیت را دربردارند که توزیع متغیر پاسخ به خانواده نمایی متعلق است که این امر ویژگی‌های مفیدی را به کلاس مدل‌ها می‌دهد. چنین مدلی به‌عنوان خطی تعمیم یافته (GLM) شناخته می‌شود. در میان GLMها اعضایی وجود دارند که برای مدل‌بندی داده‌هایی استفاده می‌شوند که دامنه مثبت دارند و چوله هستند مانند توزیع گاما یا گوسین معکوس. به‌طور کلی کار کردن با این توزیع‌ها کار آسانی نیست. توزیع دوپارامتری توزیعی است که از تبدیلی یکنوا روی توزیع نرمال استاندارد ایجاد شده است. برای تحلیل داده‌های چوله با دامنه مثبت معرفی شد. پارامترهای این توزیع مکان و مقیاس نام دارند [۲]. این توزیع نسبت به توزیع‌های شناخته شده انعطاف پذیری بیشتری برای تحلیل این نوع داده‌ها را دارد. از مثال‌هایی که توزیع برن‌بام ـ سندرز در آن کاربرد دارد می‌توان به عمر فرسودگی کوپن‌های آلومینیومی، تحلیل داده‌های بیمه، زمان فرسودگی بلبرینگ و داده‌های مربوط به مواد معدنی موجود در استخوان‌ها اشاره کرد. در این مطالعه به‌دنبال آن هستیم تا رگرسیون‌های مبتنی بر توزیع BS را مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم. در این خصوص می‌توان از سه رهیافت توزیع برن بام - سندرز که با توجه به [۳] ارائه شده است برای ساخت مدل‌های رگرسیونی منعطف استفاده نمود. اولین رویکرد مبتنی بر تحول لگاریتمی متغیر پاسخ است [۶]. رویکرد دوم مبتنی بر پارامتربندی توزیع BS است، که میانگین توزیع را به متغیرهای توضیحی پیوند می‌دهد [۴]. رویکرد سوم با توجه به [۱] مستقیماً پارامتر مقیاس توزیع BS را به متغیرهای توضیحی پیوند می‌دهد. باید توجه داشت که رویکرد اول و دوم معادل هستند، تفاوت اساساً در کاربرد تحول لگاریتمی برای متغیر پاسخ، نهفته است. برای مقایسه سه روش رگرسیون، مثالی با داده‌های فرسودگی مواد ارائه شده است. ادامه این مقاله به‌صورت زیر سامان‌دهی شده است. در بخش ۲ توزیع و همچنین مدل‌های رگرسیون مربوطه و به‌طور خاص، الگوریتمی که مراحل لازم برای اجرای محاسباتی را متراکم کند، ارائه شده است.

* سخنران

در بخش ۳ مثالی از داده‌های واقعی برای مقایسه سه رهیافت رگرسیون BS معرفی شده و سرانجام، برخی از نتیجه‌گیری‌ها در بخش ۴ بیان شده است.

۲. پیشینه توزیع‌های برن‌بام – سندرز

در این بخش توزیع‌های استاندارد، پارامتربندی شده روی میانگین و نوع لگاریتمی توزیع برن‌بام ـ سندرز معرفی شده و مدل‌های رگرسیون مربوطه ارائه شده است.

۱.۲. توزیع استاندارد برن‌بام ـ سندرز. توزیع BS پیوسته، تک مدی و دارای عدم تقارن به سمت راست است، خصوصیاتی که معمولاً در بیشتر توزیع‌های طول عمر وجود دارد. متغیر تصادفی T را که ازتوزیع BS پیروی می‌کند، می‌توان به‌صورت $BS(\alpha,\beta)$ نشان داد. α را پارامتر مقیاس و β را پارامتر مکان می‌نامند، با استفاده از تبدیل $Z = \frac{1}{\alpha}[(\frac{T}{\beta})^{1/2} - (\frac{\beta}{T})^{-1/2}]$ که Z از توزیع نرمال استاندارد پیروی می‌کند داریم

$$T = \frac{\beta}{4}[\alpha Z + \sqrt{(\alpha Z)^2 + 4}]^2, \qquad (1)$$

که $T \sim BS(\alpha,\beta)$ است. سپس تابع توزیع تجمعی برای متغیر تصادفی T که از توزیع دوپارامتری برن‌بام ـ سندرز پیروی می‌کند به‌صورت

$$F_T(t;\alpha,\beta) = \Phi[(\frac{1}{\alpha})\{(\frac{t}{\beta})^{1/2} - (\frac{\beta}{t})^{2/3}\}], \quad 0 < t < \infty, \quad \alpha,\beta > 0,$$

معرفی می‌شود و تابع چگالی این توزیع به‌شکل

$$f_T(t;\alpha,\beta) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\alpha\beta}[(\frac{\beta}{t})^{1/2} - (\frac{\beta}{t})^{2/3}]\exp[-\frac{1}{2\alpha^2}(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2)], \qquad t,\alpha,\beta > 0$$

بیان می‌شود. علاوه بر این، خصوصیاتی که در ادامه مطرح می‌شود نیز برقرار است: $E(T) = \frac{\beta}{2}(\alpha^2 + 2)$، $var(T) = \frac{\beta^2}{4}(5\alpha^4 + 4\alpha^2)$، $aT \sim BS(\alpha, a\beta)$ برای $a > 0$ و $T^{-1} \sim BS(\alpha,\beta^{-1})$.
این خصوصیات برای اهداف آماری متنوع مانند تولید اعداد تصادفی، برآورد پارامترها و مدل سازی بر اساس رگرسیون مفید هستند.

۲.۲. توزیع $log - BS$. متغیر تصادفی حقیق مقدار Y با تابع چگالی به‌شکل

$$f_Y(y;\alpha,\gamma,\sigma) = \frac{2}{\alpha\sigma\sqrt{2\pi}}\cosh\left(\frac{y-\gamma}{\sigma}\right)\exp[-\frac{2}{\alpha^2}\sinh^2\left(\frac{y-\gamma}{\sigma}\right)],$$

تعریف می‌شود که $\cosh(x)$ به‌شکل $\cosh(x) = (\exp^x + \exp^{-x})/2$ نمایش داده می‌شود. در این‌جا α پارامتر شکل، σ پارامتر مقیاس و γ پارامتر مکان است.
باید توجه داشت که اگر $T \sim BS(\alpha,\beta)$ در این‌صورت $\ln(T) \sim SN(\alpha, \ln(\beta), 2)$ است. یعنی توزیع $log - BS$ مورد خاصی از توزیع سینوس هذلولی نرمال است.

۳.۲. توزیع BS باز پارامتربندی شده روی میانگین. توزیع BSای که بازپارامتربندی شده است در [۷] پیشنهاد شده است و از این پس به این توزیع RBS گفته می‌شود. توزیع RBS با پارامترهای η و σ مشخص می‌شود، که η پارامتر میانگین و مقیاس است در حالی‌که σ یک پارامتر شکل و دقت است. این توزیع به‌شکل $T \sim RBS(\eta,\sigma)$ نشان داده می‌شود. براساس این پارامتربندی تابع چگالی احتمال T به‌شکل

$$f_T(t,\eta,\sigma) = \frac{\exp(\sigma/2)\sqrt{\sigma t}}{4t^{3/2}\sqrt{\pi\eta}}(t + (\sigma\eta)/(\sigma+1))\exp\left(-\sigma/4\left(\frac{t(\sigma+1)}{\sigma\eta}\right) + \frac{\eta\sigma}{t(\sigma+1)}\right), \quad t > 0, \qquad (2)$$

است. تابع چگالی فوق از قرار دادن $\alpha = \sqrt{2/\sigma}$ و $\beta = \eta\sigma/(\sigma+1)$ در تابع چگالی احتمال توزیع BSحاصل می‌شود.

۴.۲. **مدل رگرسیون** BS. اگر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند که $T_i \sim BS(\alpha, \theta_i)$ در این‌صورت مشاهدات متناظربا آن‌ها به‌صورت $\mathbf{t} = (t_1\ t_2 \ldots t_n)^T$ می‌باشد. به‌علاوه p متغیر تعینی با مقادیر $\mathbf{x} = (1, x_1, x_2, \ldots, x_p)^T$ و بردار ضرایب رگرسیونی $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)^T$ درنظر گرفته می‌شود به‌طوری که $\theta_i = \exp(x_i^T\beta)$ است.
مدل رگرسیون BS که توسط بالاکریشنان و همکاران (۲۰۱۵) مطالعه شده است می‌تواند به‌شکل

$$T_i = \theta_i\phi_i = \exp(x_i^T\beta)\phi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{۳}$$

ارائه شود، که در آن $\phi_i \sim BS(\alpha, 1)$ است که بیان می‌دارد $T_i \sim BS(\alpha, \theta_i)$ است.

۵.۲. **مدل رگرسیون** $log-BS$. اگر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند که $T_i \sim BS(\alpha, \theta_i)$ در این‌صورت $\mathbf{t} = (t_1\ t_2 \ldots t_n)^T$ مشاهدات متناظربا آن‌هاست.
به‌علاوه $Y_i \sim log - BS(\alpha, \mu_i)$ که $Y_1 = \log(t_1), Y_2 = \log(\ t_2), \ldots, Y_n = \log(t_n)$ است که در آن $\mu_i = \log(\theta_i)$ و $\mathbf{y} = (y_1\ y_2 \ldots y_n)^T$ مشاهدات متناظر با آن‌هاست. با اعمال لگاریتم در مدل رگرسیونی (۳) داریم

$$Y_i = \log(T_i) = \mu_i + \varepsilon_i = x_i^T\beta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{۴}$$

که $\varepsilon_i = \log(\phi_i) \sim \log - BS(\alpha, 0)$ ، $\mu_i = x_i^t\beta$ و β و x_i همانند مدل (۳) تعریف می‌شوند.

۶.۲. **مدل رگرسیون** RBS. اگر $t_1, t_2, \ldots, t_n$ متغیرهای تصادفی مستقل باشند و $T_i \sim RBS(\eta_i, \sigma)$ برای $i = 1, \ldots, n$ و $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n)^T$ مشاهدات متناظر با آن‌ها باشد. مدل رگرسیون RBS براساس تابع چگالی (۲) دارای یک مؤلفه سیستماتیک است که به‌صورت

$$h(\eta_i) = \eta_i = x_i\beta, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{۵}$$

بیان می‌شود که β و x_i به‌صورت مدل (۳) تعریف می‌شوند. در عبارت فوق $\eta_i = h^{-1}(x_i^T\beta)$ و $h : R \to R^+$ یک تابع ربط است که قویا یکنوا، مثبت و حداقل دوبار مشتق‌پذیر است [۷].
در این مقاله از $h(\eta) = \log(\eta)$ استفاده می‌شود. قابل توجه است که واریانس Y_i تابعی از η_i است. بنابراین، اگرچه میانگین درحال مدل‌سازی است اما واریانس نیز با این واقعیت ساده که $var(Y_i) = \eta_i^2/\Phi$ مدل‌سازی می‌شود.

۷.۲. **خلاصه رویکردها.** خلاصه رویکردهای رگرسیون BS

(۱) داده های $y_1, \ldots, y_n$ از پاسخ Y و داده های $x_{1j}, \ldots, x_{nj}$ از متغیر توضیحی X_j جمع آوری می‌شود.
(۲) تجزیه و تحلیل داده‌های اکتشافی طبق مراحل زیر انجام می‌شود: در ابتدا برای توصیف نوع توزیع داده‌ها، آمار توصیفی برای $y_1, \ldots, y_n$ محاسبه می‌شود اگر شواهدی از تقارن وجود داشت، از توزیع نرمال استفاده می‌شود در غیر این‌صورت، می‌توان از یک توزیع نامتقارن مانند مدل BS استفاده کرده و سپس برای به‌دست آوردن درجه ارتباطی که باید در مدل سازی در نظر گرفته شود، نمودارهای پراکندگی بین Y و هر متغیر توضیحی X_j ساخته شود اگر شواهدی از ارتباط بین Y و برخی متغیرهای توضیحی X_j وجود داشت می‌توان از یک مدل رگرسیونی استفاده کرد و با مرحله بعد ادامه داد. در غیر این‌صورت، متغیر(های) توضیحی در مدل سازی در نظر گرفته نمی‌شوند.
(۳) مدل‌های رگرسیون BSرا فرموله کرده و پارامترهای آن با روش ماکسیمم درستنمایی از طریق روش بهینه سازی غیر خطی برآورد می‌شود. بهترین مدل رگرسیون با در نظر گرفتن کمترین مقدار برای معیارهای اطلاعاتی به‌عنوان مثال معیارهای اطلاعاتی آکایکه، بیز و ...انتخاب می‌شود.
(۴) برازش مدل و فاصله گرفتن از مفروضات مدل رگرسیون با استفاده از تجزیه و تحلیل باقیمانده بررسی می‌شود.

۳. مثال داده‌های فرسودگی مواد

به منظور مقایسه مدل‌های رگرسیون ارائه شده آن‌ها بر روی یک مجموعه داده واقعی مربوط به زمان خرابی ده هزار قطعه فولاد سخت شده که در چهار سطح تنش مختلف قرارگرفته‌اند، اعمال می‌شوند. این داده‌ها از آزمایشگاه‌های پرینستون شرکت تحقیق و توسعه $Mobil$ در دانشگاه پرینستون در ایالات متحده به‌دست آمده است.
جدول ۱ آماره‌های توصیفی برای مجموعه داده‌های زمان خرابی، که شامل مواردی چون آماره‌های مرکزی، ضریب تغییرات (CV)، انحراف معیار (SD) و ضریب چولگی (CS) است را ارائه می‌دهد.

جدول ۱. آماره‌های توصیفی متغیر پاسخ «زمان شکست».

minimum	median	mean	SD	CV	CS	maximum
۰/۰۱۲	۰/۸۴	۳/۷۵	۷/۴۴	۱۹۸/۱۲	۳/۱۹	۳۷/۴

جدول ۲ برآوردها، خطاهای استاندارد مربوطه و p-مقدارهای آزمون t را برای پارامترهای مدل رگرسیون BS، $log-BS$ و RBS گزارش می‌کند. علاوه بر این، مقادیر AIC و BIC مرتبط با این مدل‌ها گزارش می‌شود. از جدول ۲ می‌توان مشاهده کرد که برآوردهای β_1 کاملاً مشابه هستند. با این حال، براوردهای β_0 متفاوت هستند. مدل $log-BS$ وBS مقادیر برابر (۰/۰۹۷۸) را دارا هستند، در حالی‌که مدل RBS براوردی معادل (۰/۶۹۶۲) را داراست.
قابل توجه است که عرض از مبدأ در مدل‌های $log-BS$ وBS از نظر آماری در سطح ۵٪ معنی دار نیست. این بدین معنی است که این پارامتر در مدل تاثیرگزار نیست. علاوه بر این، مقادیر AIC و BIC برای مدل‌های RBS و BS برابر است، اما این مقادیر کمتر از مقادیر مشاهده شده برای مدل $log-BS$ است. یعنی برای برازش مدل، مدل‌های RBS و BS مناسب‌تر هستند.

جدول ۲. برآوردهای ML، خطاهای استاندارد و p-مقادیر مدل‌های مشخص شده برای داده‌های زمان خرابی.

model	parameter	estimate	standard error	p-value	AIC	BIC
BS	α	۱/۲۷۹	۰/۱۴۳۸	$<$ ۰/۰۰۱	۱۲۵/۱۲	۱۳۰/۱۸
	β_0	۰/۰۹۷۸	۰/۱۷۰۷	۰/۵۶۶		
	β_1	−۱۴/۱۱۶۳	۱/۵۷۱۴	$<$ ۰/۰۰۱		
$log-BS$	α	۱/۲۷۹	۰/۱۴۳۸	$<$ ۰/۰۰۱	۱۲۹/۲۴	۱۳۴/۳۰
	β_0	۰/۰۹۷۸	۰/۱۷۰۷	۰/۵۶۶		
	β_1	−۱۴/۱۱۶۳	۱/۵۷۱۴	$<$ ۰/۰۰۱		
RBS	σ	۱/۲۲	۰/۲۷۴۸	$<$ ۰/۰۰۱	۱۲۵/۱۲	۱۳۰/۱۸
	β_0	۰/۶۹۶۲	۰/۱۹۳۵	$<$ ۰/۰۰۱		
	β_1	−۱۴/۱۱۷۰	۱/۵۷۱۸	$<$ ۰/۰۰۱		

۴. نتایج اصلی

در این مقاله، مقایسه‌ای از سه مدل رگرسیون برن بام - سندرز انجام شد. این مدل‌ها بر اساس توزیع‌های برن‌بام-سندرز، لگاریتم برن‌بام-سندرز و برن‌بام-سندرز بازپارامتریده هستند. با توجه به داده واقعی مربوط به زمان خرابی مقادیر AIC و BIC برای مدل‌های RBS و BS برابر و کمتر از مقادیر مشاهده شده برای مدل $log-BS$ است. یعنی برازش مدل‌های RBS و BS برای این داده‌ها مناسب‌تر هستند.

بنابراین، سه مدل رگرسیون برن‌بام ـ سندرز مقایسه شده و نتایج عددی عملکرد این رگرسیون‌ها گزارش شده است و نشان‌دهنده این است که مدل‌های مختلف می‌توانند هنگام برخورد با داده‌های رگرسیونی با دامنه مثبت و دنبال کردن یک توزیع چوله به راست، مناسب باشند.

مراجع

1. N. Balakrishnan and X. Zhu, *Inference for the Birnbaum-Saunders lifetime regression model with applications*, Comm. Statist. Simulation Comput. **44** (8) (2015) 2073–2100.
2. Z. W. Birnbaum and S. C. Saunders, *A new family of life distributions*, J. Appl. Probability **6** (1969) 319–327.
3. A. Dasilva, R. Dias, V. Leiva, C. Marchant and H. Saulo, *Birnbaum-Saunders regression models: a comparative evaluation of three approaches*, J. Stat. Comput. Simul. **90** (14) (2020) 2552–2570.
4. V. Leiva, M. Santos-Neto, F. J. A. Cysneiros and M. Barros, *A methodology for stochastic inventory models based on a zero-adjusted Birnbaum-Saunders distribution*, Appl. Stoch. Models Bus. Ind. **32** (1) (2016) 74–89.
5. J. A. Nelder and R. W. Wedderburn, *Generalized linear models*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. A (General) **135** (3) (1972) 370–384.
6. J. R. Rieck and J. R. Nedelman, *A log-linear model for the Birnbaum–Saunders distribution*, Technometrics **33** (1) (1991) 51–60.
7. M. Santos-Neto, F. J. A. Cysneiros, V. Leiva and M. Barros, *A reparameterized Birnbaum-Saunders distribution and its moments, estimation and applications*, REVSTAT **12** (3) (2014) 247–272.

پست الکترونیکی: seyediza.31@gmail.com
پست الکترونیکی: jafari-m@modares.ac.ir

سخنرانی‌ها

آنالیز

ارتباط شرط (W) برای جبرهای باناخ با گروه همانستگی مرتبه اول

مرتضی اسمعیلی*
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
و مهدی رستمی
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله، قصد داریم رابطه‌ای بین شرط (W) جبر باناخ A و گروه همانستگی مرتبهٔ اول آن به‌دست آوریم. در واقع، نشان می‌دهیم صفر شدن گروه همانستگی جبر باناخ A با ضرایب در فضای ضربگرها $M(X')$ برای ردهٔ خاصی از باناخ A-دومدول X یک شرط کافی برای شرط (W) است.
واژه‌های کلیدی: شرط (W)، ضربگرها، گروه همانستگی مرتبه اول.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 16E40, 43A20.

۱. پیش‌گفتار

مفاهیم مانستگی جبرهای باناخ مانند دوتختی بودن و دوتصویری بودن اولین بار توسط هلمسکی معرفی شد و مورد مطالعه قرار گرفت. این مفاهیم که در ارتباط نزدیک با مفاهیم همانستگی جبرهای باناخ هستند مورد توجه ریاضیدانان زیادی قرار گرفت و برای رده‌های مختلفی از جبرهای باناخ مانند جبرهای گروهی، جبرهای نیم‌گروهی، جبرهای سگال و جبرهای فوریه بررسی شده‌اند. برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۱، ۳، ۴] و [۷] مراجعه شود.

فرض کنید A یک جبر باناخ و $A\hat{\otimes}A$ فضای حاصلضرب تانسوری تصویری باشد. در این‌صورت $A\hat{\otimes}A$ یک باناخ A-دومدول با اعمال مدولی زیر است:

$$a\cdot(b\otimes c)=ab\otimes c,\quad (b\otimes c)\cdot a=b\otimes ca,\qquad (a,b,c\in A).$$

همچنین $(A\hat{\otimes}A)'$ با اعمال مدولی زیر یک باناخ A-دومدول است:

$$(a\cdot f)(b\otimes c)=f(b\otimes ca),$$
$$(f\cdot a)(b\otimes c)=f(ab\otimes c),\qquad (a,b,c\in A, f\in(A\hat{\otimes}A)').$$

به‌طور مشابه می‌توان $(A\hat{\otimes}A)''$ را به‌عنوان یک باناخ A-دومدول در نظر گرفت.

تعریف ۱.۱. جبر باناخ A را دوتختی نامیم هرگاه همریختی پیوسته A-مدولی $\rho : A\to(A\hat{\otimes}A)''$ موجود باشد به‌طوری که

$$(\pi_A''\circ\rho)(a)=\kappa_A(a),\qquad (a\in A),$$

که در آن $\pi_A : A\hat{\otimes}A\to A$ عملگر ضربی و $\kappa_A : A\to A''$ نشانندهٔ طبیعی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\pi_A(a\otimes b)=ab,\quad \kappa_A(a)(f)=\hat{a}(f)=f(a),\quad (a,b\in A, f\in A').$$

به‌عنوان یک نتیجهٔ مهم و اساسی نشان داده شده است که جبر باناخ A میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر دوتختی و دارای یکهٔ تقریبی کراندار باشد. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ ارتباط بین مفاهیم مانستگی و همانستگی جبرهای باناخ به مراجع [۴] و [۵] مراجعه کنید. اخیراً پورعباس و سهامی در [۶] به معرفی مفهوم ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ پرداخته و خواص آن را مورد بررسی قرار داده‌اند. در سرتاسر این مقاله، $\Delta(A)$ بیانگر مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی جبرهای باناخ A است.

* سخنران

تعریف ۲.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. گوییم A، ϕ-دوتختی است هرگاه همریختی پیوسته A-دومدولی $\rho : A \to (A\hat{\otimes}A)'$ موجود باشد به‌طوری که

$$(\pi'_A \circ \rho(a))(\phi) = \phi(a), \qquad (a \in A).$$

پس از آن در [۲] مولفین به معرفی مفهومی ضعیف‌تر موسوم به شرط (W) برای جبرهای باناخ پرداخته و ارتباط آن با مفاهیم ϕ-دوتختی و ϕ-میانگین‌پذیری را بررسی کرده‌اند. به کمک این نتایج مفهوم ϕ-دوتختی برای جبرهای باناخ سگال متقارن روی گروه‌های موضعاً فشرده به طور دقیق مشخص‌سازی شد. همچنین نشان داده شد که برای جبرهای باناخ جابجایی مجهز به یکه تقریبی دو طرفه کراندار مفاهیم ϕ-دوتختی، ϕ-میانگین‌پذیری و شرط (W) معادل هستند.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. گوییم دوتایی (A, ϕ) در شرط (W) صدق می‌کند اگر عملگر خطی کراندار $\rho : A \to (A\hat{\otimes}A)''$ موجود باشد به‌طوری که

آ) برای هر $a, b \in A$، $\rho(ab) = \phi(a)\rho(b) = \rho(a) \cdot b$؛

ب) برای هر $a \in A$، $(\pi''_A \circ \rho(a))(\phi) = \phi(a)$.

در این مقاله، قصد داریم رابطه‌ای بین شرط (W) جبر باناخ A و گروه همانستگی مرتبهٔ اول آن به‌دست آوریم. در واقع، نشان می‌دهیم صفر شدن گروه همانستگی جبر باناخ A با ضرایب در فضای ضربگرها $M(X')$ برای ردهٔ خاصی از باناخ A-دومدول X یک شرط کافی برای شرط (W) است.

۲. ارتباط بین شرط (W) و گروه همانستگی هاخشیلد مرتبهٔ اوّل

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک A-مدول باشد. عملگر خطی و کراندار $D : A \longrightarrow X$ یک اشتقاق است هرگاه

$$D(ab) = a \cdot D(b) + D(a) \cdot b, \qquad (a, b \in A).$$

برای هر $x \in X$ ، نگاشت $ad_x : A \longrightarrow X$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ad_x(a) = a \cdot x - x \cdot a, \qquad (a \in A).$$

بدیهی است ad_x یک اشتقاق کراندار است که به آن اشتقاق درونی گوییم. فضای تمام اشتقاق‌ها از جبر باناخ A به‌توی A -دومدول باناخ X را با نماد $Z^1(A, X)$ و فضای تمام اشتقاق‌های درونی از A به‌توی X را با نماد $N^1(A, X)$ نشان می‌دهیم. گروه همانستگی هاخشیلد مرتبهٔ اوّل A با ضرایب در X را با نماد $H^1(A, X)$ نشان می‌دهیم که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^1(A, X) = \frac{Z^1(A, X)}{N^1(A, X)}.$$

فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک باناخ A-دومدول باشد. برای هر $x \in X$ نگاشت‌های $L_x : A \longrightarrow X$ و $R_x : A \longrightarrow X$ را با ضابطه‌های زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_x(a) = x \cdot a, \quad R_x(a) = a \cdot x, \qquad (a \in A).$$

فضای ضربگرها روی X عبارت است از مجموعهٔ تمام زوج‌های (L, R) که در آن L و R نگاشت‌های خطی کراندار از A به‌توی X هستند و برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$L(ab) = L(a) \cdot b, \quad R(ab) = a \cdot R(b), \quad a \cdot L(b) = R(a) \cdot b.$$

فضای ضربگرهای روی X را با نماد $M(X)$ نشان می‌دهیم. به‌راحتی می‌توان دید که $M(X)$ با اعمال جمع و ضرب اسکالر معمولی و با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\| (L, R) \| = \max\{\| L \|, \| R \|\}.$$

همچنین $M(X)$ با عمل مدولی زیر یک باناخ A-دومدول است:

$$a \cdot (L, R) = (L_{R(a)}, R_{R(a)}), \quad (L, R) \cdot a = (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

در مرجع [۸] سلیوانف نشان داد جبر باناخ A دوتختی است اگر و تنها اگر برای هر باناخ A -دومدول X داشته باشیم

$$H^1(A, M(X')) = (0).$$

با توجه به این مطلب، به‌عنوان نتیجه اصلی این مقاله ما رابطه بین شرط (W) و گروه همانستگی هاخشیلد مرتبهٔ اوّل جبر باناخ A، با ضرایب در فضای ضربگرها را به‌دست می‌آوریم. در واقع، نشان می‌دهیم صفر شدن گروه همانستگی جبر باناخ A با ضرایب در فضای ضربگرها $M(X')$ برای ردهٔ خاصی از باناخ A-دومدول X یک شرط کافی برای شرط (W) است.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. اگر برای هر باناخ A-دومدول X به‌طوری که عمل مدولی چپ آن به‌صورت

$$x \cdot a = \phi(a)x, \qquad (x \in X, a \in A),$$

است داشته باشیم $H^1(A, M(X')) = (0)$ آنگاه (A, ϕ) در شرط (W) صدق می‌کند.

اثبات. ابتدا فضای باناخ $A\hat{\otimes}A^\sharp$ را به‌عنوان یک باناخ A-دومدول همراه با اعمال مدولی زیر در نظر می‌گیریم:

$$a \cdot (b \otimes c) = \phi(a)(b \otimes c), \quad (b \otimes c) \cdot a = b \otimes ca, \quad (a, b \in A, c \in A^\sharp),$$

که در آن $A^\sharp$ یکدار شدهٔ جبر باناخ A است. نگاشت $\pi_1 : A\hat{\otimes}A^\sharp \longrightarrow A$ را با ضابطه

$$\pi_1(a \otimes b) = ab, \qquad (a \in A, b \in A^\sharp),$$

در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم $X = \ker(\phi \circ \pi_1)$. عضو $b_0 \in A$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $\phi(b_0) = 1$. اکنون نگاشت $D : A \longrightarrow X$ را با ضابطه

$$D(a) = \phi(a)b_0 \otimes 1 - b_0 \otimes a, \qquad (a \in A),$$

در نظر می‌گیریم. علاوه بر این نگاشت $\psi : X'' \longrightarrow M(X'')$ را به‌صورت

$$\psi(z) = (L_z, R_z) \qquad (z \in X''),$$

تعریف می‌کنیم که در آن L_z و R_z به ترتیب انتقال‌های چپ و راست z می‌باشند. تعریف می‌کنیم $\widetilde{D} = \psi \circ \kappa \circ D$. بنابراین برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}(a) \cdot b + \phi(a)\widetilde{D}(b) &= \psi(\widehat{D(a)}) \cdot b + \phi(a)\psi(\widehat{D(b)}) \\
&= (L_{\widehat{D(a)}}, R_{\widehat{D(a)}}) \cdot b + \phi(a)(L_{\widehat{D(b)}}, R_{\widehat{D(b)}}) \\
&= (L_{D(a)\cdot\widehat{b+\phi(a)D(b)}}, R_{D(a)\cdot\widehat{b+\phi(a)D(b)}}) \\
&= \widetilde{D}(ab).
\end{aligned}$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که $\widetilde{D}$ یک اشتقاق است و بنا به فرض عضو $(L, R) \in M(X'')$ موجود است به‌طوری که

$$\widetilde{D}(a) = a \cdot (L, R) - (L, R) \cdot a \ (a \in A).$$

بنابراین برای هر $a \in A$ داریم:

$$(L_{\widehat{D(a)}}, R_{\widehat{D(a)}}) = (L_{R(a)}, R_{R(a)}) - (L_{L(a)}, R_{L(a)}).$$

بنابراین

$$\widehat{D(a)} \cdot b = \phi(a)L(b) - L(a) \cdot b.$$

اکنون نگاشت $\rho : A \longrightarrow (A \otimes A^\sharp)''$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho(a) = \widehat{b_\circ \otimes a} - L(a) \ (a \in A).$$

علاوه بر این به آسانی قابل بررسی است که

$$\rho(ab) = \rho(a) \cdot b = \phi(a)\rho(b) \ (a, b \in A).$$

از طرفی دیگر برای هر $a \in A$ داریم:

$$\begin{aligned} \pi_A'' \circ \rho(a)(\phi) &= \widehat{b_\circ a}(\phi) - \pi_1''(L(a))(\phi) \\ &= \phi(a) - L(a)(\pi_1'(\phi)) \\ &= \phi(a). \end{aligned}$$

علاوه بر این چون $\rho(A) \subseteq (A\hat{\otimes}A)''$ نتیجه می‌گیریم که A یک جبر باناخ ϕ- دوتختی چپ است و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. □

مراجع

1. Y. Choi, *Biflatness of ℓ^1-semilattice algebras,* Semigroup Forum **75** (2007) 253–271.
2. M. Essmaili, M. Rostami and M. Amini, *A characterization of biflatness of Segal algebras based on a character,* Glas. Mat. Ser. III **51** (71) (2016) 58–45.
3. N. Gronbaek and F. Habibian, *Biflatness and biprojectivity of Banach algebras graded over a semilattice,* Glasgow Math. J. **52** (2010) 479–495.
4. A. Ya. Helemskii, *Flat Banach module and amenable algebras,* Trans. Moscow Math. Soc. **47** (1985) 199–244.
5. V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
6. A. Sahami and A. Pourabbas, *On ϕ-biflat and ϕ-biprojective Banach algebras*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **20** (2013) 801–789.
7. E. Samei, N. Spronk and R. Stokke, *Biflatness and pseudo-amenability of Segal algebras,* Canad. J. Math. **62** (4) (2010) 845-869.
8. Yu. V. Selivanov, *Cohomological characterizations of biprojective and biflat Banach algebras,* Monatsh. Math. **128** (1999) 60–35.

پست الکترونیکی: m.essmaili@khu.ac.ir
پست الکترونیکی: mross@aut.ac.ir

ویژگی موروثی مفهوم مرتبط با ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ

مرتضی اسمعیلی
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
و مهدی رستمی*
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله به بررسی ویژگی موروثی مفهومی مرتبط با ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ می‌پردازیم. در واقع شرط (W) را برای جبرهای باناخ معرفی کرده و ویژگی موروثی آن را با زبان رشته‌های دقیق کوتاه به‌دست می‌آوریم. با استفاده از این مطلب، نشان می‌دهیم اگر I یک ایده‌آل دو طرفه بسته از جبر باناخ A باشد، آن‌گاه تحت شرایطی خاص داشتن شرط (W) برای A به جبر باناخ خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ منتقل خواهد شد.
واژه‌های کلیدی: ϕ-میانگین‌پذیری، ϕ-دوتختی، شرط (W).
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 16E40, 43A20.

۱. پیش‌گفتار

ایدهٔ اولیهٔ مفهوم میانگین‌پذیری گروه‌های توپولوژیک موضعاً فشرده را فون نویمان در سال ۱۹۲۹ برای یافتن یک میانگین پایا روی فضای توابع کراندار از اعداد حقیقی مطرح کرد. در واقع اگر G یک گروه موضعاً فشرده باشد آن‌گاه اندازهٔ هار چپ λ یک تابعک خطی مثبت و پایا روی جبر گروهی $L^1(G)$ القا می‌کند. پس از آن مسأله وجود چنین تابعک‌هایی روی فضای $L^\infty(G)$ مطرح گردید. برای اولین بار دی گروه‌های موضعاً فشرده با چنین ویژگی را میانگین‌پذیر نامید. در سال ۱۹۷۲، جانسون نشان داد گروه موضعاً فشردهٔ G میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر برای هر باناخ $L^1(G)$-دومدول دلخواه X گروه همانستگی مرتبهٔ اول جبر گروهی $L^1(G)$ با ضرایب در دوگان X برابر صفر باشد. سپس جانسون مفهوم میانگین‌پذیری جبرهای باناخ را مطرح کرد که برای سالیان طولانی مورد توجه ریاضیدانان بود. با الهام گرفتن از این نتایج، لائو در [۴] به مطالعه و بررسی ردهٔ وسیعی از جبرهای باناخ پرداخت که آن‌ها را F-جبر نامید. منظور از F-جبر عبارت است از جبر باناخ A که پیش‌دوگان یک جبر فون نویمان M است و عضو همانی $e \in M$ یک تابعک خطی ضربی روی A تعریف می‌کند. فرض کنید A یک F-جبر باشد. دراین‌صورت A را میانگین‌پذیر چپ نامیم هرگاه برای هر A-دومدول باناخ X به‌طوری که عمل مدولی چپ به‌صورت

$$a \cdot x = e(a)x \ (a \in A \ , x \in X),$$

باشد، هر اشتقاق از A به‌توی X' درونی باشد. اخیراً کانیوث، لائو و پیم در [۳] به معرفی و مطالعهٔ مفهوم ϕ-میانگین‌پذیری برای جبرهای باناخ پرداخته‌اند که در واقع تعمیم مفهوم میانگین‌پذیری چپ برای F-جبرها است. همچنین به طور مستقل سنگانی منفرد به معرفی و مطالعهٔ مفهوم میانگین‌پذیری کاراکتری جبرهای باناخ پرداخته است [۵]. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ مفاهیم میانگین‌پذیری، ϕ-میانگین‌پذیری و میانگین‌پذیری کاراکتری به مراجع [۱، ۳] و [۵] مراجعه کنید. به‌عنوان یک نتیجهٔ مهم و اساسی می‌توان نشان داد جبر باناخ A میانگین‌پذیر است اگر و تنها اگر دوتختی و دارای یکهٔ تقریبی کراندار باشد. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ مفاهیم مانستگی جبرهای باناخ به [۶] مراجعه کنید. اخیراً پورعباس و سهامی در [۷] به معرفی مفهوم ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ پرداخته و خواص آن را مورد بررسی قرار داده‌اند. پس از آن در [۲] مؤلفین به معرفی ویژگی ضعیف‌تر موسوم به شرط (W) برای جبرهای باناخ پرداخته‌اند و ارتباط آن با مفاهیم دوتختی و ϕ-میانگین‌پذیری را بررسی

* سخنران

کرده‌اند. به کمک این نتایج مفهوم ϕ-دوتختی برای جبرهای باناخ سگال متقارن روی گروه‌های موضعاً فشرده به طور دقیق مشخص‌سازی شد. لازم به ذکر است مشخص‌سازی مفهوم دوتختی بودن برای جبرهای سگال کماکان به‌صورت یک مسأله حل نشده مطرح است. همچنین ثابت شد که برای جبرهای باناخ جابجایی مجهز به یکه تقریبی دو طرفه کراندار مفاهیم ϕ-دوتختی، ϕ-میانگین‌پذیری و شرط (W) معادل هستند. در این مقاله، قصد داریم به ادامهٔ مطالعات خود درباره شرط (W) برای جبرهای باناخ پرداخته و برخی از ویژگی‌های موروثی آن را با مفهوم رشته‌های دقیق کوتاه بررسی کنیم. به‌عنوان یک نتیجه، نشان می‌دهیم اگر I یک ایده‌آل دوطرفهٔ بسته از جبر باناخ A باشد تحت شرایطی می‌توان نتیجه گرفت شرط (W) برای جبر باناخ A به جبر باناخ خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ منتقل می‌شود.

۲. نتایج اصلی

فرض کنید A یک جبر باناخ و $A\hat{\otimes}A$ فضای حاصلضرب تانسوری تصویری باشد. در این‌صورت $A\hat{\otimes}A$ یک باناخ A-دومدول با اعمال مدولی زیر است:

$$a\cdot(b\otimes c)=ab\otimes c,\quad (b\otimes c)\cdot a=b\otimes ca\qquad (a,b,c\in A).$$

همچنین $(A\hat{\otimes}A)'$ با اعمال مدولی زیر یک باناخ A-دومدول است:

$$(a\cdot f)(b\otimes c)=f(b\otimes ca),$$

$$(f\cdot a)(b\otimes c)=f(ab\otimes c),\qquad (a,b,c\in A, f\in(A\hat{\otimes}A)').$$

به‌طور مشابه می‌توان $(A\hat{\otimes}A)''$ را به‌عنوان یک باناخ A-دومدول در نظر گرفت. در سرتاسر این مقاله، $\Delta(A)$ بیانگر مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی ضربی ناصفر روی جبرهای باناخ A و $\pi_A : A\hat{\otimes}A\to A$ نگاشت ضربی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_A(a\otimes b)=ab,\qquad (a,b\in A).$$

تعریف ۱.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi\in\Delta(A)$. گوییم A، ϕ-دوتختی است هرگاه همریختی پیوسته A-دومدولی $\rho : A\to(A\hat{\otimes}A)'$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$(\pi_A'\circ\rho(a))(\phi)=\phi(a),\qquad (a\in A).$$

مفهوم ϕ-دوتختی جبرهای باناخ در [۷] معرفی شد و خواص آن مورد بررسی قرار گرفت. پس از آن در [۲] مؤلفین به معرفی مفهوم ضعیف‌تری برای جبرهای باناخ پرداختند. این مفهوم که با شرط (W) معرفی شد یک شرط ضعیف‌تری از ϕ-دوتختی بودن جبرهای باناخ است.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد و $\phi\in\Delta(A)$. گوییم دوتایی (A,ϕ) در شرط (W) صدق می‌کند اگر عملگر خطی کراندار $\rho : A\to(A\hat{\otimes}A)''$ موجود باشد به‌طوری‌که

آ) برای هر $a,b\in A$، $\rho(ab)=\phi(a)\rho(b)=\rho(a)\cdot b$؛

ب) برای هر $a\in A$، $(\pi_A''\circ\rho(a))(\phi)=\phi(a)$.

این مفهوم روی جبرهای باناخ در [۲] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت و ارتباط آن با مفاهیم ϕ-دوتختی و ϕ-میانگین‌پذیری جبرهای باناخ به‌دست آمد. همچنین با استفاده از این مفهوم شرایط لازم و کافی برای ϕ-دوتختی بودن جبرهای سگال متقارن روی گروه‌های موضعاً فشرده به‌دست آمد. برای اطلاعات بیشتر دربارهٔ مفهوم ϕ-دوتختی و شرط (W) به مراجع [۷] و [۲] مراجعه کنید.

در ادامهٔ این بخش به بررسی شرط (W) برای جبرهای باناخ خارج قسمتی می‌پردازیم. در واقع شرایطی را ارائه می‌دهیم که تحت آن شرط (W) از جبر باناخ A به جبر باناخ خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ منتقل می‌شود که در آن I یک ایده‌آل دو طرفهٔ بسته است. در ابتدا قضیه زیر را ثابت می‌کنیم که شرایطی معادل با شرط (W) را فراهم

می‌سازد. اگر A یک جبر باناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$ آنگاه نگاشت $\phi \otimes \phi : A\hat{\otimes}A \longrightarrow \mathbb{C}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$(\phi \otimes \phi)(a \otimes b) = \phi(a)\phi(b), \qquad (a, b \in A).$$

همچنین اگر $f : A \longrightarrow B$ و $g : C \longrightarrow D$ عملگرهای خطی و کراندار روی جبرهای باناخ باشند، توسیع خطی نگاشت $f \otimes g : A\hat{\otimes}C \longrightarrow B\hat{\otimes}D$ با ضابطهٔ زیر یک عملگر خطی و کراندار است:

$$(f \otimes g)(a \otimes c) = f(a) \otimes g(c), \qquad (a \in A, c \in C).$$

قضیه ۳.۲. فرض کنیم A یک جبرباناخ باشد و $\phi \in \Delta(A)$. در این‌صورت احکام زیر هم ارزند:
آ) (A, ϕ) در شرط (W) صدق می‌کند.
ب) عملگر خطی و کراندار $\sigma : (A\hat{\otimes}A)' \longrightarrow A'$ موجود است به طوری‌که برای هر $a \in A$ داشته باشیم:

$$(\pi'_A \circ \sigma)(\phi \otimes \phi) = \phi \otimes \phi, \quad \sigma(a \cdot f) = a \cdot \sigma(f), \quad \phi(a)\sigma(f) = \sigma(f) \cdot a.$$

اثبات. آ $\Leftarrow$ ب) ابتدا فرض کنیم (A, ϕ) در شرط (W) صدق کند. طبق تعریف عملگر کراندار $\rho : A \longrightarrow (A\hat{\otimes}A)''$ موجود است به طوری‌که برای هر $a, b \in A$ داریم:

$$\rho(ab) = \phi(a)\rho(b) = \rho(a) \cdot b, \quad (\pi''_A \circ \rho(a))(\phi) = \phi(a).$$

حال نگاشت $\sigma : (A\hat{\otimes}A)' \to A'$ را با ضابطهٔ زیر در نظر می‌گیریم:

$$\sigma(f)(b) = (\rho(b))(f), \qquad (f \in (A\hat{\otimes}A)', b \in A).$$

در این‌صورت برای هر $a \in A$ داریم:

$$(a \cdot \sigma(f))(b) = \sigma(f)(ab) = \rho(ba)(f) = (\rho(b) \cdot a)(f) = \rho(b)(a \cdot f) = (\sigma(a \cdot f))(b).$$

همچنین

$$\begin{aligned}(\sigma(f) \cdot a)(b) = \sigma(f)(ab) &= \rho(ab)(f) = (\phi(a)\rho(b))(f) \\ &= \phi(a)(\rho(b))(f) = (\phi(a)\sigma(f))(b).\end{aligned}$$

علاوه‌براین برای هر $b, c \in A$ داریم:

$$\begin{aligned}((\pi'_A \circ \sigma)(\phi \otimes \phi))(b \otimes c) &= \pi'_A(\sigma(\phi \otimes \phi))(b \otimes c) \\ &= (\sigma(\phi \otimes \phi))(bc) = \rho(bc)(\phi \otimes \phi) \\ &= \phi(b)\rho(c)(\phi \otimes \phi) = \phi(b)((\pi''_A \circ \rho)(c))(\phi) \\ &= \phi(b)\phi(c) = (\phi \otimes \phi)(b \otimes c),\end{aligned}$$

و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود.
ب $\Leftarrow$ آ) حال فرض کنیم عملگر خطی و کراندار $\sigma : (A \otimes A)' \to A'$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $a \in A$ داریم:

$$\sigma(a \cdot f) = a \cdot \sigma(f), \ \phi(a)\sigma(f) = \sigma(f) \cdot a, \ (\pi'_A \circ \sigma)(\phi \otimes \phi) = \phi \otimes \phi.$$

عملگر خطی و کراندار $\rho : A \longrightarrow (A\hat{\otimes}A)''$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(\rho(a))(f) = (\sigma(f))(a) \ (a \in A, f \in (A\hat{\otimes}A)').$$

در این صورت نتیجه می‌شود که

$$(\rho(ab))(f) = (\sigma(f))(ab) = (\sigma(f) \cdot a)(b) = \phi(a)\sigma(f)(b) = (\phi(a)\rho(b))(f).$$

همچنین داریم:

$$(\rho(ab))(f) = (\sigma(f))(ab) = (b \cdot \sigma(f))(a) = (\sigma(b \cdot f))(a) = \rho(a)(b \cdot f) = (\rho(a) \cdot b)(f),$$

از طرفی دیگر اگر $a_\circ \in A$ عضوی باشد که $\phi(a_\circ) = 1$ آنگاه

$$\begin{aligned}(\pi''_A \circ \rho(a))(\phi) = \pi''_A(\rho(a))(\phi) &= (\rho(a))(\pi'_A(\phi)) = (\sigma(\pi'_A(\phi)))(a)\\ &= (\sigma(\phi \otimes \phi))(a) = (\sigma(\phi \otimes \phi) \cdot a_\circ)(a)\\ &= (\sigma(\phi \otimes \phi))(a_\circ a) = (\pi'_A \circ \sigma(\phi \otimes \phi))(a_\circ \otimes a)\\ &= (\phi \otimes \phi)(a_\circ \otimes a) = \phi(a),\end{aligned}$$

و بدین ترتیب حکم ثابت می‌شود. □

حال به بررسی خواص موروثی شرط (W) برای جبرهای باناخ با مفهوم رشته‌های دقیق کوتاه می‌پردازیم.

قضیه ۴.۲. فرض کنید A و B دو جبر باناخ و I یک ایده‌آل دو طرفه بسته از A باشد و $\phi \in \Delta(B)$. رشتهٔ کوتاه دقیق زیر را در نظر می‌گیریم

$$\circ \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{q} B \longrightarrow \circ.$$

اگر $I = \overline{AI + IA}$ و $(A, \phi \circ q)$ در شرط (W) صدق کند آنگاه (B, ϕ) نیز در شرط (W) صدق می‌کند.

اثبات. چون $(A, \phi \circ q)$ در شرط (W) صدق می‌کند. با استفاده از قضیه ۳.۲، عملگر خطی و کراندار $\rho : (A\hat{\otimes}A)' \longrightarrow A'$ موجود است به‌طوری که

$$\rho(a \cdot f) = a \cdot \rho(f), \quad \rho(f) \cdot a = \phi \circ q(a)\rho(f), \quad (a \in A, f \in (A\hat{\otimes}A)'),$$

و همچنین $\pi'_A \circ \rho(\phi \circ q) = \phi \circ q$. اکنون نگاشت $\sigma : (B\hat{\otimes}B)' \longrightarrow B'$ را با ضابطه

$$\sigma(f)(q(a)) = \rho(f \circ (q \otimes q))(a), \qquad (a \in A, f \in (B\hat{\otimes}B)),$$

در نظر می‌گیریم. اولاً نشان می‌دهیم همواره $\rho(\psi)_{|I} = \circ$ که در آن $\psi = f \circ (q \otimes q)$. برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $i_1, i_2 \in I$ داریم:

$$\rho(\psi)(a_1 i_1 + i_2 a_2) = \rho(i_1 \cdot \psi)(a_1) + (\rho(\psi) \cdot i_2)(a_2) = \circ.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که σ خوش‌تعریف است. علاوه‌براین

$$\begin{aligned}(\sigma(f) \cdot b_1)(b) = (\sigma(f) \cdot q(a_1))(q(a)) &= (\rho \circ (q \otimes q)'(f))(aa_1)\\ &= (\rho((q \otimes q)'(f)) \cdot a_1)(a)\\ &= \phi \circ q(a_1)(\rho((q \otimes q)'(f)))(a)\\ &= \phi(b_1)\sigma(f)(b),\end{aligned}$$

و همچنین

$$\begin{aligned}\sigma(b_1 \cdot f)(b) = (\rho \circ (q \otimes q)'(b_1 \cdot f))(a) &= \rho(a_1 \cdot (q \otimes q)'(f))(a)\\ &= (\rho \circ (q \otimes q)'(f))(aa_1)\\ &= \sigma(f)(bb_1) = (b_1 \cdot \sigma(f))(b).\end{aligned}$$

از طرفی دیگر

$$(\sigma \circ \pi'_B(\phi))(q(a)) = (\rho \circ \pi_B(\phi \circ q))(a) = \phi \circ q(a).$$

بنابراین نتیجه می‌شود که (B, ϕ) در شرط (W) صدق می‌کند. □

نمادگذاری: اگر A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل دو طرفهٔ بسته A باشد نگاشت خارج قسمتی $Q : A \longrightarrow \frac{A}{I}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که یک همریختی جبری است:

$$Q(a) = a + I, \qquad (a \in A).$$

به‌عنوان یک نتیجه از قضیه قبل می‌توان ارتباط بین شرط (W) برای جبر باناخ A و جبر باناخ خارج قسمتی را به‌صورت زیر بیان کرد. حال به‌عنوان یک نتیجه نشان می‌دهیم اگر I یک ایده‌آل دو طرفه بسته از جبر باناخ A باشد، آن‌گاه تحت شرایطی خاص داشتن شرط (W) برای A به جبر باناخ خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ منتقل خواهد شد.

نتیجه ۵.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل دو طرفه بسته دلخواه از A باشد و $\phi \in \Delta(\frac{A}{I})$. اگر داشته باشیم $I = \overline{AI + IA}$ و $(A, \phi \circ Q)$ در شرط (W) صدق کند آن‌گاه $(\frac{A}{I}, \phi)$ نیز در شرط (W) صدق می‌کند.

اثبات. با استفاده از قضیه ۴.۲ و در نظر گرفتن رشته دقیق کوتاه

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} A \xrightarrow{Q} \frac{A}{I} \longrightarrow 0,$$

حکم ثابت می‌شود. □

نتیجه ۶.۲. فرض کنید A یک جبر باناخ با یکه تقریبی چپ یا راست (نه لزوماً کراندار) و I یک ایده‌آل دو طرفه بسته از A باشد و $\phi \in \Delta(\frac{A}{I})$. اگر $(A, \phi \circ Q)$ در شرط (W) صدق کند آن‌گاه $(\frac{A}{I}, \phi)$ نیز در شرط (W) صدق می‌کند.

اثبات. چون جبر باناخ A دارای یکه تقریبی چپ (راست) است به‌راحتی می‌توان نتیجه گرفت $I = \overline{AI + IA}$. حال با به‌کارگیری نتیجه ۵.۲ حکم ثابت می‌شود. □

مراجع

1. M. Alaghmandan, R. Nasr-Isfahani and M. Nemati, *Character amenability and contractibility of abstract Segal algebras,* Bull. Aust. Math. Soc. **82** (2) (2010) 281–274.
2. M. Essmaili, M. Rostami and M. Amini, *A characterization of biflatness of Segal algebras based on a character,* Glas. Mat. Ser. III **51** (71) (2016) 58–45.
3. E. Kaniuth, A. T. Lau and J. S. Pym, *On ϕ-amenability of Banach algebras,* Math. Proc. Cambridge philos. Soc. **144** (2008) 96–85.
4. A. T. Lau, *Analysis on a class of Banach algebras with applications to harmonic analysis on locally compact groups and semigroups*, Fund. Math. **118** (1983) 175–161.
5. M. S. Monfared, *Character amenability of Banach algebras,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **144** (2008) 706–697.
6. V. Runde, *Lectures on Amenability*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1774, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
7. A. Sahami and A. Pourabbas, *On ϕ-biflat and ϕ-biprojective Banach algebras,* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin **20** (5) (2013) 801–789.

پست الکترونیکی: m.essmaili@khu.ac.ir
پست الکترونیکی: mross@aut.ac.ir

سخنرانی‌ها

آنالیز عددی

یک روش هم‌مکانی هیبریدی در حل معادلات همرفت-پخش زمان-کسری

فائزه بهمنی*
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و علی افتخاری
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش عددی برای حل معادلات همرفت-پخش زمان-کسری با ضرایب متغیر مبتنی بر روش هم‌مکانی مورد استفاده قرار می‌گیرد به‌طوری که در بسط تقریب جواب، توابع سینک نسبت به مکان و چندجمله‌ای های لژاندر جایگزین نسبت به زمان ایفای نقش می‌نمایند. تحت این فرآیند، مسأله مذکور منجر به حل یک دستگاه از معادلات جبری خطی می‌شود. به منظور بررسی عملکرد و کارآیی این روش، دو مثال عددی بررسی خواهند شد.
واژه‌های کلیدی: نمایی مضاعف، معادله همرفت-پخش زمان-کسری، هم‌مکانی ALPs-Sinc، مشتق کسری کاپوتو.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35R11, 65N35.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله، معادله همرفت-پخش زمان-کسری را با ضرایب متغیر به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + a(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + b(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le 1, \tag{1}$$

این معادله دارای شرط اولیه

$$u(x,0) = g(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

و شروط مرزی دیریکله زیر است

$$u(0,t) = h(t), \quad u(1,t) = k(t), \quad 0 < t \le 1, \tag{3}$$

به‌طوری که توابع $a(x)$ و$b(x)$ توابعی پیوسته و ناصفر هستند.

مشتق کسری کاپوتو نسبت به زمان از مرتبه $\alpha \in (0,1]$ برای تابع $u(x,t)$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s}\frac{ds}{(t-s)^\alpha},$$

که در آن نماد $\Gamma(.)$ نمایانگر تابع گاما است. همچنین مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α برای توابع توانی به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\frac{\partial^\alpha t^p}{\partial t^\alpha} = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\alpha)}t^{p-\alpha}, & p \in \mathbb{N}_0 \text{ و } p \ge \lceil\alpha\rceil \text{ یا } p \notin \mathbb{N} \text{ و } p > \lfloor\alpha\rfloor, \\ 0, & p \in \mathbb{N}_0 \text{ و } p < \lceil\alpha\rceil. \end{cases}$$

به‌طوری که نمادهای $\lceil\alpha\rceil$ و $\lfloor\alpha\rfloor$ به ترتیب نشان‌دهنده سقف و کف α هستند.

در سال‌های اخیر در فرآیندهای مهندسی و فیزیکی از حسابان کسری استفاده‌های فراوان برده شده است، هم‌چنین کاربردهای آن‌ها در عرصه‌های الکتریکی شیمیایی، سیستم‌های زیست محیطی، علوم مواد و بقیه علوم معاصر به وضوح مشاهده می‌شود. در سه دهه اخیر روش‌های عددی مبتنی بر استفاده از تقریبات سینک در حل معادلات کسری نقش پررنگ و قابل تأملی داشته‌اند (رجوع شود به [۴] و منابع موجود در آن). در این‌جا برای حل

* سخنران

معادلات (۱)-(۳) از روش هم‌مکانی Sinc-ALPs همراه با تبدیل نمایی مضاعف (DE) بهره برده‌ایم. این روش دارای همگرایی از مرتبه $\mathcal{O}\Big(\exp\Big(\frac{-cN}{\ln(N)}\Big)\Big)$ است، به‌طوری که $c > ۰$ یک ثابت است و $N \in \mathbb{N}$ به تعداد نقاط هم‌مکانی وابسته است. با به کارگیری این روش و به وسیله بسط $u(x,t)$ به عنوان یک ترکیب خطی از توابع سینک تغییریافته (نسبت به مکان) و چندجمله‌ای های لژاندر جایگزین (نسبت به زمان) حل معادله مذکور به حل یک دستگاه از معادلات جبری با یک تعامل مرزی خاص کاهش می‌یابد.

اکنون به بیان برخی تعاریف اساسی به همراه خصوصیات وابسته به آن‌ها که در طول مقاله مورد نیاز هستند، می‌پردازیم.

توابع سینک تعریف شده روی $\mathbb{C}$ را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathrm{Sinc}(z) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z}, & z \neq ۰ , \\ ۱ , & z = ۰ , \end{cases}$$

و توابع سینک انتقال یافته را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$S(k,h)(z) = \mathrm{Sinc}\Big(\frac{z-kh}{h}\Big),$$

که در آن $h > ۰$ و k یک عدد صحیح است.

برای معادلات (۱)-(۳) نگاشت همدیس روی بازه متناهی $[۰, ۱]$ به‌شکل زیر است

$$w = \phi(x) = \ln\left(\frac{۱}{\pi}\ln\Big(\frac{x}{۱-x}\Big) + \sqrt{۱ + \Big(\frac{۱}{\pi}\ln\Big(\frac{x}{۱-x}\Big)\Big)^{۲}}\right),$$

معکوس این نگاشت به عنوان یک تبدیل DE روی زیربازه $\Gamma = [۰, ۱] = \psi(\mathbb{R})$ با $\phi(۰) = -\infty$ و $\phi(۱) = \infty$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید

$$x = \psi(w) = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\tanh\Big(\frac{\pi}{۲}\sinh w\Big).$$

هم‌چنین بسط کاردینال ویتاکر برای تابع $f(x)$ روی $\mathbb{R}$ به‌شکل زیر تعریف می‌گردد

$$C(f,h)(x) = f(x) \simeq \sum_{k=-N}^{N} f(x_k) S_k(x),$$

که در آن $k = -N, ..., N$, $x_k = \psi(kh)$ و $S_k(x) = S(k,h) \circ \phi(x)$ به ترتیب نقاط سینک روی $(۰, ۱)$ و توابع پایه‌ای سینک انتقال یافته نام دارند.

تعریف ۱.۱. [۵] تنزل تابع f نسبت به ψ را به‌صورت نمایی مضاعف گوییم هرگاه ثابت‌های مثبت α و β یافت شوند به‌طوری که

$$|f(\psi(\xi))| \leq \alpha \exp\left(-\beta \exp\left(|\xi|\right)\right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

تحت برخی شرایط روی f و تجزیه و تحلیل‌های تئوری و تجربیات عددی نشان داده می‌شود که خطای تقریب درونیابی روی $x \in [۰, ۱]$ به‌صورت زیر تخمین زده می‌شود

$$\left\| f(x) - \sum_{j=-N}^{N} f(x_j) S_j(x) \right\|_{\infty} \leq C \exp\left[\frac{-\pi d N}{\ln(\pi d N/\beta)}\right],$$

در رابطه بالا $h = \frac{\ln(\pi d N/\beta)}{N}$ انتخاب می‌گردد و C ثابتی مستقل از f و N است.

تعریف ۲.۱. [۳] فرض کنیم n یک عدد صحیح نامنفی باشد، چندجمله‌ای های لژاندر جایگزین (ALPs) به‌صورت زیر تعریف می‌گردند

$$P_{n,i}(t)=\sum_{k=0}^{n-i}(-1)^k\binom{n-i}{k}\binom{n+i+k+1}{n-i}t^{i+k},\quad i=0,1,\ldots,n,$$

و مشتق کسری کاپوتو از مرتبه $\alpha\in(0,1]$ برای این چندجمله‌ای‌ها به‌شکل زیر به‌دست آورده می‌شود

$$D_t^{\alpha}P_{j,i}(t)=\sum_{k=\max(\lceil\alpha\rceil-i,0)}^{\max(j-i,0)}p_{j,i,k}t^{i+k-\alpha},\quad j=0,1,\ldots,\quad i=0,1,\ldots,n.$$

به‌طوری که

$$p_{j,i,k}=(-1)^k\binom{j-i}{k}\binom{j+i+k+1}{j-i}\frac{\Gamma(i+k+1)}{\Gamma(i+k+1-\alpha)}.$$

۲. روش هم‌مکانی DE ALPs-Sinc

به منظور گسسته سازی معادلات (۱)-(۳) با استفاده از ایده هم‌مکانی DE ALPs-Sinc، $u(x,t)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$u_{m,n}(x,t)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{l=-m}^{m}\sum_{j=0}^{n}c_{l,j}S_l(x)P_{i,j}(t)+\underbrace{(1-x)h(t)+k(t)}_{\text{عبارت مرزی}},$$

ضرایب مجهول $c_{l,j}$ از بسط بالا را با جای‌گذاری $u_{m,n}(x,t)$ در معادلات (۱)-(۳) و $(2m+1)(n+1)$ ارزیابی کردن نتایج در نقاط هم‌مکانی $x_l=\psi(lh),l=-m,\ldots,m$ و $t_j,j=1,\ldots,n$ (n ریشه اول چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته $P_{n+1}(t)$ در $[0,1]$) تعیین می‌کنیم. سرانجام به وسیله حل $(2m+1)(n+1)$ معادلات جبری خطی با استفاده از دستور fsolve در MAPLE ضرایب مجهول مذکور به‌دست می‌آیند.

۳. نتایج عددی

در این بخش به منظور تأیید دقت و درستی روش ارائه شده روی دو مثال زیر بحث و بررسی صورت گرفته است. در دو مثال زیر با انتخاب $d=\frac{\pi}{6}$ و $\beta=\frac{\pi}{2}$ به‌طور تجربی به $h=\frac{1}{m}\ln(\frac{m\pi}{3})$ دست می‌یابیم. هم‌چنین خطای مطلق ماکزیمم $e_{m,n}$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$e_{m,n}:=\max\{|u(x,t)-u_{m,n}(x,t)|\quad:\quad 0\le x\le 1,\quad 0<t\le 1\}.$$

مثال ۱.۳. [۱، ۲] معادله پخش زمان-کسری زیر را

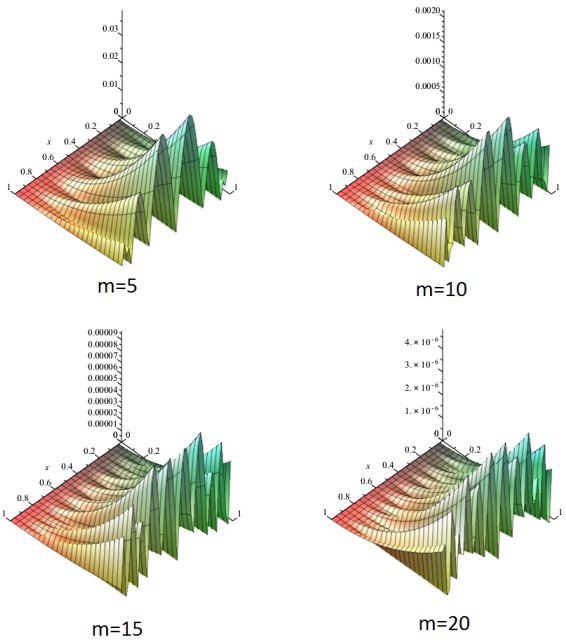
$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}-\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=f(x,t),\quad 0<x<1,\quad 0<t\le 1,\quad 0<\alpha\le 1,$$

با $h(t)=0$، $k(t)=0$، $f(x,t)=\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}t^{2-\alpha}\sin(2\pi x)+4\pi^2t^2\sin(2\pi x)$ و $u(x,0)=0$ در نظر می‌گیریم. جواب دقیق این مسأله برابر است با $u(x,t)=t^2\sin(2\pi x)$.

شکل ۱ نشان می‌دهد که تابع خطای $e_{m,n}$ با افزایش m، کاهش می‌یابد.

مثال ۲.۳. [۱، ۲] مسأله مقدار مرزی اولیه زیر از مرتبه α که $0<\alpha<1$، را در نظر می‌گیریم

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}}+x\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial^2u(x,t)}{\partial x^2}=2t^{\alpha}+2x^2+2,\quad 0<x<1,\quad 0<t\le 1,$$



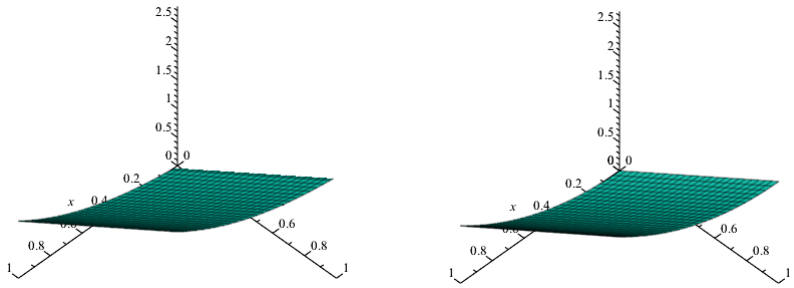
شکل ۱. همگرایی دنباله $e_{m,n}$ برای مقادیر متفاوت از m و $n = ۳$ برای مثال ۱.۳.

شرایط مرزی عبارتند از

$$u(۰,t) = ۲\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\Gamma(۲\alpha+۱)}t^{۲}\alpha, \quad u(۱,t) = ۱ + ۲\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\Gamma(۲\alpha+۱)}t^{۲}\alpha,$$

شرط اولیه نیز برابر است با $u(x,۰) = x^{۲}$. جواب دقیق مسأله به‌صورت زیر می‌باشد

$$u(x,t) = x^{۲} + ۲\frac{\Gamma(\alpha+۱)}{\Gamma(۲\alpha+۱)}t^{۲}\alpha.$$



شکل ۲. منحنی جواب تقریبی به وسیله روش هم مکانی DE ALPs-Sinc با $n = ۳$، $m = ۵$ و $\alpha = ۰/۵$ (چپ)، و جواب دقیق (راست) برای مثال ۲.۳.

شکل ۲ جواب تقریبی به‌دست آمده برای $\alpha = ۰/۵$ و $m = ۵$ را با استفاده از روش مذکور به همراه جواب دقیق نمایش می‌دهد.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، از روش هم‌مکانی DE ALPs-Sinc برای حل معادله همرفت-پخش زمان-کسری با ضرایب متغیر بهره بردیم، این روش از یک ایده پایدار و قابل اطمینان استفاده می‌برد و در دو مثال بالا دقت و سرعت روش پیشنهادی مشهود است.

مراجع

1. M. M. Izadkhah and J. Saberi-Nadjafi, *Gegenbauer spectral method for time–fractional convection-diffusion equations with variable coefficients*, Math. Meth. Appl. Sci. **38** (15) (2015) 3183–3194.
2. A. Saadatmandi, M. Dehghan and M. R. Azizi, *The Sinc-Legendre collocation method for a class of fractional convection-diffusion equations with variable coefficients*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. **17** (11) (2012) 4125–4136.
3. V. S. Chelyshkov, *Alternative Jacobi polynomials and orthogonal exponentials*, (2011). `arXiv:1105.1838`
4. F. Stenger, *Handbook of Sinc Numerical Methods*, CRC Press, Boca Raton, Florida, 2011.
5. M. Sugihara and T. Matsuo, *Recent developments of the Sinc numerical methods*, J. Comput. Appl. Math. **164** (2004) 673–689.

پست الکترونیکی: faezehbahmani68@gmail.com
پست الکترونیکی: eftekhari@kashanu.ac.ir

حل معادله دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی با استفاده از ماتریس عملیاتی لژاندر

مرضیه پوربابایی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و عباس سعادتمندی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش محاسباتی مبتنی بر روش تاو و چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته برای حل معادلات دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی ارائه می‌شود. برای حل این دسته از معادلات از ماتریس عملیاتی مشتقات کسری از مرتبه توزیعی چندجمله‌ای‌های لژاندر استفاده نموده و این دسته از معادلات را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل نموده و سپس جواب را به‌دست خواهیم آورد. لازم به ذکر است که ما در انجام این فرآیند از مشتق کسری کاپوتو استفاده خواهیم کرد.
واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های لژاندر، ماتریس عملیاتی، روش تاو، مشتق کسری، معادلات کسری از مرتبه توزیعی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65L03, 65L10, 65N35.

۱. پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی اولین بار توسط کاپوتو در سال ۱۹۶۹ معرفی شد و در سال ۱۹۹۵ نیز برای حل حالت‌های خاصی از آن‌ها تکنیک‌هایی ارائه شد. این معادلات ابزار قدرتمندی برای ساخت و توصیف مدل‌هایی برای سیستم‌های دینامیک بوده و در پدیده‌های مختلفی کاربرد دارند. به همین دلیل در سال‌های اخیر مورد توجه زیادی واقع شده‌اند. بیشتر این معادلات جواب تحلیلی ندارند و بنابراین روش‌های عددی مانند روش عناصر طیفی لژاندر [۱]، روش هم‌مکانی [۵]، روش ماتریس عملیاتی [۷] و توابع بلاک پالس ترکیبی و چندجمله‌ای‌های برنولی [۴] مورد استفاده قرار گرفته شده‌اند. در این مقاله قصد داریم معادله دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی به شکل زیر را بررسی کنیم [۸].

$$D^{\rho(\alpha)}u(x,t) = K\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t),\ (x,t)\in(0,L)\times(0,T), K>0, \tag{۱}$$

با شرایط اولیه

$$u(x,0) = g_1(x),\ u_t(x,0) = g_2(x),\ x\in(0,L), \tag{۲}$$

و شرایط مرزی

$$u(0,t) = h_1(t),\ u(L,t) = h_2(t),\ t\in(0,T). \tag{۳}$$

۲. مقدمات و پیش‌نیازها

تعریف ۱.۲. مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود [۶].

$${}^{C}D_t^{\alpha}u(x,t) = \frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{\partial^n u(x,t)}{\partial \tau^n}d\tau, & n-1<\alpha<n, \\ \frac{\partial^n u(x,t)}{\partial t^n}, & \alpha = n. \end{cases}$$

* سخنران

تعریف ۲.۲. عملگر مشتق کسری از مرتبه توزیعی به صورت زیر تعریف می‌شود [۳].

$$D^{\rho(\alpha)}g(t) = \int_{d_1}^{d_2} \rho(\alpha) D_t^{\alpha} g(t) d\alpha,$$

به‌طوری‌که d_2, d_1 اعداد مثبت و $\rho(\alpha)$ تابع وزن توزیعی نامیده می‌شود که در شرایط زیر صدق می‌کند.

$$\rho(\alpha) \geq 0, \rho(\alpha) \neq 0, \int_{d_1}^{d_2} \rho(\alpha) d\alpha = W > 0.$$

لازم به ذکر است در معادله دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی $\alpha \in (1, 2)$ در نظر گرفته می‌شود.

۳. بیان روش و تقریب تابع

در این قسمت قصد داریم برای حل معادله (۱) تحت شرایط (۲) و (۳) یک روش محاسباتی ارائه دهیم. فرض کنید $P_{i,T}(t)$ چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته روی $[0, T]$ باشد. یک تابع $u(t)$ که در $[0, T]$ مربع انتگرال‌پذیر باشد را می‌توان بر اساس این چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر بسط داد:

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i P_{i,T}(t), \qquad c_i = \frac{2i+1}{T} \int_0^T u(t) P_{i,T}(t) dt, \ i = 0, 1, \ldots$$

اما در عمل تنها $n+1$ جمله از آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین می‌توان نوشت: $u(t) \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i P_{i,T}(t) = C^T \Phi_{n,T}(t)$، به‌طوری‌که

$$C = [c_0, c_1, \ldots, c_n]^T, \ \Phi_{n,T}(t) = [P_{0,T}(t), P_{1,T}(t), \ldots, P_{n,T}(t)]^T. \qquad (۴)$$

به‌طور مشابه می‌توان تابع $u(x,t), \ x \in (0, L), \ t \in (0, T)$ را برحسب چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به شکل زیر بسط داد.

$$u_{m,n}(x,t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{ij} P_{i,T}(t) P_{j,L}(x) = \Phi_{n,T}^T(t) \mathbf{A} \Phi_{m,L}(x), \qquad (۵)$$

به‌طوری‌که $\mathbf{A} = (a_{ij})$ یک ماتریس $(n+1) \times (m+1)$ بعدی است که در آن

$$a_{ij} = \left(\frac{2i+1}{T}\right)\left(\frac{2j+1}{L}\right) \int_0^T \int_0^L u(x,t) P_{i,T}(t) P_{j,L}(x) dx dt,$$

مشتق بردار $\Phi_{m,L}(x)$ را به‌صورت $\frac{d\Phi_{m,L}(x)}{dx} = \mathbf{D}^{(1)} \Phi_{m,L}(x)$ می‌توان بیان کرد [۷]، به‌طوری‌که $\mathbf{D}^{(1)}$ ماتریس عملیاتی مشتق از مرتبه $(m+1) \times (m+1)$ است. همچنین داریم $\mathbf{D}^{(k)} = (\mathbf{D}^{(1)})^k, \ k = 1, 2, \ldots$.

ما در مقاله [۷] ماتریس عملیاتی مشتق کسری از مرتبه توزیعی چندجمله‌ای‌های لژاندر را به صورت زیر به‌دست آورده‌ایم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\Phi_{n,T}(t)$ مطابق رابطه (۴) تعریف شود. در این صورت [۷]

$$D_t^{\rho(\alpha)} \Phi_{n,T}(t) \simeq \widehat{\mathbf{D}}^{(d_1, d_2, \rho(\alpha))} \Phi_{n,T}(t),$$

به‌طوری‌که $\widehat{\mathbf{D}}^{(d_1,d_2,\rho(\alpha))}$ ماتریس عملیاتی لژاندر انتقال یافته از مشتق کسری مرتبه توزیعی است که به صورت زیر داده می‌شود.

$$\widehat{\mathbf{D}}^{(d_1,d_2,\rho(\alpha))} \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu(\lceil d_2\rceil,0) & \mu(\lceil d_2\rceil,1) & \cdots & \mu(\lceil d_2\rceil,n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mu(n,0) & \mu(n,1) & \cdots & \mu(n,n) \end{pmatrix},$$

و

$$\mu(i,\ell) = (2\ell+1)\sum_{k=\lceil d_2\rceil}^{i}\sum_{q=1}^{S}\sum_{r=0}^{\ell}\left(\frac{(-1)^{i+k+\ell+r}(i+k)!(\ell+r)!w_q\rho(\sigma_q)T^{-\sigma_q}}{(i-k)!(k!)\Gamma(1+k-\sigma_q)(\ell-r)!(r!)^2(k-\sigma_q+r+1)}\right).$$

و $\ell = 0,\ldots,n,\ i = \lceil d_2\rceil,\ldots,n$ و σ_q و w_q به‌ترتیب نقاط و وزن‌های کودراتور گاوس لژاندر هستند.

مشابه رابطه (۵) تابع معلوم $f(x,t)$ را می‌توان به صورت $f(x,t) \simeq \Phi_{n,T}^T(t)\mathbf{F}\Phi_{m,L}(x)$, تعریف کرد. همچنین با استفاده از رابطه (۵) و قضیه ۱.۳ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \rho(\alpha)D_t^\alpha u(x,t)d\alpha &\simeq \left(\int_1^2 \rho(\alpha)D_t^\alpha \Phi_{n,T}^T(t)d\alpha\right)\mathbf{A}\Phi_{m,L}(x)\\ &= \Phi_{n,T}^T(t)\left(\widehat{D}^{(1,2,\rho(\alpha))}\right)^T\mathbf{A}\Phi_{m,L}(x),\end{aligned}$$

از طرفی داریم: $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \simeq \Phi_{n,T}^T(t)\mathbf{A}\mathbf{D}^2\Phi(x)$, بنابراین می‌توان برای معادله (۱) تابع باقیمانده را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned}Res_{m,n}(x,t) &= \Phi_{n,T}^T(t)\left[\left(\widehat{D}^{(1,2,\rho(\alpha))}\right)^T\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{D}^2 - \mathbf{F}\right]\Phi_{m,L}(x)\\ &= \Phi_{n,T}^T(t)\mathbf{R}\Phi_{m,L}(x),\end{aligned}$$

به‌طوری‌که $\mathbf{R} = \left(\widehat{D}^{(1,2,\rho(\alpha))}\right)^T\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{D}^2 - \mathbf{F}$.

با استفاده از روش تاو تعداد $(m-1)\times(n-1)$ معادله جبری به صورت زیر تولید می‌شود که

$$R_{ij} = 0,\ i = 0,\ldots,n-2,\ j = 0,\ldots,m-2. \qquad (۶)$$

از طرفی با جای‌گزینی معادله (۵) در شرایط مرزی و اولیه داریم:

$$\Phi_{n,T}^T(0)\mathbf{A}\Phi_{m,L}(x) = g_1(x), \qquad x\in(0,L), \qquad (۷)$$

$$\Phi_{n,T}^T(0)\mathbf{D}^T\mathbf{A}\Phi_{m,L}(x) = g_2(x), \qquad x\in(0,L), \qquad (۸)$$

$$\Phi_{n,T}^T(t)\mathbf{A}\Phi_{m,L}(0) = h_1(t), \qquad t\in(0,T), \qquad (۹)$$

$$\Phi_{n,T}^T(t)\mathbf{A}\Phi_{m,L}(L) = h_2(t), \qquad t\in(0,T), \qquad (۱۰)$$

حال m ریشه چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_{m,L}(x)$ را در معادلات (۷) و (۸) و n ریشه چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $P_{n,T}(t)$ در معادلات (۹) و (۱۰) جای‌گذاری می‌کنیم. با ترکیب معادلات (۶) - (۱۰) به تعداد $(n+1)\times(m+1)$ معادله جبری می‌رسیم که با حل آن‌ها تعداد $(n+1)(m+1)$ ضریب مجهول a_{ij} به‌دست خواهند آمد.

۴. دست‌آوردهای پژوهش

مثال ۱.۴. معادله دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی زیر را در نظر بگیرید [۲].

$$\begin{cases} \int_{۱}^{۲} \Gamma(۵-\alpha) D_t^{\alpha} u(x,t) d\alpha = \dfrac{\partial^{۲} u(x,t)}{\partial x^{۲}} + f(x,t), & x \in (۰,\pi), t \in (۰,۰/۵), \\ u(x,۰) = ۰,\ u_t(x,۰) = ۰, & x \in (۰,\pi), \\ u(۰,t) = ۰,\ u(\pi,t) = ۰, & t \in (۰,۰/۵), \end{cases}$$

که در آن $f(x,t) = ۱۶\left(\dfrac{۲۴(t^{۳}-t^{۲})}{\ln(t)} + t^{۴}\right)\sin(x)$ و جواب دقیق این معادله به‌صورت $u(x,t) = ۱۶t^{۴}\sin(x)$ است.

جدول ۱. نرم دو خطا برای $n = ۴, S = ۵$ و مقادیر مختلف m برای مثال ۱.۴.

m	۲	۴	۶	۸	۱۰
نرم دو خطا	$۱/۲۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۲/۶۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۴۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۷۱ \times ۱۰^{-۸}$	$۴/۹۹ \times ۱۰^{-۹}$

در جدول ۱ نرم دو خطا برای مقادیر $n = ۴, S = ۵$ و مقادیر مختلف m برای مثال ۱.۴ گزارش شده است. مشاهده می‌کنیم که با افزایش m مقدار نرم دو خطا کاهش می‌یابد.
همچنین نمودار سمت راست شکل ۱ نمودار خطای مطلق برای $m = ۱۲, n = ۴, S = ۶$ را نمایش می‌دهد.

مثال ۲.۴. معادله دیفرانسیل موج کسری از مرتبه توزیعی زیر را در نظر بگیرید [۸].

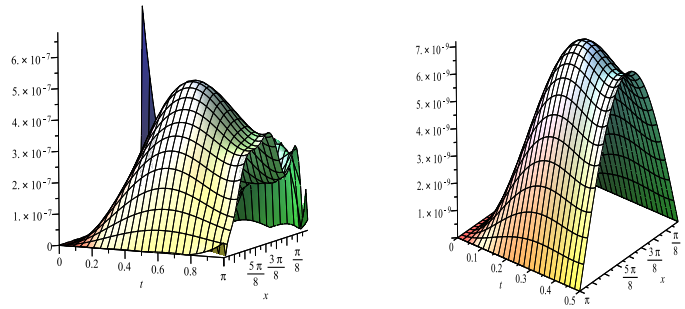
$$\begin{cases} \int_{۱}^{۲} \Gamma(۴-\alpha) D_t^{\alpha} u(x,t) d\alpha = \dfrac{\partial^{۲} u(x,t)}{\partial x^{۲}} + f(x,t), & x \in (۰,\pi),\ t \in (۰,۱), \\ u(x,۰) = ۴\sin(x),\ u_t(x,۰) = ۲\sin(x), & x \in (۰,\pi), \\ u(۰,t) = u(\pi,t) = ۰, & t \in (۰,۱), \end{cases}$$

که در آن $f(x,t) = \sin(x)\left(t^{۳} + ۲t + ۴ + \dfrac{۶t^{۲}-۶t}{\log(t)}\right)$ جواب دقیق این معادله به صورت $u(x,t) = (t^{۳} + ۲t + ۴)\sin(x)$ است.

جدول ۲. نرم دو خطا برای $n = ۳, S = ۵$ و مقادیر مختلف m برای مثال ۲.۴.

m	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
نرم دو خطا	$۲/۵۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۸/۳۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۶۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۱۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۷/۶۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۲۶ \times ۱۰^{-۷}$

در جدول ۲ نرم دو خطا برای مقادیر $n = ۳, S = ۵$ و مقادیر مختلف m برای مثال ۲.۴ گزارش شده است. مشاهده می‌کنیم که با افزایش m مقدار نرم دو خطا کاهش می‌یابد. همچنین نمودار سمت چپ شکل ۱ نمودار خطای مطلق برای $m = ۱۰, n = ۴, S = ۸$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱. شکل راست نمودار خطای مطلق برای مثال (۱.۴) به ازای $m = ۱۲$، $n = ۴, S = ۶$ و شکل چپ نمودار خطای مطلق برای مثال (۲.۴) به ازای $m = ۱۰, n = ۴, S = ۸$.

مراجع

1. M. Dehghan and M. Abbaszadeh, *A Legendre spectral element method (SEM) based on the modified bases for solving neutral delay distributed-order fractional damped diffusion-wave equation*, Math. Methods Appl. Sci. **41** (2018) 3476–3494.
2. G. Gao and Z. Sun, *Two difference schemes for solving the one-dimensional time distributed-order fractional wave equations*, Numer. Algorithms **74** (2017) 675–697.
3. Z. Jiao , Y. Chen and I. Podlubny , *Distributed-Order Dynamic Systems: Stability, Simulation, Applications and Perspectives*, Springer, New York, 2012 .
4. S. Mashayekhi and M. Razzaghi, *Numerical solution of distributed order fractional differential equations by hybrid functions*, J. Comput. Phys. **315** (2016) 169–181.
5. M. Morgado, M. Rebelo, L. Ferrás and N. Ford, *Numerical solution for diffusion equations with distributed order in time using a Chebyshev collocation method,* Appl. Numer. Math. **114** (2017) 108–123.
6. I. Podulbny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999 .
7. M. Pourbabaee and A. Saadatmandi, *A novel Legendre operational matrix for distributed order fractional differential equations*, Appl. Math. Comput. **361** (2019) 215–231.
8. H. Ye, F. Liu and V. Anh, *Compact difference scheme for distributed-order time-fractional diffusion-wave equation on bounded domains,* J. Comput. Phys. **298** (2015) 652–660.

پست الکترونیکی: m.pourbabaee@kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: saadatmandi@kashanu.ac.ir

یک روش حجم محدود برای حل معادله پخش با مشتقات کسری

حسین پوربشاش*
دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه گرمسار، گرمسار، ایران
و محمود خاکسار عشاق
موسسه تحقیقات ریاضی دکتر مصاحب، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده. یک روش عددی برای حل معادله مشتقات جزئی پخش که در زمان و مکان شامل مشتقات کسری است ارائه شده است. روش ارائه شده بر مبنای حجم محدود است. در این روش مشتقات کسری مکانی با استفاده از روش حجم محدود گسسته شده است. دستگاه حاصل از این گسسته‌سازی یک دستگاه قطر ثابت است که برای حل سریع آن از الگوریتم لوینسون-دربین استفاده شده است. نتایج عددی حکایت از همگرایی و کارایی طرح ارائه شده دارد.

واژه‌های کلیدی: معادله پخش کسری، روش حجم محدود، الگوریتم لوینسون-دربین.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35R11, 60G22.

۱. پیش‌گفتار

محققان بر این باور هستند که معادلات پخش کسری مدل بهتری برای بسیاری از پدیده‌های پخش مواد هستند. به ازای $0 < \beta < 1$ و $0 < \alpha < 1$ شکل کلی آن به شکل زیر است [۳]:

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad & {}_0D_t^{\alpha}U - \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega(x,t)\left(\kappa\, {}_aD_x^{1-\beta} + (1-\kappa)\, {}_xD_b^{1-\beta}\right)U\right) \\
& = b(x,t), \quad (x,t) \in (a,b)\times(0,T], \\
(2) \qquad & U(x,0) = u_0(x),\ a \le x \le b, \\
& U(a,t) = 0,\ U(b,t) = 0, \quad 0 \le t \le T.
\end{aligned}
$$

در این‌جا $b(x,t)$ تابع سورس یا منبع است و $\omega(x,t)$ نیز تابع ضریب انتشار است و $0 \le \kappa \le 1$ نوعی تابع وزن نسبی بین احتمال انتقال پیشرو و پسرو است. در این مسئله از مشتق کاپوتو استفاده شده است. منظور از ${}_aD_x^{1-\beta} := {}_aJ_x^{\beta}D$ و ${}_xD_b^{1-\beta} := {}_xJ_b^{\beta}D$ همان مشتق کاپوتو چپ و راست از مرتبه $1-\beta$ هستند. عملگر D مشتق معمولی است و ${}_aJ_x^{\beta}$ و ${}_xJ_b^{\beta}$ عملگرهای انتگرال کسری استاندارد هستند. ${}_0D_t^{\alpha}$ مشتق کاپوتو از مرتبه α و برحسب زمان است. در واقع این مشتقات کسری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
{}_xD_b^{1-\beta}U(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_x^b (x-z)^{\beta-1}\frac{\partial}{\partial z}U(z,t)dz, \\
{}_aD_x^{1-\beta}U(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-z)^{\beta-1}\frac{\partial}{\partial z}U(z,t)dz, \\
{}_0D_t^{\alpha}U(x,t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}\frac{\partial}{\partial \tau}U(x,\tau)d\tau.
\end{aligned}
$$

۲. روش حجم محدود

مسئله را در بعد زمان گسسته‌سازی می‌کنیم تا طرح نیمه گسسته معادله حاصل شود. بدین منظور ابتدا بازه زمانی را به زیر بازه‌های با طول گام $\Delta t = \frac{T}{K}$ تقسیم می‌کنیم. پس قرار دهید $t_k = k\Delta t,\ k = 0, 1, \ldots, K$.

* سخنران

اکنون می‌توان مشتق کسری بر حسب زمان در سمت چپ معادله را به صورت زیر گسسته کرد [۱]:

$$ {}_{0}D_t^{\alpha}U(x,t_{k+1}) \simeq \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{U(x,t_{k+1-j})-U(x,t_{k-j})}{(\Delta t)^{\alpha}}d_j. \tag{۳}$$

که در آن $d_j=(j+1)^{1-\alpha}-j^{1-\alpha}$. معادله را به ازای $t=t_{k+1}$ در نظر بگیرید و تقریب عددی (۳) را جای‌گذاری کنید. داریم:

$$\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{j=0}^{k}\frac{U(x,t_{k+1-j})-U(x,t_{k-j})}{(\Delta t)^{\alpha}}d_j-$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega(x,t_{k+1})\left(\kappa\ {}_{a}D_x^{1-\beta}+(1-\kappa)\ {}_{x}D_b^{1-\beta}\right)U(x,t_{k+1})\right)=b(x,t_{k+1}),$$

با در نظر گرفتن $U^k(x)=U(x,t_k)$ یک بازآرایی از مجموع سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$U^{k+1}(x)-\alpha_0\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{k+1}(x)\left(\kappa\ {}_{a}D_x^{1-\beta}+(1-\kappa)\ {}_{x}D_b^{1-\beta}\right)U^{k+1}(x)\right)$$
$$=(1-d_1)U^k(x)+\sum_{j=1}^{k-1}(d_j-d_{j+1})U^{k-j}(x)+d_k u_0(x)+\alpha_0 b^{k+1}(x), \tag{۴}$$

که در آن $\alpha_0=\Gamma(2-\alpha).(\Delta t)^{\alpha}$. اکنون یک شبکه یکنواخت روی بازه $\Omega=[a,b]$ با طول گام $h=\frac{b-a}{N+1}$ در نظر بگیرید که $x_j=jh,\ k=0,1,\dots,N+1$. همچنین نقاط میانی به‌صورت $x_{j-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(x_{j-1}-x_j)$ هستند. این تقسیم بندی تعداد N حجم کنترلی به صورت $\Omega_j=(x_{j-\frac{1}{2}}-x_{j+\frac{1}{2}})$ را در اختیار ما می‌گذارد. صورت انتگرالی معادله (۴) با انتگرال گیری روی Ω به دست می‌آید. تحدید آن روی سلول j-اُم به شکل زیر است.

$$\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}U^{k+1}(x)dx-\alpha_0\left[\omega^{k+1}(x)\left(\kappa\ {}_{a}J_x^{-\beta}+(1-\kappa)\ {}_{x}J_b^{-\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x}U^{k+1}(x)\right]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\hat{d}_l\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}U^l(x)dx+\alpha_0\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}b^{k+1}(x)dx, \tag{۵}$$

در این‌جا $\hat{d}_l$ ضریب مربوط به U^l در معادله (۴) است. اکنون می‌خواهیم تقریبی از تابع جواب را در فضای توابع تکه‌ای خطی پیوسته

$$V_{h,0}=\{v: v\in\mathcal{C}^0(\Omega),\ v|_{\Omega_i}\in\mathcal{P}_1(\Omega_i),\ v(a)=v(b)=0\},$$

در نظر بگیریم. در این تعریف منظور از $\mathcal{C}^0$ فضای توابع تکه‌ای پیوسته و منظور از $\mathcal{P}_1(\Omega_i)$ فضای توابع چندجمله‌ای حداکثر از درجه یک روی بازه Ω_i است. توابع پایه‌ای فضا به شکل زیر است:

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\frac{x_{i+1}-x}{h}, & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \frac{x_{i+1}-x}{h}, & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}.$$

لذا اگر تقریب مورد نظر را با u_h نشان دهیم، داریم:

$$U(x,t_k)\simeq u_h(x,t_k)=\sum_{i=1}^{N}u_i^k\varphi_i(x). \tag{۶}$$

با جای‌گذاری تقریب (۶) در معادله (۵) داریم:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i^{k+1}\left[\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\varphi_i(x)dx-\alpha_0\left[\omega^{k+1}(x)\left(\kappa\ {}_aJ_x^{-\beta}+(1-\kappa)\ {}_xJ_b^{-\beta}\right)\frac{\partial}{\partial x}\varphi_i(x)\right]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\right]$$
$$=\sum_{l=0}^{k}\sum_{i=1}^{N}\hat{d}_l u_i^l\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\varphi_i(x)dx+\alpha_0\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}b^{k+1}(x)dx.$$

این معادلات را می‌توان به شکل ماتریسی $\mathbf{Au}=\mathbf{c}$ نوشت. در واقع داریم:

$$(M-\alpha_0 S^{k+1})\mathbf{u}^{k+1}=M\sum_{l=0}^{k}\hat{d}_l\mathbf{u}^l+\alpha_0\mathbf{b}^{k+1}.$$

در این‌جا ماتریس جرم و ماتریس سختی به ترتیب با درایه‌های زیر تعریف می‌شوند:

$$M_{i,j}=\int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}\varphi_i(x)dx,\qquad S_{i,j}^k=\left[\omega(x,t_k)\left(\kappa\ {}_aJ_x^{\beta}+(1-\kappa)\ {}_xJ_b^{\beta}\right)\varphi_i'(x)\right]_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}}.$$

ماتریس جرم یک ماتریس نواری سه قطری به صورت $M=\frac{h}{6}\text{tridiag}(1,4,1)$ است. توجه کنید که محمل تابع $\varphi_i'(x)$ روی بازه $[x_{i-1},x_{i+1}]$ است. اما محمل ${}_aJ_x^{\beta}\varphi_i'(x)$ روی $[x_{i-1},b]$ و محمل ${}_xJ_b^{\beta}\varphi_i'(x)$ روی بازه $[a,x_{i+1}]$ است. باتوجه به اجتماع محمل‌ها که کل بازه $[a,b]$ را می‌پوشاند، ماتریس سختی یک ماتریس پر است که این محل تفاوت محاسبات کسری با محاسبات مشتقات معمولی است. می‌توان با بررسی دقیق ساختار ماتریس سختی حتی‌الامکان هزینه محاسباتی را پایین آورد. از طرفی $\varphi_i'(x)$ یک تابع تکه‌ای ثابت است. پس عبارت‌های ${}_aJ_x^{\beta}\varphi_i'(x)$ و ${}_xJ_b^{\beta}\varphi_i'(x)$ به ازای همه نقاط میانی $x_{j+\frac{1}{2}}$ به صورت دقیق قابل محاسبه هستند. با تعریف $W_{j\pm\frac{1}{2}}^{k+1}=\omega(x_{j\pm\frac{1}{2}},t_k)$، صورت کلی ماتریس سختی به شکل زیر است:

$$S^k=\text{diag}[W_{i-\frac{1}{2}}^k]Z^1+\text{diag}[W_{i+\frac{1}{2}}^k]Z^2.$$

همچنین با فرض $C(h,\beta)=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)h^{1-\beta}}$ مقادیر $Z_{i,j}^1$ و $Z_{i,j}^2$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}
Z_{i,j}^1=C(h,\beta)(1-\kappa)[2(i-j-\frac{1}{2})^{\beta}-(i-j-\frac{3}{2})^{\beta}-(i-j+\frac{1}{2})^{\beta}],\\
Z_{i,j}^2=C(h,\beta)(1-\kappa)[2(i-j+\frac{1}{2})^{\beta}+(i-j+\frac{3}{2})^{\beta}+(i-j-\frac{1}{2})^{\beta}], & j-i\le -2\\
\\
Z_{i,j}^1=C(h,\beta)[(2-\kappa)(\frac{1}{2})^{\beta}-(1-\kappa)(\frac{3}{2})^{\beta}],\\
Z_{i,j}^2=C(h,\beta)(1-\kappa)[(\frac{1}{2})^{\beta}+(\frac{5}{2})^{\beta}-2(\frac{3}{2})^{\beta}], & j-i=-1\\
\\
Z_{i,j}^1=C(h,\beta)[\kappa(\frac{3}{2})^{\beta}-(1+\kappa)(\frac{1}{2})^{\beta}],\\
Z_{i,j}^2=C(h,\beta)[(1-\kappa)(\frac{3}{2})^{\beta}-(2-\kappa)(\frac{1}{2})^{\beta}], & i=j\\
\\
Z_{i,j}^1=C(h,\beta)\kappa[(\frac{5}{2})^{\beta}-2(\frac{3}{2})^{\beta}+(\frac{1}{2})^{\beta}],\\
Z_{i,j}^2=C(h,\beta)[(1+\kappa)(\frac{1}{2})^{\beta}-\kappa(\frac{3}{2})^{\beta}], & j-i=1\\
\\
Z_{i,j}^1=C(h,\beta)\kappa[-2(j-i+\frac{1}{2})^{\beta}+(j-i+\frac{3}{2})^{\beta}+(j-i-\frac{1}{2})^{\beta}],\\
Z_{i,j}^2=C(h,\beta)(1-\kappa)[2(j-i-\frac{1}{2})^{\beta}-(j-i-\frac{3}{2})^{\beta}-(j-i+\frac{1}{2})^{\beta}], & j-i\ge 2
\end{cases}.$$

مقادیر درایه‌های Z^1 و Z^2 تنها به مقدار اختلاف $j-i$ وابسته است و نه مقدار i یا j. این ماتریسها به ازای هر h و β، قطر-ثابت است. بنابراین ماتریس ضرایب دستگاه حاصل نیز قطر ثابت خواهد بود و برای ذخیره آن تنها ذخیره $2N-1$ درایه کفایت می‌کند.

۳. حل دستگاه حاصل از روش حجم متناهی

فرض کنید ساختار ماتریس ضرایب در $\mathbf{A}\mathbf{u}^k = \mathbf{c}$ به شکل زیر باشد:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & a_{1-N} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots & a_{2-N} \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_{3-N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N-1} & a_{N-2} & a_{N-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

الگوریتم لوینسون–دربین در دو مرحله انجام می‌پذیرد. در مرحله اول دو بردار پیشرو و پسرو ساخته می‌شود. بردار پسرو در مرحله دوم برای ساختن جواب به کار می‌رود. بردار پیشرو با اندازه n با نماد $\mathbf{f}^{(n)}$ در معادله $\mathbf{A}_n\mathbf{f}^{(n)} = \mathbf{e}_1$ صدق می‌کند. $\mathbf{A}_n$ زیرماتریس پیشروی اصلی $n \times n$ از ماتریس A است. بردار پسرو با نماد $\mathbf{b}^{(n)}$ در معادله $\mathbf{A}_n\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{e}_n$ صدق می‌کند. در ابتدای فرایند داریم $\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{b}^{(1)} = [\frac{1}{a_0}]$. فرض کنید بردار پسرو و پیشرو با اندازه $n-1$ در دست است. سپس برای ساختن n-اُمین بردارها بردار پسرو را با اضافه کردن یک صفر به انتها گسترش می‌دهیم و بردار پسرو را نیز با اضافه کردن صفر به ابتدای بردار توسیع می‌دهیم.

$$\mathbf{A}_n \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_n \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_n \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ p_n \end{bmatrix},$$

که در آن $p_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_{N-i}\mathbf{f}_i^{(n-1)}$ و $q_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_{-i}\mathbf{b}_i^{(n-1)}$.

اکنون از دو بردار حاصل شده به عنوان پایه‌ای برای ساخت بردارهای پسرو و پیشرو با بعد بالاتر استفاده می‌کنیم. در واقع داریم

$$\mathbf{A}_n \left(\alpha \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(n-1)} \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b}^{(n-1)} \end{bmatrix} \right) = \alpha \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ p_n \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} q_n \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix}. \tag{۷}$$

کافی است ضرایب α و β را طوری انتخاب کنیم که بردار سمت راست برابر با $\mathbf{e}_1$ یا $\mathbf{e}_n$ در بعد n شود. در این صورت عبارت داخل پرانتز سمت چپ (۷) همان بردار پیشرو یا پسرو با بعد بالاتر خواهد بود. سطرهای صفر اضافی در معادله را حذف می‌کنیم و داریم:

$$\begin{bmatrix} q_n & 1 \\ 1 & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_b^n & \alpha_f^n \\ \beta_b^n & \beta_f^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

کافی است قاعده کرامر را برای حل این دستگاه ماتریسی به کار ببرید و در نهایت فرمول نهایی بردارهای پسرو و پیشرو را به‌دست آورید. با در دست داشتن بردارهای پسرو وارد مرحله دوم الگوریتم لوینسون–دوربین می‌شویم. جواب دستگاه را نیز می‌توان با فرایندی بازگشتی مشابه بردار پسرو تولید کرد. اگر بردارهای میانی با اندازه $1 \le n \le N$ را با $u^{(n)}$ نمایش دهیم، جواب واقعی $u^{(N)} = \mathbf{u}^k$ مورد نظر است. باز هم بردار جواب را با اضافه کردن صفر گسترش می‌دهیم در این‌جا از بردار پسرو مرحله n-اُم استفاده می‌کنیم تا جمله باقیمانده r_n را حذف کنیم و مقدار درایه c_n را جایگزین کنیم. دقت کنید که $\mathbf{A}_n\mathbf{b}^{(n)} = \mathbf{e}_n$. پس می‌توان نوشت:

$$\mathbf{A}_n \left(\begin{bmatrix} u_1^{n-1}, u_2^{n-1}, \ldots, u_{n-1}^{n-1}, 0 \end{bmatrix}^t + (c_n - q_n)\mathbf{b}^{(n)} \right) = \begin{bmatrix} c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n \end{bmatrix}^t.$$

با ادامه این فرایند تا N مرحله در نهایت جواب دستگاه مورد نظر حاصل می‌شود. در مرجع [۲] هزینه محاسباتی این الگوریتم $O(N \log N)$ ذکر شده است.

۴. نتایج عددی

در این بخش با یک مثال عددی نشان می‌دهیم که روش ارائه شده در بعد زمان و مکان همگرایی مناسبی دارد. کلیه نتایج عددی این بخش با استفاده برنامه‌ای که با متلب $R۲۰۱۷b$ نوشته شده است، به‌دست آمده است. برنامه مورد نظر با یک رایانه شخصی با پردازنده $Core\ i۵$ (۳٫۶ GHz) و حافظه دستیابی تصادفی (RAM) هشت گیگابایتی اجرا شده است.

مثال ۱.۴. در این مثال مسئله (۱) با شرایط (۲) را با پارامتر $\kappa = ۰٫۵$ در بازه $[-۲,۲]$ در نظر بگیرید. تابع ضریب انتشار را $w(x,t) = ۲$ در نظر بگیرید. مرتبه مشتقات کسری زمانی و مکانی را نیز $\alpha = \beta = ۰٫۵$ در نظر بگیرید. تابع سورس $b(x,t)$ را چنان در نظر می‌گیریم که جواب دقیق این مسئله به صورت $U(x,t) = t^۲(x-a)^۲(x-b)^۲$ باشد. خطاها در نرم دو و بی‌نهایت در زمان نهایی $T = ۱$ در جدول ۱ گزارش شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد با کاهش گام زمانی به ازای گام مکانی ثابت و همچنین بالعکس با کاهش گام مکانی به ازای گام زمانی ثابت، خطای روش در حال کاهش است که همگرایی طرح‌های گسسته‌سازی مورد نظر در بعد زمان و مکان معادله را می‌رساند.

جدول ۱. خطای نتایج عددی حاصل از روش حجم محدود برای مثال ۱ به ازای گام مکانی و زمانی مختلف.

h	Δt	$\|U^* - U\|_۲$	$\|U^* - U\|_\infty$
$۲^{-۴}$	$۲^{-۱۱}$	$۲٫۴۲۹۳e-۲$	$۶٫۶۱۷۸e-۲$
$۲^{-۵}$	$۲^{-۱۰}$	$۷٫۳۰۷۵e-۳$	$۲٫۴۸۰۷e-۲$
$۲^{-۶}$	$۲^{-۱۰}$	$۱٫۳۸۰۷e-۳$	$۵٫۹۵۰۳e-۳$
$۲^{-۷}$	$۲^{-۱۰}$	$۴٫۱۱۸۶e-۴$	$۹٫۲۹۱۸e-۴$
$۲^{-۹}$	$۲^{-۵}$	$۱٫۱۹۰۵e-۲$	$۸٫۲۷۰۲e-۲$
$۲^{-۹}$	$۲^{-۶}$	$۸٫۰۱۶۲e-۳$	$۲٫۴۳۹۱e-۲$
$۲^{-۹}$	$۲^{-۷}$	$۴٫۵۲۱۸e-۳$	$۷٫۲۸۵۱e-۳$
$۲^{-۹}$	$۲^{-۸}$	$۹٫۵۳۰۷e-۴$	$۱٫۸۳۳۷e-۳$

مراجع

1. M. Lin and C. J. Xu, *Finite difference/spectral approximations for the time-fractional diffusion equation,*, J. Comput. Phys. **225** (2007) 1533–1552.
2. M. K. Ng, *Iterative Methods for Toeplitz Systems*, Numerical mathematics and scientific computation, Oxford University Press, New York, 2004.
3. H. Fu, Y. Sun, H. Wang and X. Zheng, *Stability and convergence of a Crank–Nicolson finite volume method for space fractional diffusion equations*, Appl. Num. Math. **139** (2019) 38–51.

پست الکترونیکی: h.pourbashash@ugsr.ir
پست الکترونیکی: mkhaksar@aut.ac.ir

بررسی حل عددی مدل ریاضی رفتارهای بشری هنگام مواجهه با یک فاجعه به صورت یک مدل اپیدمی از نوع مشتقات معمولی و کسری

اعظم حجازی نوقابی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
و علیرضا سهیلی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران

چکیده. در چند دهه اخیر، مدل‌های ریاضی جهت پیش‌بینی و کنترل رفتارهای انسانی در زمینه اپیدمیولوژی ریاضی توسعه فراوانی یافته است. یکی از این مدل‌های اپیدمی که بر روی رفتارهای بشری پیاده شده است، سیستم PCR است. این مدل جهت فهم بهتر و پیش‌بینی دقیق‌تر رفتارهای انسانی هنگام مواجهه با یک فاجعه طبیعی یا غیرطبیعی در نظر گرفته شده است. در مقاله پیش رو، ضمن معرفی مدل کسری PCR، به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل کسری، آن را به روش عددی آدامز-بشفورث-مولتون کسری نیز حل نموده ایم. پس از مقایسه نتایج حاصل از حل دستگاه کسری به روش آدامز-بشفورث-مولتون در حالت حدی و مقایسه آن با حل عددی دستگاه غیرکسری به روش رانگ کوتای مرتبه چهار و روش آدامز-بشفورث-مولتون، به این نتیجه رسیدیم که نتایج حاصل از حل عددی دستگاه مرتبه کسری دقیق‌تر می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: دستگاه PCR، روش رانگ کوتا مرتبه ۴، روش آدامز-بشفورث-مولتون (ABM)، روش آدامز-بشفورث-مولتون کسری $(FABM)$.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A08, 97N40, 97M70.

۱. پیش‌گفتار

در اساس‌نامه سازمان جهانی بهداشت (WHO)[1] سلامت عبارت است از حالت آسودگی کامل از نظر جسمی، روانی و اجتماعی و تنها به نبود بیماری یا ناتوانی اطلاق نمی‌شود. با وجود این‌که در هنگام وقوع یک فاجعه، سلامت افراد از هر سه نظر جسمی، روانی و اجتماعی به خطر می‌افتد، ولی متاسفانه مشاهده می‌شود که توجه به دو بعد روانی و اجتماعی سلامت، تا حد زیادی به‌وسیله متولیان نظام سلامت و سران کشورها نادیده گرفته می‌شود. در همین راستا، امروزه دانشمندان علوم مختلف، با ابزارهای مختلف به بررسی جنبه‌های مختلف اثر وقوع یک فاجعه بر بعد روانی و اجتماعی فرد و جامعه می‌پردازند. یکی از این ابزارها، مدل‌سازی می‌باشد. مدل‌سازی به ما کمک می‌کند تا پیش‌بینی بهتر و دقیق‌تری از بازخوردهای افراد هنگام وقوع فاجعه و نحوه سرایت عاطفی رفتارها داشته باشیم تا بتوانیم اقدامات مداخله‌ای بهتری را برای قبل و پس از وقوع فجایع برنامه‌ریزی کنیم. دستگاه $PCR\ (Panic - Control - Reflex)$، یک مدل ریاضی، برای درک واکنش‌های رفتاری افرادی است که با حوادث فاجعه‌بار مواجه هستند. این دستگاه برای اولین بار توسط کانتین و همکارانش در سال ۲۰۱۶ ارائه گردید [۱]. در این مدل، افراد به پنج گروه رفتاری تقسیم می‌شوند. افراد با رفتار وحشت با نماد p، افراد با رفتار کنترل با نماد c، افراد با رفتار بازتابی با نماد r، افراد با رفتارهای اولیه با نماد q و افرادی که به رفتار اولیه خود بازگشته‌اند با نماد b نشان داده شده است. سه رفتار بازتابی، کنترل و وحشت همه به‌طور هم‌زمان اتفاق نمی‌افتند و مطابق با یک نظم خاص پیش می‌روند. در واقع، اولین رفتار یک فرد در مواجهه با خطر، بازتابی است که به دنبال آن و در مرحله دوم، رفتار کنترل شده یا وحشت اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، فرض می‌کنیم که تعامل بین این سه گروه رفتاری می‌تواند از طریق تقلید و فرآیندهای واگیردار عاطفی تحقق یابد. در حقیقت، کاملاً مشهود است که در یک جمعیت، ادراک وضعیت عاطفی در ناظر، باعث تقلید خودکار از آن حالت می‌شود. امروزه، محققان برای مطالعه مدل اپیدمی از دستگاه معادلات کسری استفاده می‌کنند (برای مثال [۳، ۵، ۷]). زیرا دستگاه معادلات

* سخنران

[1] World Health Organization

کسری نسبت به دستگاه مرتبه صحیح مزیت‌های زیادی دارد. برای مثال، دستگاه معادلات مرتبه صحیح حالت خاصی از دستگاه مرتبه کسری (حالت $\alpha = ۱$) می‌باشد. به عبارتی دستگاه مرتبه کسری جامع‌تر بوده و همه وضعیت‌های سیستم را در نظر می‌گیرد. در این مقاله، ضمن معرفی مدل کسری PCR، نامنفی بودن جواب‌ها و پایداری نقطه تعادل این دستگاه اثبات شده است. همچنین دستگاه مرتبه کسری را به روش آدامز-بشفورث-مولتون کسری ($FABM$) حل کرده و نتایج عددی را در حالت $\alpha = ۱$ با نتایج عددی دستگاه مرتبه صحیح به روش‌های رانگ‌کوتای مرتبه چهار ($RK-۴$) و آدامز-بشفورث-مولتون (ABM) مقایسه می‌نماییم.

۲. مدل ریاضی PCR

همان‌طور که گفته شد، مدل ریاضی PCR افراد را به پنج دسته رفتاری تقسیم می‌کند که با معادلات زیر معرفی می‌شوند:

(۱)
$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \gamma(t)q(۱ - \frac{r}{r_m}) - (B_۱ + B_۲)r + s_۱(t)c + s_۲(t)p + F(r,c)rc + G(r,p)rp, \\ \frac{dc}{dt} = -\varphi(t)c(۱ - b) + B_۱r + C_۱p - C_۲c - s_۱(t)c - F(r,c)rc + H(c,p)cp, \\ \frac{dp}{dt} = B_۲r - C_۱p + C_۲c - s_۲(t)p - G(r,p)rp - H(c,p)cp, \\ \frac{dq}{dt} = -\gamma(t)q(۱ - \frac{r}{r_m}), \\ \frac{db}{dt} = \varphi(t)c(۱ - b). \end{cases}$$

که توابع F، G و H توابع مقدار حقیقی تعریف شده روی $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F(r,c) = -\alpha_۱ f_۱(\frac{r}{c+\epsilon}) + \alpha_۲ f_۲(\frac{c}{r+\epsilon}),$$
$$G(r,p) = -\delta_۱ g_۱(\frac{r}{p+\epsilon}) + \delta_۲ g_۲(\frac{p}{r+\epsilon}),$$
$$H(c,p) = \mu_۱ h_۱(\frac{c}{p+\epsilon}) - \mu_۲ h_۲(\frac{p}{c+\epsilon}),$$

ϵ یک مقدار مثبت است و f_i, g_i, h_i که $i = ۱, ۲$ توابع مقدار حقیقی تعریف شده روی $\mathbb{R}$ هستند که بیانگر فرآیند تقلید بین گروه‌های رفتاری می‌باشند [۲]. از آن‌جایی‌که فرآیند تقلید می‌تواند دو طرفه و متقارن باشد، لذا این توابع به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$۰ \leq f_i(s) \leq ۱, ۰ \leq g_i(s) \leq ۱, ۰ \leq h_i(s) \leq ۱, \forall s \in \mathbb{R}.$$

شرایط اولیه را بدین‌گونه برای هر یک از متغیرها در نظر می‌گیریم:

(۲)
$$(r(t_۰), c(t_۰), p(t_۰), q(t_۰), b(t_۰)) = (۰, ۰, ۰, ۱, ۰),$$

زیرا قبل از شروع فاجعه یعنی در لحظه $t = ۰$ همه جمعیت در گروه q قرار دارند و لذا جمعیت گروه‌های دیگر صفر است.

مطابق آن‌چه که تاکنون از مدل‌های اپیدمی دیگر نظیر مدل اپیدمی SIR دیده‌اید، در این مدل اپیدمی نیز جمعیت هر یک از گروه‌های رفتاری متناسب با زمان تغییر می‌کند. به عبارتی بین گروه‌های رفتاری تعاملاتی وجود دارد که این تعاملات با نمادهای $B_i \geq ۰$ و $C_i \geq ۰$ که $i = ۱, ۲$ نشان داده می‌شوند و به ترتیب تعاملات بین دو گروه رفتاری بازتابی و کنترل و تعاملات بین دو گروه رفتاری وحشت و کنترل را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که در طی وقوع فاجعه مرگ و میر یا زاد و ولد وجود ندارد. سایر پارامترها نظیر $s_i \geq ۰$ که $i = ۱, ۲$ بیانگر اثرات دومینویی فاجعه، $\alpha_i \geq ۰, \delta_i \geq ۰$ و $\mu_i \geq ۰$ ضرایب تقلید می‌باشند. توابع γ وφ نیز به ترتیب شروع فاجعه و بازگشت به حالت اولیه را نشان می‌دهند.

دستگاه جدید که فرم مرتبه کسری مدل PCR می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود:

(۳)
$$\begin{cases} D^{\alpha}r(t) = f_{۱} = \gamma(t)q(۱-\frac{r}{r_m}) - (B_{۱}+B_{۲})r + s_{۱}(t)c + s_{۲}(t)p + F(r,c)rc + G(r,p)rp, \\ D^{\alpha}c(t) = f_{۲} = -\varphi(t)c(۱-b) + B_{۱}r + C_{۱}p - C_{۲}c - s_{۱}(t)c - F(r,c)rc + H(c,p)cp, \\ D^{\alpha}p(t) = f_{۳} = B_{۲}r - C_{۱}p + C_{۲}c - s_{۲}(t)p - G(r,p)rp - H(c,p)cp, \\ D^{\alpha}q(t) = f_{۴} = -\gamma(t)q(۱-\frac{r}{r_m}), \\ D^{\alpha}b(t) = f_{۵} = \varphi(t)c(۱-b). \end{cases}$$

که D^{α} بیانگر مشتق کسری کاپوتو و α که مرتبه مشتق نام دارد و در محدوده $۰ < \alpha < ۱$ تغییر می‌کند. واضح است که دستگاه (۳) تعمیم‌یافته دستگاه (۱) می‌باشد.

تعریف ۱.۲. [۶] مشتق کسری کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\prescript{C}{a}{D}_{t}^{\alpha} f(t) = J_{a}^{m-\alpha}\frac{d^m f(t)}{dt^m} = \frac{۱}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{m-\alpha-۱} f^{(m)}(\tau)d\tau,$$

که در آن $m-۱ < \alpha \leq m$ و $m \in N$ می‌باشد.

۳. نامنفی بودن جواب‌ها

دستگاه (۳) را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

(۴)
$$\begin{cases} D^{\alpha}y(t) = f(t,y(t)), \\ y(t_{۰}) = y_{۰}, \end{cases}$$

$f = (f_{۱}, f_{۲}, f_{۳}, f_{۴}, f_{۵})^T$ و $y(t) = (r(t), c(t), p(t), q(t), b(t))^T$ و $R_{+}^{۵} = \{y \in R^{۵} : y \geq ۰\}$ است.

برای اثبات نامنفی بودن جواب‌ها ابتدا لم زیر را که به قضیه مقدار اساسی تعمیم‌یافته شهرت دارد، بیان می‌کنیم.

لم ۱.۳ (قضیه مقدار اساسی تعمیم‌یافته)**.** قرار می‌دهیم $f \in C[a,b]$ و $D^{\alpha}f \in C(a,b]$ برای $۰ < \alpha < ۱$، آن‌گاه داریم

$$f(t) = f(a) + \frac{۱}{\Gamma(\alpha)}D^{\alpha}f(\xi)(t-a)^{\alpha},$$

با $\forall t \in (a,b]$ و $۰ \leq \xi \leq t$.

نکته ۲.۳. فرض کنید $f \in C[۰,b]$ و $D^{\alpha}f \in (۰,b]$ برای $۰ < \alpha < ۱$. واضح است که طبق لم فوق اگر $D^{\alpha}f(t) \geq ۰$، $\forall t \in (۰,b)$، آن‌گاه تابع f صعودی هست و اگر $D^{\alpha}f(t) \leq ۰$، $\forall t \in (۰,b)$ آن‌گاه تابع f، $\forall t \in [۰,b]$ نزولی است.

قضیه ۳.۳. یک جواب یکتا برای مسأله مقدار اولیه داده شده در دستگاه (۳) با شرایط اولیه (۲) وجود دارد، که این جواب در $R_{+}^{۵}$ می‌باشد.

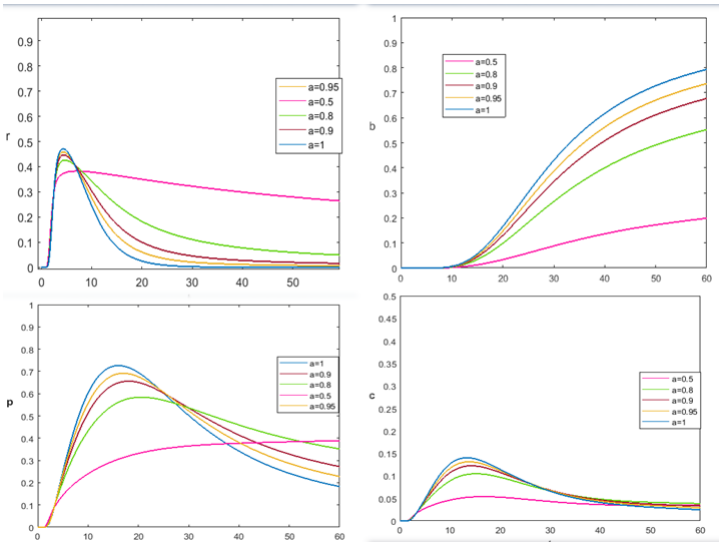
اثبات. وجود و یکتایی جواب در مرجع [۴، قضیه ۳.۱ و نکته ۳.۲] آمده است. برای اثبات نامنفی بودن جواب‌ها داریم:

$$\begin{cases} D^{\alpha}r|_{r=۰} = \gamma(t)q + s_{۱}(t)c + s_{۲}(t)p \geq ۰, \\ D^{\alpha}c|_{c=۰} = B_{۱}r + C_{۱}p \geq ۰, \\ D^{\alpha}p|_{p=۰} = B_{۲}r + C_{۲}c \geq ۰, \\ D^{\alpha}q|_{q=۰} = ۰, \\ D^{\alpha}b|_{b=۰} = \varphi(t)c \geq ۰. \end{cases}$$

پس جواب‌های دستگاه (۴) با توجه به نکته ۲.۳ نامنفی می‌باشد. □

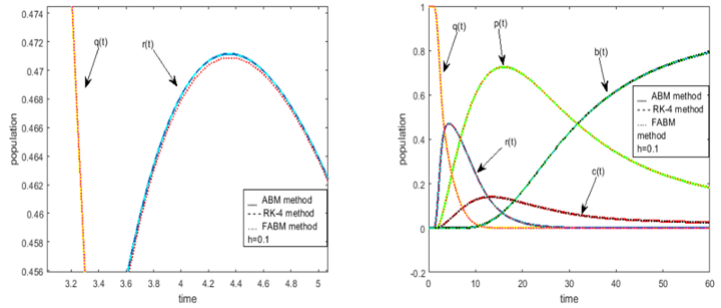
۴. نتایج عددی

دستگاه معادلات PCR (۳) را با شرایط اولیه (۲) و طول گام $h = ۰/۱$ در بازه زمانی $t = [۰, ۶۰]$ در نظر می‌گیریم. ابتدا دستگاه PCR را با روش $FABM$ برای $\alpha = ۰/۵, ۰/۸, ۰/۹, ۰/۹۵, ۱$ حل می‌کنیم و برای هر یک از گروه‌های رفتاری شکل ۱ حاصل می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که هرچه α به سمت یک نزدیک می‌شود، جواب‌های دستگاه نیز به جواب در حالت حدی یعنی $\alpha = ۱$ نزدیک می‌شود.
اگر بخواهیم نتایج حاصل از حل عددی دستگاه PCR غیر کسری به روش ABM و $RK-۴$ را با حل



شکل ۱. نتایج عددی حل دستگاه PCR کسری برای گروه‌های مختلف رفتاری در α های مختلف.

عددی دستگاه PCR کسری در حالت $\alpha = ۱$ که به روش $FABM$ حل شده است، با هم مقایسه کنیم به این نتیجه می‌رسیم که با توجه به شکل ۲ نتایج عددی دستگاه مرتبه کسری به روش $FABM$، نسبت به حل دستگاه مرتبه صحیح به روش‌های ABM و $RK-۴$ دقیق‌تر است. جدول ۱ نیز نتایج عددی را در لحظه $t = ۱۰s$ نشان می‌دهد.



شکل ۲. مقایسه روش $RK-۴$ و ABM با روش $FABM$ در حالت $\alpha = ۱$.

جدول ۱. مقایسه روش‌های عددی مختلف در طول گام‌های متفاوت.

طول گام	$h = ۱۰^{-۱}$			$h = ۱۰^{-۲}$			$h = ۱۰^{-۳}$		
	$FABM$	ABM	$RK-۴$	$FABM$	ABM	$RK-۴$	$FABM$	ABM	$RK-۴$
r	۰/۲۴۶۳	۰/۲۵۱۰	۰/۲۵۱۰	۰/۲۴۶۳	۰/۲۴۶۷	۰/۲۴۶۷	۰/۲۴۶۳	۰/۲۴۶۳	۰/۲۴۶۳
c	۰/۱۲۶۶	۰/۱۲۵۷	۰/۱۲۵۷	۰/۱۲۶۶	۰/۱۲۶۵	۰/۱۲۶۵	۰/۱۲۶۵	۰/۱۲۶۳	۰/۱۲۶۳
p	۰/۶۰۲۸	۰/۵۹۸۱	۰/۵۹۸۱	۰/۶۰۲۸	۰/۶۰۲۳	۰/۶۰۲۳	۰/۶۰۲۷	۰/۶۰۲۷	۰/۶۰۲۷
q	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۹۵	۰/۰۱۹۵	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۸۴	۰/۰۱۸۴	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۸۳	۰/۰۱۸۳
b	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۶۲	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۱	۰/۰۰۶۱

مراجع

1. G. Cantin, N. Verdiére, V. Lanza, M. A. Aziz-Alaoui, R. Charrier, C. Bertelle and E. Dubos-Paillard, *Mathematical modeling of human behaviors during catastrophic events: stability and bifurcations*, Int. J. Bifurc. Chaos **26** (10) (2016) 1630025.
2. G. Cantin, *Nonidentical coupled networks with a geographical model for human behaviors during catastrophic events*, Int. J. Bifurc. Chaos **27** (17) (2017) 1750213.
3. G. González-Parra, A. J. Arenas and B. M. Chen-Charpentier, *A fractional order epidemic model for the simulation of outbreaks of influenza A(H1N1)*, Math. Methods Appl. Sci. **37** (15) (2014) 2218–2226.
4. W. Lin, *Global existence theory and chaos control of fractional differential equations*, Math. Anal. Appl. **332** (1) (2007) 709–726.
5. C. M. Pinto and A. R. Carvalho, *Fractional complex-order model for HIV infection with drug resistance during therapy*, J. Vib. Control **22** (9) (2016) 2222–2239.
6. I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, San Diego, 1999.
7. F. A. Rihan, *Numerical modeling of fractional-order biological systems*, Abstr. Appl. Anal. **2013** (2013) 816803.

پست الکترونیکی: az.hejazi@mail.um.ac.ir
پست الکترونیکی: soheili@um.ac.ir

حل تقریبی مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون

محمد احسان دادکانی*
دانشکده علوم ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
مریم علیپور
دانشکده علوم ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
و سمانه صردی زید
دانشکده صنعت و معدن خاش، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله یک روش برای حل دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی چندجمله‌ای دیکسون ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که دستگاه دینامیکی مسأله براساس مشتق کسری کاپوتو تعریف شده است. در روش مورد نظر، با استفاده از تابع هامیلتونی و روش ضرایب لاگرانژ، مسأله کنترل بهینه کسری به یک دستگاه معادلات غیرخطی تبدیل می‌شود. این دستگاه معادلات غیرخطی را با کمک روش هم‌محلی حل کرده و به این ترتیب ضرایب مجهول تعیین می گردد. در انتها روش ارائه شده را بر روی یک مسأله کنترل بهینه کسری پیاده سازی می‌کنیم. تمامی محاسبات با نرم‌افزار متمتیکا انجام شده است.

واژه‌های کلیدی: چندجمله‌ای‌های دیکسون، مسأله کنترل بهینه کسری، نقاط هم‌محلی، تقریب ماتریسی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 26A33, 34A08, 34K37.

۱. پیش‌گفتار

در سال‌های اخیر توابع و چندجمله‌ای‌های متعامد در حل مسائل مختلف از جمله کنترل بهینه، کنترل بهینه کسری، تجزیه و تحلیل سیستم‌ها، ... مورد توجه و استفاده قرار گرفته‌اند [۱]. هدف استفاده از این توابع و چندجمله‌ای‌ها، تبدیل دینامیک سیستم‌های مختلف به معادلات جبری می‌باشد. در این مقاله یک روش عددی برای حل یک دسته از مسائل کنترل بهینه کسری به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$\min J(t,x,u) = \int_a^b L(t,x(t),u(t))dt, \tag{۱}$$

با سیستم دینامکی کسری

$$D^\alpha x(t) = f(t,x(t),u(t)),\ \alpha \in (0,1),\ t \in [a,b], \tag{۲}$$

و شرایط مرزی

$$x(t_0) = x_0,\ \ u(t) \in \mathbb{U}, \tag{۳}$$

که در آن $J \in C^1[a,b]$ و $\mathbb{U}$ مجموعه‌ای از توابع قطعه‌ای پیوسته است که تابع کنترل مسأله را شامل می‌شود. همچنین توابع f و L دو تابع پیوسته هستند. D^α نشان‌دهنده‌ی مشتق کسری است که در بخش بعد معرفی خواهیم کرد. در این مسائل، مشتقات کسری در مفهوم مشتقات کاپوتو بیان می‌شود. این روش بر اساس چندجمله‌ای دیکسون پایه‌ریزی شده است. با استفاده از ماتریس عملیاتی انتگرال‌گیری کسری ریمان‌لیوویل و ماتریس عملیاتی حاصل‌ضرب و روش ضرایب لاگرانژ، شرایط لازم برای بهینگی مسائل کنترل بهینه کسری توسعه داده می‌شود. سپس با استفاده از پایه‌های چندجمله‌ای دیکسون، مسأله بهینه‌سازی داده شده به یک دستگاه از معادلات جبری ساده شده و با حل این دستگاه، جوابی از مسأله کنترل بهینه کسری به‌دست آورده شده است. نتایج به‌دست آمده

* سخنران

نشان می‌دهد که با افزایش تعداد پایه‌های مورد استفاده از این چندجمله‌ای‌ها، جواب تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به جواب مسأله اولیه همگرا می‌شود. به منظور اثبات صحت و کاربرد این روش نوین، یک مثال ارائه گردیده است.

۲. پیش نیازها

در این بخش چندجمله‌ای‌های دیکسون را معرفی کرده و خواص آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در ادامه، معرفی مختصری از مشتق و انتگرال کسری خواهیم داشت.

۱.۲. چندجمله‌ای‌های دیکسون و خواص آن‌ها. برای عدد صحیح $m \geq ۱$ و مقادیر مختلف ρ در بازه‌های کراندار، چندجمله‌ای‌های دیکسون از مرتبه m به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲، ۳]:

$$D_m(t,\rho) = \sum_{i=۰}^{\lfloor \frac{m}{۲} \rfloor} \frac{m}{m-i} \binom{m-i}{i} (-\rho)^i t^{(m-۲i)}, \qquad -\infty < t < \infty.$$

به‌علاوه، $D_۰(t,\rho) = ۲$، $D_۱(t,\rho) = t$ و برای $m > ۱$ داریم:

$$D_m(t,\rho) = tD_{m-۱}(t,\rho) - \rho D_{m-۲}(t,\rho), \qquad m \geq ۲.$$

چندجمله‌ای‌های دیکسون در معادله دیفرانسیلی به‌صورت زیر نیز صدق می‌کنند:

$$(t^۲ - ۴\rho)x'' + tx' - m^۲x = ۰, \qquad m = ۰, ۱, ۲, \ldots,$$

و دارای تابع مولد زیر هستند:

$$\sum_{m=۰}^{\infty} D_m(t,\rho)v^m = \frac{۲ - tv}{۱ - tv + \rho v^۲}. \tag{۴}$$

۲.۲. حسابان کسری.

تعریف ۱.۲. انتگرال کسری چپ و راست ریمان-لیوویل از مرتبه $\alpha > ۰$ به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{t_۰}I_t^{\alpha} f(t) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_۰}^{t} (t-\tau)^{\alpha-۱} f(\tau) d\tau,$$

و

$${}_tI_{t_f}^{\alpha} f(t) = \frac{۱}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{t_f} (\tau - t)^{\alpha-۱} f(\tau) d\tau,$$

که در آن، Γ تابع گامای اویلر است. همچنین واضح است که ${}_{t_۰}I_t^{۰} f(t) = {}_tI_{t_f}^{۰} f(t) = f(t)$.

تعریف ۲.۲. مشتق کسری چپ و راست کاپوتو از مرتبه $\alpha > ۰$، $n - ۱ < \alpha \leq n$، $n \in \mathbb{N}$، به‌ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha} f(t) = ({}_{t_۰}I_t^{n-\alpha}) D^n f(t) = \frac{۱}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_۰}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-۱} f^{(n)}(\tau) d\tau,$$

و

$${}_{t}^{C}D_{t_f}^{\alpha} f(t) = (-۱)^n ({}_tI_{t_f}^{n-\alpha}) D^n f(t) = \frac{(-۱)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t}^{t_f} (\tau - t)^{n-\alpha-۱} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

از این تعریف نتایج زیر به‌دست می‌آیند ($\alpha, \beta \geq ۰$):

$${}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha}\, {}_{t_۰}^{C}D_t^{\beta} f = {}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha+\beta} f, \qquad {}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha}\, {}_{t_۰}^{C}D_t^{\beta} f = {}_{t_۰}^{C}D_t^{\beta}\, {}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha} f,$$

$${}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha} k = ۰,$$

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}(t-t_0)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(t-t_0)^{n-\alpha}, & n\geq[\alpha],\\ 0, & n<[\alpha].\end{cases} $$

۳. روش حل تقریبی

برای حل مسأله کنترل بهینه کسری (۱)-(۳) با استفاده از چندجمله‌ای‌های دیکسون، توابع $x(t)$ و $u(t)$ را به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$ x(t)\simeq x_M(t)=\sum_{i=0}^{M}D_i(t,\rho)x_i,\qquad u(t)\simeq u_M(t)=\sum_{i=0}^{M}D_i(t,\rho)u_i, \tag{۵} $$

که در آن، x_i و u_i، $i=0,1,2,\ldots,M$، ضرایب مجهول دیکسون هستند. برای یافتن این مجهولات از نقاط هم‌محلی زیر استفاده می‌کنیم ($a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{2M}=b$):

$$ t_j=a+(\frac{b-a}{2M})j,\qquad j=0,1,2,\ldots,2M. $$

تقریب (۵) را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بازنویسی کرد:

$$ x(t)\simeq x_M(t)=D(t,\rho)X=Y(t)K(\rho)X, $$

$$ u(t)\simeq u_M(t)=D(t,\rho)U=Y(t)K(\rho)U, $$

که در آن $X=[x_0,x_1,\ldots,x_M]^T$، $U=[u_0,u_1,\ldots,u_M]^T$ و $Y(t)=[1,t,t^2,\ldots,t^M]$

$$ D(t,\rho)=[D_0(t,\rho),D_1(t,\rho),\ldots,D_M(t,\rho)]. $$

به‌علاوه، اگر M عددی زوج باشد آن‌گاه ماتریس $K^T(\rho)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{1}\binom{1}{0}(-\rho)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{2}{1}\binom{1}{1}(-\rho)^1 & 0 & \frac{2}{2}\binom{2}{0}(-\rho)^0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\binom{2}{1}(-\rho)^1 & 0 & \frac{3}{3}\binom{3}{0}(-\rho)^0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{M}{M/2}\binom{M/2}{M/2}(-\rho)^{M/2} & 0 & \frac{M}{(M/2)+1}\binom{(M/2)+1}{(M/2)-1}(-\rho)^{(M/2)-1} & 0 & \cdots & \frac{M}{M}\binom{M}{0}(-\rho)^0 \end{bmatrix}, $$

و اگر M عددی فرد باشد ماتریس $K^T(\rho)$ عبارتست از:

$$ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{1}\binom{1}{0}(-\rho)^0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \frac{2}{1}\binom{1}{1}(-\rho)^1 & 0 & \frac{2}{2}\binom{2}{0}(-\rho)^0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{3}{2}\binom{2}{1}(-\rho)^1 & 0 & \frac{3}{3}\binom{3}{0}(-\rho)^0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \frac{M}{\lceil M/2\rceil}\binom{\lceil M/2\rceil}{\lfloor M/2\rfloor}(-\rho)^{\lfloor M/2\rfloor} & 0 & \frac{M}{\lceil M/2\rceil+1}\binom{\lceil M/2\rceil+1}{\lfloor M/2\rfloor-1}(-\rho)^{\lfloor M/2\rfloor-1} & \cdots & \frac{M}{M}\binom{M}{0}(-\rho)^0 \end{bmatrix}. $$

اکنون برای تقریب مشتق کسری $D^{\alpha}y_M(x)$، $0<\alpha\leq 1$، داریم:

$$ D^{\alpha}y(x)\simeq D^{\alpha}y_M(x)=D^{\alpha}L(x)K(\rho)Y, $$

جدول ۱. مقادیر خطای $x(t)$ و $u(t)$.

M	$x(t)$	$u(t)$
۲	$۸/۳۲۶۶۲ \times ۱۰^{-۳}$	$۵/۲۳۴۵۳ \times ۱۰^{-۲}$
۴	$۴/۸۶۸۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۴/۸۸۶۹۵ \times ۱۰^{-۲}$
۷	$۹/۳۶۳۰۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۱۸۵۴۶ \times ۱۰^{-۳}$
۸	$۹/۳۶۵۹۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۴۹۲۲۹ \times ۱۰^{-۲}$
۹	$۹/۳۶۵۹۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۴۹۲۲۷ \times ۱۰^{-۲}$
۱۰	$۹/۳۶۵۹۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۴۹۲۲۷ \times ۱۰^{-۲}$

که در آن $D^{\alpha}L(x) = x^{-\alpha}L(x)B(\alpha)$ و

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} ۰ & \frac{\Gamma(۲)}{\Gamma(۲-\alpha)} & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{\Gamma(۳)}{\Gamma(۳-\alpha)} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & \frac{\Gamma(M+۱)}{\Gamma(M+۱-\alpha)} \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix}.$$

از سویی دیگر، با اعمال ضربگر لاگرانژ $\lambda = [\lambda_۰, \lambda_۱, \ldots, \lambda_{۲M}]$، شرط لازم برای بهینگی مسأله کنترل بهینه کسری به‌صورت زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\text{(۶)} \qquad \begin{cases} {}_{t_۰}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = f(t, x(t), u(t)), \\ {}_{t}^{RL}D_{t_f}^{\alpha}\lambda = \partial_x H(t, x(t), u(t), \lambda), \\ \partial_u H(t, x(t), u(t), \lambda) = ۰, \\ x(t_۰) = x_۰, \quad \lambda(t_۰) = ۰, \end{cases}$$

که در آن $H(t, x, u, \lambda) = L(t, x(t), u(t)) + \lambda f(t, x(t), u(t))$ تابع هامیلتونی نامیده می‌شود.

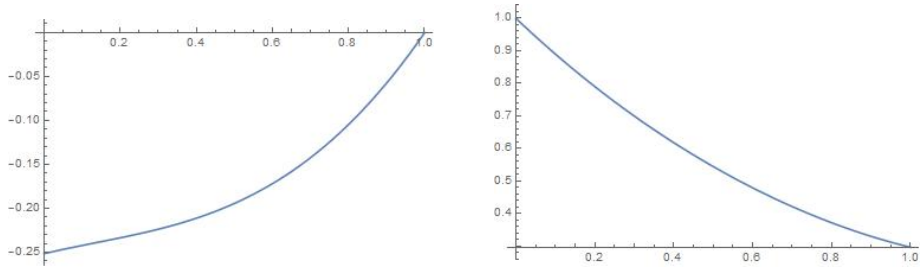
حال برای یافتن جواب تقریبی مسأله (۱)-(۳)، تقریب‌های به‌دست آمده از چندجمله‌ای‌های دیکسون را در شرایط بهینگی (۶) جایگذاری می‌کنیم که به یک دستگاه جبری خواهیم رسید. با اعمال روش تکراری نیوتن برای حل این دستگاه جبری، جواب‌های مسأله (۱)-(۳) به‌دست خواهند آمد.

۴. نتایج عددی

مسأله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \ \ & J(t, x, u) = \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{۱} \Big[x^{۲}(t) + u^{۲}(t)\Big]dt, \\ & {}_{۰}^{C}D_t^{\alpha}x(t) = -x(t) + u(t), \ \alpha \in (۰, ۱), \ t \in [۰, ۱] \\ & x(۰) = ۱. \end{aligned}$$

جدول ۱ مقادیر محاسبه شده برای خطای این تقریب را به ازای $\alpha = ۰/۲$ و انتخاب‌های مختلف M نشان می‌دهد. نمودارهای تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای $M = ۴$ و $\alpha = ۰/۵$ در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱. مقادیر تقریبی $x(t)$ و $u(t)$.

مراجع

۱. م. ه. فراهی، کنترل بهینه و حساب تغییرات، چاپ اول، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، ۱۳۸۵.

2. O. K. kürkçü, E. Aslan and M. Sezar, *A numerical method for solving some model problems arising in science and convergence analysis based on residual function,* Appli. Numer. Math. **121** (2017) 134–148.

3. O. K. kürkçü, E. Aslan and M. Sezar, *A numerical approach with error estimation to solve general integro-differential-difference equations using Dickson polynomials*, Appli. Numer. Math. **276** (2016) 324–339.

پست الکترونیکی: me.dadkani@gmail.com
پست الکترونیکی: m.alipour@math.usb.ac.ir
پست الکترونیکی: soradizeid@eng.usb.ac.ir

یک مدل کسری-تصادفی برای تشکیل مویرگ همراه با تجزیه و تحلیل روش تفاضلات متناهی به‌عنوان جواب عددی آن

امین شاه‌کرمی*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران
و بهمن غضنفری
دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

چکیده. در این مقاله، یک مدل کسری-زمانی برای معادله تصادفی با مشتقات جزیی مدل ریاضی تشکیل مویرگ در تومور رگزایی را بر اساس مشتق کسری جامیری به‌دست می آوریم. بعد از آن، روش تفاضلات متناهی به‌همراه تجزیه و تحلیل کامل از این روش عددی شامل سازگاری، پایداری و همگرایی آن را به‌عنوان یک جواب عددی از این معادله بیان می‌کنیم. در آخر، با ارائه یک مثال عددی از مدل تشکیل مویرگ در تومور رگزایی نتایجی از جواب عددی پیشنهادی برای مدل کسری ارائه شده را مشاهده می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: معادلات تصادفی، مشتقات جزیی، پایداری، همگرایی، تومور رگزایی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35R11, 35R60, 62P10.

۱. پیش‌گفتار

مطالعه معادلات دیفرانسیل کسری در مدل‌سازی علوم از جمله مهندسی، فیزیک، ریاضیات مالی و مسائل بیولوژیکی در حال افزایش است. با توجه به [۷]، این معادلات جزئیات بیشتری از تاریخچه پدیده‌ها را بیان می‌کنند و از این‌رو، بیان‌گر رفتار دقیق‌تری از پدیده‌ها هستند.

رگزایی یک پدیده طبیعی به معنای تشکیل مویرگ‌های جدید از عروق قبلی است و نقش مهمی در فرایندهای مختلف فیزیولوژیکی مانند رشد اندام، بهبود زخم و تولید مجدد دارد. شرایط داخلی بدن گاهی اوقات باعث تکثیر بیش از حد این پدیده شده و یک تومور موضعی تشکیل می‌شود. در [۷] مدل ریاضی تشکیل مویرگ در تومور رگزایی برحسب معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزیی زیر ارائه شده است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{K}\big(\frac{\partial}{\partial x}u_{xx} - uH(x)\big), \qquad (x,t) \in (0,1)\times(0,\tau], \tag{1}$$

که شرایط آغازین و مرزی برای (۱) به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 1, \quad 0 < x < 1,\\ &\frac{\partial}{\partial x}u|_{x=0} - u(0,t)H(0) = 0, \quad 0 \le t \le \tau,\\ &\frac{\partial}{\partial x}u|_{x=1} - u(1,t)H(1) = 0, \quad 0 \le t \le \tau. \end{aligned} \tag{2}$$

در روابط فوق $H(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$، که h تابع احتمال انتقال با تعریف زیر است:

$$h(x) = \big(\frac{a + Ax^s(1-x)^s}{b + Ax^s(1-x)^s}\big)^{\beta_1}\big(\frac{e + 1 - Bx^s(1-x)^s}{d + 1 - Bx^s(1-x)^s}\big)^{\beta_2}, \quad x \in [0,1].$$

با توجه به [۷]، روابط فوق مدل ریاضی اولیه برای کنترل حرکت سلول‌های اندوتلیال را بیان می‌کنند که در آن $u(x,t)$ غلظت سلول‌های اندوتلیال را نشان می‌دهد، $\mathcal{K}$ ثابت انتشار سلول است که به‌عنوان ثابت غیرصفر انتخاب می‌شود و پارامترهای a، b، d، e، A، B، s، β_1 و β_2 ثابت‌هایی دلخواه هستند.

* سخنران

تشکیل مویرگ در تومور رگزایی در محیط طبیعی رخ داده و برخی از فاکتورها مانند کاهش اکسیژن در بافت‌ها نادیده گرفته می‌شود که نشان می‌دهد مدل ریاضی ارائه شده دقیق نیست. علاوه بر این، وجود تابع احتمال انتقال $f(x)$ که تأثیر قدم‌زنی تصادفی در مدل‌سازی است [۵]، این عدم دقت را افزایش می‌دهد. یکی از معروف‌ترین راه‌های افزودن تأثیر این پارامترها به (۱)، اضافه کردن عبارت $\sigma u(x,t)\dot{w}(t)$ به‌عنوان یک نویز برگرفته از فرایند وینر به این معادله به‌صورت زیر است:

$$u_t(x,t) = \mathcal{K}\big(u_{xx}(x,t) - H(x)u_x(x,t) - H'(x)u(x,t)\big) + \sigma u(x,t)\dot{w}(t), \qquad (۳)$$

به ازای $x \in (۰,۱)$ و $t \in (۰,\tau]$، که در آن $\dot{w}(t)$ یک توزیع تصادفی از حرکت براونی $w(t)$ و σ یک ضریب غیرتصادفی و نشان دهنده شدت نویز است [۶].

تعاریف مختلفی از مشتق کسری برای بیان مدل کسری معادلات دیفرانسیل وجود دارد. استفاده از تعاریف مشتق‌های ریمان-لیوویل و کاپوتو روش‌های متداول انجام این کار هستند. α-امین ($\alpha \in \mathbb{R}$) مشتق ریمان-لیوویل هر ثابت غیرصفر، صفر نیست. همچنین مشتق کاپوتو مرتبه α ($n < \alpha < n+۱$) برای توابع حداقل $(n+۱)$-بار مشتق‌پذیر تعریف شده است. از این‌رو، می‌توان انواع دیگری از مشتق کسری را نیز تعریف نمود. یکی از این تعاریف، مشتق جامیری است که ما از آن برای ارائه شکل کسری (۳) استفاده می‌کنیم [۴]. در ادامه، مدل کسری-زمانی (۳) از مرتبه α را، که $۰ < \alpha < ۱$، براساس مشتق جامیری بیان می‌کنیم.

به‌منظور بیان مدل کسری (۳)، آن را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم:

$$u(x,t) - u(x,۰) = \int_۰^t \Lambda_u(x,s)\eta(t-s)ds + \int_۰^t u(x,s)\dot{W}_s ds,$$

که در آن $n(t)$ یک تابع نزولی مثبت است و در $t = ۰$ تحلیلی نیست [۱]. با انتخاب $n(t) = \frac{t^{\alpha-۱}}{\Gamma(\alpha)}$، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$D_t^\alpha u(x,t) = \Lambda_u(x,t) + I_t^{۱-\alpha}\big(u(x,t)\dot{W}_t\big), \qquad (x,t) \in (۰,۱)\times(۰,\tau], \qquad (۴)$$

که در آن $\Lambda_u(x,t) = \mathcal{K}\big(u_{xx}(x,t) - H(x)u_x(x,t) - H'(x)u(x,t)\big)$، $I_t^{۱-\alpha}\big(u(x,t)\dot{W}_t\big)$ انتگرال ریمان-لیوویل مرتبه $(۱-\alpha)$-ام تابع $u(x,t)\dot{W}_t$ است [۱] و $D_t^\alpha u(x,t)$ مشتق جامیری مرتبه α تابع $u(x,t)$ نسبت زمان با تعریف زیر است [۴]:

$$D_t^\alpha u(x,t) = \frac{۱}{\Gamma(۱-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_۰^t (t-\eta)^{-\alpha}\big(u(x,\eta) - u(x,۰)\big)d\eta, \quad ۰ < x < ۱.$$

۲. روش تفاضلات متناهی

برای به‌کارگیری روش تفاضلات متناهی برای (۴) با شرایط آغازین و مرزی (۲)، مجموعه $\{x_k = k\Delta x : k = ۰,۱,\dots,N-۱\}$ و $\{t_n = n\Delta t : n = ۰,۱,\dots,m\}$ را به‌عنوان افراز $[۰,۱]$ و $[۰,\tau]$ را به‌عنوان افراز $[۰,\tau]$ درنظر می‌گیریم، که در آن $\Delta x = \frac{۱}{N-۱}$، $\Delta t = \frac{\tau}{m+۱}$ و $۰ \le \theta \le ۱$ فرض می‌شوند. در این صورت، بنابر [۴]، عبارت زیر را می‌توان به‌عنوان یک تقریب از (۴) درنظر گرفت:

$$\frac{\big(u(x_k,t_{n+۱}) - u(x_k,t_n)\big)\Gamma(\alpha+۱)}{(\Delta t)^\alpha}$$
$$= \theta'\Lambda_u(x_k,t_n) + \theta\Lambda_u(x_k,t_{n+۱}) + u(x_k,t_n)\frac{\big(W(t_{n+۱}) - W(t_n)\big)\Gamma(\alpha+۱)}{(\Delta t)^\alpha},$$

که در آن $\theta' = ۱-\theta$، Γ تابع گاما و $\Lambda_u(x_k,t_n)$ و $\Lambda_u(x_k,t_{n+۱})$ مقادیر تابع Λ_u به‌ترتیب در (x_k,t_n) و $(x_k,t_{n+۱})$ هستند. در رابطه فوق از

$$I_t^{۱-\alpha}\big(u(x_k,t_n)\dot{W}_{t_n}\big) \simeq u(x_k,t_n)I_t^{۱-\alpha}\dot{W}_{t_n} = u(x_k,t_n)D_t^\alpha W_{t_n},$$

استفاده شده است. رابطه فوق یک تقریب از مرتبه $\mathrm{O}\big((\Delta t)^{۲\alpha}\big)$ برای (۴) در $(x_k, t_{n+\theta})$ است. با استفاده از تفاضلات مرکزی برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ و تفاضلات مرتبه دوم برای $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$ و در (x_k, t_n) و $(x_k, t_{n+۱})$ برای مشتق‌های مکانی مرتبه اول و دوم u در Λ_u، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$
\begin{aligned}
&u_k^{n+۱} - \frac{\mathcal{K}\hat{\Delta}t}{(\Delta x)^۲}\theta(u_{k+۱}^{n+۱} - ۲u_k^{n+۱} + u_{k-۱}^{n+۱}) + \frac{\mathcal{K}\hat{\Delta}t}{۲\Delta x}\theta H_k(u_{k+۱}^{n+۱} - u_{k-۱}^{n+۱}) + \mathcal{K}\hat{\Delta}t\theta H_k' u_k^{n+۱} \\
&= u_k^n + \frac{\mathcal{K}\hat{\Delta}t}{(\Delta x)^۲}\theta'(u_{k+۱}^n - ۲u_k^n + u_{k-۱}^n) - \frac{\mathcal{K}\hat{\Delta}t}{۲\Delta x}\theta' H_k(u_{k+۱}^n - u_{k-۱}^n) - \mathcal{K}\hat{\Delta}t\theta' H_k' u_k^n + \sigma u_k^n \Delta w_n,
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

که در آن $\hat{\Delta}t = \frac{(\Delta t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+۱)}$، $u_{k-۱}^n = u(x_{k-۱}, t_n)$، $u_k^n = u(x_k, t_n)$، $u_{k+۱}^n = u(x_{k+۱}, t_n)$، $u_{k-۱}^{n+۱} = u(x_{k-۱}, t_{n+۱})$، $u_k^{n+۱} = u(x_k, t_{n+۱})$، $u_{k+۱}^{n+۱} = u(x_{k+۱}, t_{n+۱})$، $H_k = H(x_k)$ و $H_k' = H'(x_k)$ هستند.

همچنین برای تقریب نقاط مرزی از تفاضلات پیشرو و پسروی زیر استفاده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\theta'(u_۲^n - u_۱^n) + \theta(u_۲^{n+۱} - u_۱^{n+۱})}{\Delta x} = \theta' H_۱ u_۱^n + \theta H_۱ u_۱^{n+۱}, \\
&\frac{\theta'(u_N^n - u_{N-۱}^n) + \theta(u_N^{n+۱} - u_{N-۱}^{n+۱})}{\Delta x} = \theta' H_N u_N^n + \theta H_N u_N^{n+۱}.
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

در روابط فوق با قرار دادن ۰، $\frac{۱}{۲}$ و ۱ به‌جای θ به‌ترتیب روش‌های تفاضلات پسرو، کرانک-نیکلسون و پیشرو حاصل می‌شوند.

۳. تجزیه و تحلیل روش عددی

برای ارائه تجزیه و تحلیل روش عددی، شرایط سازگاری، پایداری و همگرایی روش را در میانگین مربعات بیان می‌کنیم. برای این منظور، از مفروضات [۶] استفاده کرده و فرض می‌کنیم $\Phi(x,t)$ جواب دقیق مسئله است. بنابر خاصیت ایزومتری ایتو؛ یعنی $E\big[\int_۰^t f(.,s)dW_s\big]^۲ = E\big[\int_۰^t f^۲(.,s)ds\big]$ به ازای تابع تصادفی f، $E|X+Y|^۲ \le ۲E(X)^۲ + ۲E(Y^۲)$ به ازای متغیرهای تصادفی X و Y (و استفاده مکرر از آن) و همچنین بسط تیلور داریم:

$$
\begin{aligned}
&E\Big|\big(L(\Phi) - G\big)\big|_k^n - \big(L_k^n\Phi - G_k^n\big)\Big|^۲ \\
&\le ۸\theta^۲ E\Big|\int_{t_n}^{t_{n+۱}} (t_{n+۱} - s)^{\alpha-۱}\big[\Lambda_\Phi(x_k, s) - D\Lambda_\Phi(x_k, t_{n+۱})\big]ds\Big|^۲ \\
&+ ۸(۱-\theta)^۲ E\Big|\int_{t_n}^{t_{n+۱}} (t_{n+۱} - s)^{\alpha-۱}\big[\Lambda_\Phi(x_k, s) - D\Lambda_\Phi(x_k, t_n)\big]ds\Big|^۲ \\
&+ ۴\sigma^۲ \int_{t_n}^{t_{n+۱}} E\big|\Phi(x_k, s) - \Phi(x_k, t_n)\big|^۲ dW_s \\
&+ ۲E\Big|\int_۰^{t_n} \big((t_{n+۱} - s)^{\alpha-۱} - (t_n - s)^{\alpha-۱}\big)\Lambda_\Phi(x_k, s)ds\Big|^۲ \\
&\le ۸\theta^۲\Big|\int_{t_n}^{t_{n+۱}} (t_{n+۱} - s)^{\alpha-۱}\Big(O(s - t_{n+۱}) + O\big((\Delta t)^۲\big) \\
&- \frac{H_k}{۲(\Delta x)}\big[O(s - t_{n+۱}) + O\big((\Delta t)^۲\big)\big] - H_k'\big[O(s - t_{n+۱})\big]\Big)ds\Big|^۲ \\
&+ ۸(۱-\theta)^۲\Big|\int_{t_n}^{t_{n+۱}} (t_{n+۱} - s)^{\alpha-۱}\Big(O(s - t_n) + O\big((\Delta t)^۲\big) \\
&- \frac{H_k}{۲(\Delta x)}\big[O(s - t_n) + O\big((\Delta t)^۲\big)\big] - H_k'\big[O(s - t_n)\big]\Big)ds\Big|^۲
\end{aligned}
$$

$$+ ۴\sigma^۲E\int_{t_n}^{t_{n+۱}} \left|O(s-t_n)\right|^۲ds + ۲E\Big|\int_{۰}^{t_n}\big((t_{n+۱}-s)^{\alpha-۱}-(t_n-s)^{\alpha-۱}\big)\Lambda_\Phi(x_k,s)ds\Big|^۲,$$

که در آن $(L\Phi-G)|_k^n - \left[L_k^n\Phi(x_x,t_n) - G_k^n\right]$ تفاضل جواب دقیق مسئله و جواب تقریبی (۵)، Λ_Φ تابع $u=\Phi$ به ازای Λ_u و $D\Lambda_\Phi(x_k,t)$ حاصل از اعمال تقریب‌های درنظر گرفته شده برای مشتق‌های مکانی مرتبه اول و دوم در Λ_Φ هستند. بنابر تعیینی بودن $\Phi(x,t)$ و این‌که تقریب‌های درنظر گرفته شده برای مشتق‌های اول و دوم مکانی از مرتبه $\mathrm{O}\big((\Delta t)^۲\big)$ هستند، با اعمال $\Delta x\to ۰$ و $\Delta t\to ۰$، همه‌ی جملات آخرین نامساوی عبارت فوق به سمت صفر میل کرده و سازگاری روش حاصل می‌شود [۶].

برای بیان پایداری روش، از روش ون-نیومن استفاده می‌کنیم [۶] و با قرار دادن $u_k^n = e^{i\beta x_k}\hat{u}^n(\xi)$ و $i^۲=-۱$ در (۵) و یک محاسبه ساده، به رابطه $\hat{u}^{n+۱}(\xi) = g(\Delta t,\Delta x)\hat{u}^n(\xi)$ می‌رسیم، که در آن:

$$g(\Delta t,\Delta x) = \frac{۱-(۱-\theta)\hat{\Delta}_\alpha t\mathcal{K}\big(\frac{۴}{(\Delta x)^۲}\sin^۲\frac{\beta\Delta x}{۲} - \frac{۱}{۲\Delta x}H_k i\sin(\beta\Delta x) - H_k'\big)}{۱+\theta\hat{\Delta}_\alpha t\mathcal{K}\big(\frac{۴}{(\Delta x)^۲}\sin^۲\frac{\beta\Delta x}{۲} - \frac{۱}{۲\Delta x}H_k i\sin(\beta\Delta x) - H_k'\big)} + \frac{\sigma\Delta w_n}{۱+\theta\hat{\Delta}_\alpha t\mathcal{K}\big(\frac{۴}{(\Delta x)^۲}\sin^۲\frac{\beta\Delta x}{۲} - \frac{۱}{۲\Delta x}H_k i\sin(\beta\Delta x) - H_k'\big)}.$$

بنابراین هرگاه $E\left|g(\Delta t,\Delta x)\right|^۲ \le ۱+K\Delta t$ (به ازای $K>۰$)، روش (۵) پایدار است. توجه شود که

جدول ۱. نمایش خطاهای $L_۲^{\text{error}}$ و L_∞^{error} به ازای $\sigma = ۰/۷$ و مقادیر مختلفی از α.

L_∞^{error}	$L_۲^{\text{error}}$	L_∞^{error}	$L_۲^{\text{error}}$	L_∞^{error}	$L_۲^{\text{error}}$	t
	$\alpha=۱$		$\alpha=۰/۹۵$		$\alpha=۰/۹$	
۰/۰۷۱۲۴۳	۰/۳۸۲۱۲	۰/۰۳۸۳۸	۰/۳۰۷۰۷	۰/۰۴۵۵۱۷	۰/۲۳۴۶۷	۱
۰/۰۵۹۴۷۵	۰/۳۸۶۶۹	۰/۰۶۰۸۹۲	۰/۵۰۱۱۶	۰/۰۴۰۱۴۸	۰/۲۱۹۲۵	۱/۵
۰/۰۵۸۱۰۲	۰/۴۷۵۶۴	۰/۰۷۳۱۴۴	۰/۵۹۵۴۸	۰/۰۵۲۴۳۴	۰/۳۲۵۰۹	۲

شرط $K>۰$ به ازای $\theta\ge\frac{۱}{۲}$ و σ به‌اندازه کافی کوچک حاصل می‌شود [۶]. از طرفی

$$E|v-u_k^n|^۲ = E\left|(L_k^n)^{-۱}(L_k^n v - L_k^n u_k^n)\right|^۲,$$

که L_k^n عملگر خطی به‌دست آمده از (۵)، v جواب دقیق و u_k^n جواب تقریبی هستند. اما تحت برقراری شرایط پایداری (۵)، $(L_k^n)^{-۱}$ کران‌دار است. از این‌رو، سازگاری روش، همگرایی آن را ایجاب می‌کند [۳].

۴. نتایج عددی

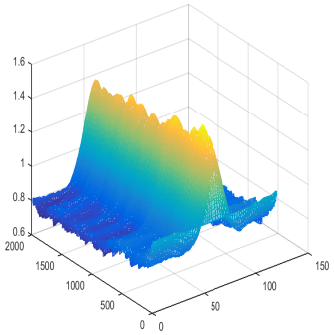
اکنون نتایج عددی یک حالت از مدل کسری-تصادفی (۴)، با شرایط آغازین و مرزی (۲) و با استفاده از روش (۶)-(۵)، را بیان می‌کنیم. برای این منظور، مقادیر $a=۰/۱$، $b=۲$، $d=۰/۱$، $e=۱۰$، $\beta_۱=\beta_۲=۱$، $A=۲۸\times۱۰^۷$ و $B=۲۲\times۱۰^۹$ را همانند [۷] اختیار می‌کنیم. با استفاده روش مونته-کارلو

$$E(u_k^n) = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} u_k^i, \quad k=۱,۲,\dots,N,$$

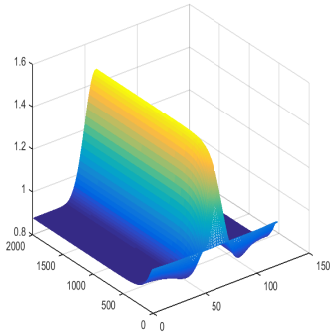
می‌توان مقدار مورد انتظار u_k^n را تخمین زد و آن را توسط روابط زیر ارزیابی نمود [۲]:

$$L_۲^{\text{error}} = \left\|u_{k,s}^n - E(u_k^n)\right\|_۲,$$
$$L_\infty^{\text{error}} = \left\|u_{k,s}^n - E(u_k^n)\right\|_\infty,$$

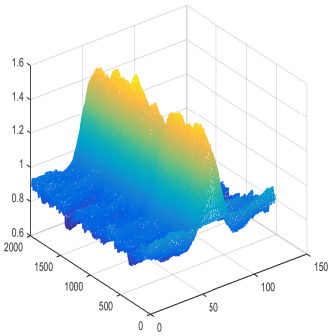
که در آن $u_{k,s}^n$ جواب عددی مدل در نبود نویز گاوسی و به ازای سطح زمانی $n=۱,۲,\dots,m$ است.



(ب) $\alpha = ۰/۹، \sigma = ۰/۷$



(آ) $\alpha = ۱، \sigma = ۰$



(ج) $\alpha = ۱، \sigma = ۰/۷$

شکل ۱. نمایشی از جواب تقریبی به ازای $\sigma = ۰/۷$ و مقادیر مختلفی از α.

روش عددی را با مقادیر $\mathcal{K} = ۰/۳$ و $\tau = ۲$ درنظر می‌گیریم. فرض کنیم $N = ۱۲۰$ تعداد گره‌های مکانی، $m = ۱۹۹۹$ تعداد سطوح زمانی ($\Delta t = ۰/۰۰۱$) و $\theta = \frac{۲}{۳}$ هستند. در شکل ۱(آ)، جواب تقریبی مدل تعیینی غیرکسری و در بقیه تصاویر شکل ۱، جواب‌های تقریبی مدل تصادفی-کسری به ازای $\sigma = ۰/۷$ و مقادیر متفاوتی از α ترسیم شده‌اند که حاکی از نزدیکی جواب‌ها به مدل تعیینی غیرکسری است. جدول ۱ نیز خطاهای $L_{۲}^{\text{error}}$ و $L_{\infty}^{\text{error}}$ را در چند سطر زمانی مختلف به ازای $\sigma = ۰/۷$ و مقادیر متفاوتی از α نشان می‌دهد.

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، بعد از معرفی یک مدل کسری-زمانی، براساس مشتق جامیری برای معادلات تصادفی تشکیل مویرگ در تومور رگزایی، به اجرای روش تفاضلات متناهی به‌همراه تجزیه و تحلیل کامل این روش پرداختیم. در آخر، با ذکر یک مثال عددی از مدل تشکیل مویرگ در تومور رگزایی، نتایجی را مشاهده کردیم که گویای همگرایی روش تفاضلات متناهی به‌عنوان حل عددی این مدل است.

مراجع

1. Z. Q. Chen, K. H. Kim and P. Kim, *Fractional time stochastic partial differential equations*, Stoch. Process. Appl. **125** (4) (2015) 1470–1499.
2. M. Dehghan and M. Shirzadi, *Numerical solution of stochastic elliptic partial differential equations using the meshless method of radial basis functions*, Eng. Anal. Bound. Elem. **50** (2015) 291–303.
3. M. A. El-Tawil and M. A. Sohaly, *Mean square convergent three points finite difference scheme for random partial differential equations*, J. Egyptian Math. Soc. **20** (3) (2012) 188–204.
4. G. Jumarie, *Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results*, Comput. Math. Appl. **51** (9-10) (2006) 1367–1376.
5. H. A. Levine, S. Pamuk, B. D. Sleeman and M. Nilsen-Hamilton, *Mathematical model of capillary formation and development in tumor angiogenesis: penetration into the stroma*, Bull. Math. Biol. **63** (5) (2001) 801–863.
6. M. Namjoo and A. Mohebbian, *Analysis of the stability and convergence of a finite difference approximation for stochastic partial differential equations*, Comput. Methods Differ. Equ. **7** (3) (2019) 334–358.
7. A. Shahkarami and B. Ghazanfari, *Finite difference method for capillary formation model in tumor angiogenesis*, J. Math. Model. **8** (2) (2020) 177–188.

پست الکترونیکی: shahkarami67@gmail.com
پست الکترونیکی: ghazanfari.ba@lu.ac.ir

یک روش شبه‌طیفی کسری برای حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری

پریسا شیری یایشهری*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران
و مجتبی حاجی‌پور
دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

چکیده. در این مقاله، یک روش شبه‌طیفی کسری برای حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل کسری معمولی و مشتقات جزئی ارائه می‌شود. برای این منظور، چندجمله‌ای‌های ژاکوبی کسری مبتنی بر چندجمله‌ای‌های ژاکوبی استاندارد معرفی شده و سپس یک جواب تقریبی برای معادله دیفرانسیل داده شده برحسب چندجمله‌ای‌های لاگرانژ کسری در نقاط درون‌یابی ارائه می‌شود. با استفاده از ماتریس‌های مشتق کسری معرفی شده، معادله دیفرانسیل کسری تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری بر حسب مقادیر تابع مجهول در نقاط درون‌یابی می‌شود. در نهایت نتایج عددی حاصل از روش مورد نظر برای برخی از معادلات دیفرانسیل کسری چندمرتبه‌ای و هم‌چنین مسأله نفوذ–انتقال کسری ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: ماتریس مشتق کسری، معادلات دیفرانسیل کسری، درون‌یاب لاگرانژ کسری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 58C40, 35S10, 35S11.

۱. پیش‌گفتار

سیستم‌های مرتبه کسری به دلیل آن‌که پارامترهای بیشتری نسبت به سیستم‌های مرتبه صحیح (سیستم‌های معمولی) دارند، از تنوع رفتاری و دینامیکی بالاتری برخوردار هستند. لذا برای مدل‌سازی دقیق‌تر پدیده‌های فیزیکی از قبیل سیستم‌های انتقال حرارت و انتشار جرم، پردازش تصویر، پدیده پخش و اندازه‌گیری استفاده می‌شود [۱]. با توجه به این‌که جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات کسری به راحتی در دسترس نیست، از روش‌های عددی هم‌چون روش‌های طیفی و تفاضلات متناهی برای حل این نوع معادلات استفاده می‌شود [۲، ۳]. در مرجع [۳]، یک روش عددی بر اساس فرمول‌های تفاضلات متناهی برای حل معادله نفوذ کسری طراحی شده است.
هم‌چنین روش‌های پیشگو اصلاح‌گر در [۵] برای حل برخی معادلات دیفرانسیل کسری غیرخطی ساخته شده‌اند. به‌علاوه از روش‌های طیفی که برای اولین بار در [۶، ۷] ارائه شده‌اند، برای حل یک معادله نفوذ کسری وابسته به زمان طرح‌ریزی شده است. در این مقاله یک روش شبه‌طیفی کسری برای حل یک دسته از مسائل نفوذ–انتقال کسری به‌شکل زیر ارائه می‌شود:

$$ {}_{0}\mathcal{D}_{t}^{\tau}u(x,t) = \mathcal{L}^{\nu}u(x,t), \quad x \in (-1,1] \times t \in (0,t_f], $$

$$ \begin{aligned} u(x,0) &= g(x), && x \in [-1,1], \\ u(-1,t) &= u(1,t) = 0, && t \in [0,t_f], \end{aligned} $$

که در آن $\tau \in (0,1)$ نشان‌دهنده مرتبه مشتق کسری کاپوتو نسبت به متغیر زمانی t است و $\mathcal{L}^{\nu}$ عملگر دیفرانسیل کسری کاپوتو از مرتبه $\nu \in (1,2)$ نسبت به متغیر مکانی x است که به صورت زیر می‌باشد:

$$ \mathcal{L}^{\nu}u(x,t) = c_2\, {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_{x}^{1+\nu_2}u(x,t) - c_1\, {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_{x}^{\nu_1}u(x,t) + f(x,t). $$

همچنین، مشتق کسری کاپوتو به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{0}^{C}\mathcal{D}_{x}^{\mu}f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_{0}^{x} \frac{f^{(n)}(s)}{(x-s)^{\mu-n+1}} ds, $$

* سخنران

که در آن $n \in \mathbb{N}$ و $n-1 < \mu < n$.

۲. روش شبه‌طیفی کسری

قضیه وجود و یکتایی جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات کسری در مرجع [۵] بررسی شده است.

چندجمله‌ای‌های ژاکوبی کسری. توابع ویژه مسأله اشتورم-لیوویل کسری [۸] که با $\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta,\mu}(x)$ نشان داده می‌شوند، عبارتند از:

$$\mathcal{P}_n^{\alpha,\beta,\mu}(x) = (1+x)^{-\beta+\mu-1} P_{n-1}^{\alpha-\mu+1,-\beta+\mu-1}(x), \qquad x \in [-1,1],$$

که $P_{n-1}^{\alpha-\mu+1,-\beta+\mu-1}(x)$ نشان‌دهنده چندجمله‌ای ژاکوبی استاندارد است که $-1 \leq \alpha < 2-\mu$ و $-1 \leq \beta < \mu - 1$. این چندجمله‌ای‌ها نسبت به تابع وزن

$$w(x) = (1-x)^{\alpha+1-\mu}(1+x)^{\beta+1-\mu},$$

در بازه $[-1,1]$ متعامدند، فرض کنید $0 < \mu < 1$ و V_N^μ نشان‌دهنده فضای همه چندجمله‌ای‌های کسری از مرتبه μ و از درجه N روی $[-1,1]$ به‌صورت

$$V_N^\mu := \text{span}\Big\{\mathcal{P}_n^\mu(x); \quad n = 1,2,\ldots,N, \quad 0 < \mu < 1\Big\},$$

باشد. در این‌صورت $u_N \in V_N^\mu$ تقریبی از جواب واقعی $u(x)$ روی $[-1,1]$ می‌باشد [۵].
بسط نودال (گره‌ای) تابع u_N در نقاط گره‌ای $-1 = x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N = 1$ برابر است با

$$u_N(x) = \sum_{j=1}^{N} u_N(x_j) h_j^\mu(x),$$

که در آن $h_j^\mu(x)$ نشان‌دهنده j-امین چندجمله‌ای لاگرانژ کسری مرتبه μ نسبت به نقاط گره‌ای $\{x_i\}_{i=1}^N$ به‌شکل زیر است [۴، ۹]:

$$h_j^\mu(x) = \Big(\frac{x-x_1}{x_j-x_1}\Big)^\mu \prod_{j\neq k=1}^{N} \frac{x-x_k}{x_j-x_k}, \qquad 2 \leq j \leq N.$$

به‌وضوح دیده می‌شود که $h_j^\mu(x_k) = \delta_{jk}$. ماتریس‌های مشتق از مرتبه σ و $\sigma+1$ که $0 < \sigma < 1$ به‌صورت زیر می‌باشد [۹].

- در حالت $\sigma = \mu$

$$\mathbf{D}_{ij}^\mu = \frac{1}{(x_j+1)^\mu} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} \beta_n^j P_{n-1}(x_i),$$

- در حالت $\sigma \neq \mu$

$$\mathbf{D}_{ij}^\sigma = \frac{1}{(x_j+1)^\mu} \sum_{n=1}^{N} \beta_n^j \sum_{q=\lceil \sigma-\mu \rceil}^{n-1} b_{nq} (x_i+1)^{q+\mu-\sigma},$$

- در حالت $\sigma = \mu$

$$\mathbf{D}_{ij}^{1+\mu} = \frac{1}{(x_j+1)^\mu} \sum_{n=2}^{N} \beta_n^j \Big[\frac{\Gamma(n+\mu)}{\Gamma(n)} \frac{n}{2} P_{n-2}^{1,1}(x_i)\Big],$$

- در حالت $\sigma \neq \mu$

$$\mathbf{D}_{ij}^{1+\sigma} = \frac{1}{(x_j+1)^{\mu}} \Big[\sum_{n=1}^{N} \beta_n^j \sum_{q=\lceil \sigma-\mu \rceil}^{n-1} b_{nq}^{*} (x_i+1)^{q+\mu-\sigma-1} \Big].$$

که در آن $b_{nq}^{*} = (q+\mu-\sigma) b_{nq}$. در روش شبه‌طیفی برای پیدا کردن مقادیر جواب تقریبی در نقاط درون‌یابی بایستی باقیمانده $R_N(x) = \mathcal{D}^{\nu} u_N(x) - f(x)$ در نقاط هم‌محلی $\{x_i\}_{i=2}^{N}$ صفر شود.
با انتخاب پارامتر درون‌یابی مناسب، دستگاه معادلات خطی زیر را داریم

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^{N} \mathbf{D}_{ij}^{\mu} u_N(x_j) - f(x_i) &= 0, \quad i = 2, 3, \ldots, N, \\ \mathbf{D}^{\mu} \mathbf{u}_N &= \mathbf{f}. \end{aligned}$$

۳. نتایج عددی

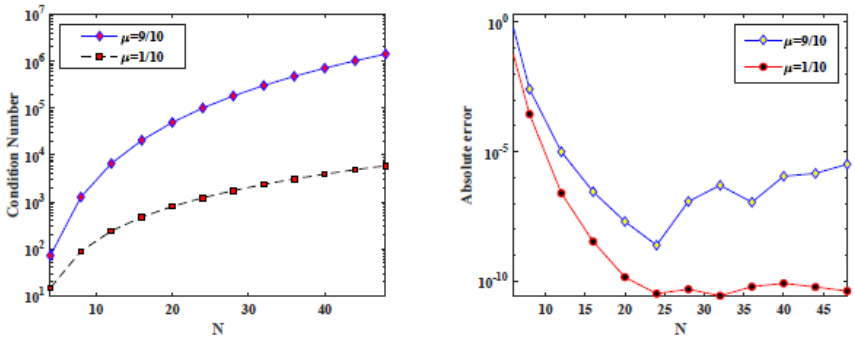
مثال ۱.۳. معادله دیفرانسیل کسری از مرتبه ν همراه با شرط اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_x^{\nu} u(x) = f(x), & x \in (-1, 1], \\ u(-1) = 0, \end{cases}$$

که در آن $0 < \nu < 1$ و $\theta = 6 + \frac{9}{17}$ و $f(x) = \dfrac{\Gamma(1+\theta)}{\Gamma(1+\theta-\nu)} (1+x)^{\theta-\nu}$.

جواب دقیق معادله عبارتست از

$$u(x) = (1+x)^{\theta}. \tag{1}$$



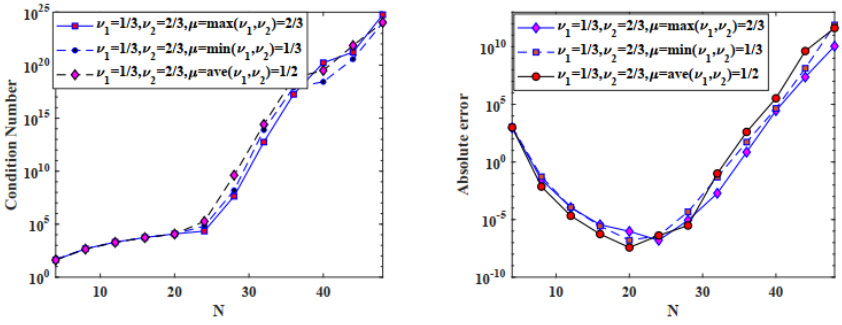
(ب) عدد حالت ماتریس $\mathbf{D}^{\mu}$. (آ) ماکزیمم خطا.

شکل ۱. منحنی ماکزیمم خطا و عدد حالت ماتریس مشتق $\mathbf{D}^{\mu}$ نسبت به درجه تقریب N حاصل از روش شبه‌طیفی کسری در نقاط اکسترمم‌های ژاکوبی و پارامتر درون‌یابی μ برای حل مثال ۱.۳.

مثال ۲.۳. معادله دیفرانسیل کسری چندمرتبه‌ای (مسأله نفوذ-انتقال کسری) همراه با شرایط مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} c_1 \, {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_x^{\nu_1} u(x) - c_2 \, {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_x^{1+\nu_2} u(x) = f(x), \\ u(-1) = 0, \; u(1) = u_f, \end{cases}$$

که در آن $0 < \nu_1, \nu_2 < 1$ ، $c_1 = 1$ ، $c_2 = \frac{111}{17} - \nu_2$ ، $u_f = 2^\theta$ که مقدار θ در مثال ۱.۳ داده شده است و هم‌چنین تابع $f(x)$ طوری انتخاب شده است که رابطه (۱) جواب واقعی مسأله باشد.



(آ) ماکزیمم خطا. (ب) عدد حالت ماتریس $\mathbf{D}_{tot}^{1+\nu}$.

شکل ۲. ماکزیمم خطا و عدد حالت ماتریس ضرایب $\mathbf{D}_{tot}^{1+\nu}$ نسبت به درجه تقریب N حاصل از روش شبه‌طیفی کسری در نقاط اکسترمم‌های ژاکوبی کسری و پارامترهای درون‌یابی $\mu = \nu_{\max}, \nu_{\min}, \nu_{\text{ave}}$ برای مثال ۲.۳.

مثال ۳.۳. معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی کسری چندمرتبه‌ای همراه با شرایط اولیه و مرزی زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} {}_{0}^{C}\mathcal{D}_t^{\tau} u(x,t) + {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_x^{\nu_1} u(x,t) = {}_{-1}^{C}\mathcal{D}_x^{1+\nu_2} u(x,t) + f(x,t), \\ u(\pm 1, t) = 0, \quad 0 \le t \le t_f, \\ u(x,0) = 0, \quad x \in [-1,1], \end{cases}$$

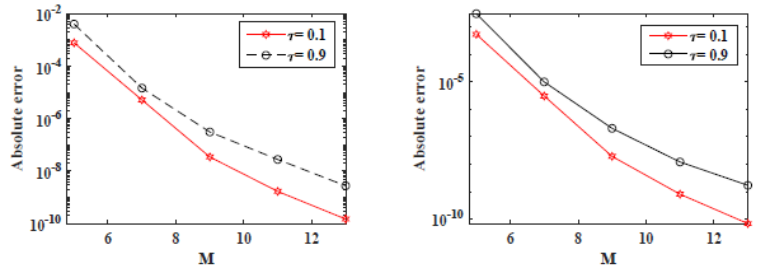
که در آن $0 < \nu_1, \nu_2 < 1$ و تابع $f(x)$ به قسمی است که جواب واقعی به شکل زیر باشد

$$u(x,t) = t^{6+2/3}(1+x)^{5+9/17}(x-1).$$

۴. دست‌آوردهای پژوهش

روش‌های شبه‌طیفی به‌طور وسیعی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، جزئی و کسری استفاده می‌شود. در این مقاله یک روش شبه‌طیفی کسری برای حل یک دسته از معادلات دیفرانسیل کسری و مسئله نفوذ-انتقال کسری ارائه شده است. به‌منظور طراحی این روش، جواب تقریبی مسأله به‌عنوان یک سری قطع شده بر حسب توابع لاگرانژ کسری در نظر گرفته شد.

نتایج عددی نشان می‌دهد که روش مورد نظر برای حل معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه σ و $1+\sigma$ بسیار موفق و کارا است. هم‌چنین نشان می‌دهد که با افزایش درجه تقریب N عدد حالت ماتریس ضرایب حاصل از روش به‌طور چشم‌گیری به‌خصوص برای مشتق مرتبه $1+\sigma$ افزایش می‌یابد و در برخی موارد این روش برای Nهای بزرگ واگرا می‌شود.



(آ) ماکزیمم خطا وقتی $\nu_1 = \frac{1}{3}, \nu_2 = \frac{2}{3}$. (ب) ماکزیمم خطا وقتی $\nu_1 = \frac{1}{10}, \nu_2 = \frac{9}{10}$.

شکل ۳. ماکزیمم خطای حاصل از روش شبه‌طیفی کسری در نقاط اکسترمم‌های ژاکوبی کسری برای پارامتر درون‌یابی (μ_x, μ_t) برای حل مثال ۳.۳.

بنابراین به‌عنوان کار تحقیقاتی جدید می‌توان با استفاده از پیش‌شرط‌سازهای مناسب روش را به‌گونه‌ای اصلاح نمود که با افزایش N عدد حالت ماتریس ضرایب روش رشد چندانی نداشته باشد.

مراجع

1. D. Baleanu, J. A. T. Machado and A. C. J. Luo, *Fractional Dynamics and Control,* Springer-Verlag, New York, 2012.
2. K. Burrage, A. Cardone, R. D'Ambrosio and B. Paternoster, *Numerical solution of time fractional diffusion systems,* Appl. Numer. Math. **116** (2017) 82–94.
3. M. R. Cui, *Compact alternating direction implicit method for two-dimensional time fractional diffusion equation,* J. Comput. Phys. **231** (2012) 2621–2633.
4. M. Delkhosh and K. Parand, *Generalized pseudospectral method: Theory and applications,* J. Comput. Sci. **34** (2019) 11–32.
5. K. Diethelm and N. J. Ford, *Analysis of fractional differential equations,* J. Math. Anal. Appl. **265** (2002) 229–248.
6. X. Li and C. Xu, *A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation,* SIAM J. Numer. Anal. **47** (3) (2009) 2108–2131.
7. X. Li and C. Xu, *Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation,* Commun. Comput. Phys. **8** (2010) 1016–1051.
8. M. Zayernouri and G. E. Karniadakis, *Fractional Sturm-Liouville eigen-problems: Theory and numerical approximations,* J. Comput. Phys. **252** (2013) 495–517.
9. M. Zayernouri and G. E. Karniadakis, *Fractional spectral collocation method,* SIAM J. Sci. Comput. **36** (1) (2014) A40–A62.

پست الکترونیکی: parisashiri93.ps@gmail.com
پست الکترونیکی: hajipour@sut.ac.ir

حل عددی مدل انتشار واکنشی مرتبه چهارم غیرخطی با مشتقات کسری زمانی با استفاده از روش بدون شبکه درونیابی نقطه‌ای شعاعی مبتنی بر فرم ضعیف

سید محمود ضابط زاده*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله به بررسی عددی یک مدل انتشار واکنشی مرتبه چهارم غیرخطی با مشتقات کسری زمانی می‌پردازیم. در آغاز توسط یک تغییر متغیر ساده، معادله انتشار واکنشی مرتبه چهارم به‌دستگاه مرتبه دوم تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از طرح‌های تفاضلی مناسب، مشتقات صحیح و کسری زمانی موجود در مدل را گسسته سازی کرده و دستگاه معادلات با مشتقات جزئی مستقل از زمان به‌دست می‌آوریم. گسسته سازی مکانی مدل نیز توسط روش بدون شبکه پتروف گالرکین موضعی، مبتنی بر توابع شکل درونیابی نقطه‌ای شعاعی، انجام می‌پذیرد و دستگاه غیرخطی حاصل به کمک الگوریتم پیشگو بهبودگر حل می‌شود. نهایتا با ارائه یک مثال عددی، فرآیند پیشنهادی آزموده می‌شود. نتایج عددی گزارش شده مؤید دقت، کارآیی و موفقیت آمیز بودن طرح پیشنهادی در مواجهه با مدل مورد بحث است.

واژه‌های کلیدی: مدل انتشار واکنشی مرتبه چهارم غیرخطی، مشتق کسری کاپوتو، روش بدون شبکه پروف گالرکین موضعی، توابع شکل درونیابی نقطه‌ای شعاعی، الگوریتم پیشگو بهبودگر.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A08, 33F05.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله، مدل انتشار واکنشی مرتبه چهارم غیرخطی با مشتقات کسری زمانی زیر مورد بررسی قرار خواهد گرفت [۵]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^\alpha \Delta u}{\partial t^\alpha} - \Delta u + \Delta^2 u = f(u) + g(\mathbf{x},t),\ (\mathbf{x},t) \in \Omega \times (0,T], \tag{۱}$$

که شرایط مرزی و اولیه عبارتند از

$$u(\mathbf{x},t) = \Delta u(\mathbf{x},t) = 0,\ (\mathbf{x},t) \in \partial\Omega \times [0,T], u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega, \tag{۲}$$

که در آن Δ عملگر لاپلاس دوبعدی بوده، $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ دامنه چندضلعی کراندار با مرز پیوسته لیپشیتزی $\partial\Omega$ و $0 < T < \infty$ است. جمله $\frac{\partial^\alpha \Delta u}{\partial t^\alpha}$ به رفتار نامتعارف زیر انتشار در فرآیند انتشار اشاره دارد. $g(\mathbf{x},t)$ و $u_0(\mathbf{x})$ توابع معلوم بوده و جمله واکنشی غیرخطی در این‌جا $f(u) = u - u^3$ در نظر گرفته می‌شود. منظور از $\frac{\partial^\alpha z(\mathbf{x},t)}{\partial t^\alpha}$ مشتق کسری کاپوتو است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^\alpha z(\mathbf{x},t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial z(\mathbf{x},s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

از آن‌جا که به‌دست آوردن جواب تحلیلی برای این نوع مسائل بسیار دشوار است، در این مقاله با استفاده از یک روش بدون شبکه مبتنی بر توابع شکل درونیابی نقطه‌ای شعاعی جواب تقریبی مناسب برای (۱) به‌دست می‌آوریم.

* سخنران

در ابتدا متغیر کمکی $\sigma = \Delta u$ را تعریف می‌کنیم. در این‌صورت (۱) و (۲) به مسئله زیر تغییر پیدا می‌کنند:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^\alpha \sigma}{\partial t^\alpha} - \sigma + \Delta\sigma = f(u) + g(\mathbf{x}, t), \\ \sigma - \Delta u = 0, \end{cases} \tag{۳}$$

با شرایط مرزی و اولیه زیر:

$$u(\mathbf{x}, t) = 0,\ (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \sigma(\mathbf{x}, t) \quad = 0,\ (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times [0, T], u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega. \tag{۴}$$

۲. گسسته‌سازی مدل

در این بخش، ابتدا به منظور گسسته‌سازی زمانی و به‌دست آوردن دستگاه معادلات مستقل از زمان، فاصله $[0, T]$ را به L قسمت مساوی $[t_k, t_{k+1}]$ (به ازای $k = 0, 1, ..., L-1$) تقسیم می‌کنیم، به‌طوری‌که $t_k = k.\tau$ و $\tau = \frac{T}{L}$ طول گام زمانی هستند. در این‌صورت، با توجه به [۲] و [۶]، می‌توان مشتقات صحیح و کسری زمانی موجود در (۳) را با طرح‌های تفاضلی مناسب دومرحله‌ای گسسته‌سازی کرد. از این‌رو، در گام زمانی $t = t_1$ یا به ازای $k = 0$، (۳) به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\begin{cases} u^1 - (2\mu + \tau)\sigma^1 + \tau\Delta\sigma^1 = u^0 - 2\mu\sigma^0 + \tau f(u^1) + \tau g^1, \\ -\Delta u^1 + \sigma^1 = 0, \end{cases} \tag{۵}$$

که در آن $u^k = u(\mathbf{x}, t_k)$، $\sigma^k = \sigma(\mathbf{x}, t_k)$ و $g^k = g(\mathbf{x}, t_k)$ هستند. $\mu = \frac{2\tau^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}$
همچنین در گام زمانی $t = t_{k+1}$ نیز دستگاه معادلات دیفرانسیل مستقل از زمان زیر نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} 3u^{k+1} - (\mu + 2\tau)\sigma^{k+1} + 2\tau\Delta\sigma^{k+1} = 4u^k - u^{k-1} + \mu\sum_{l=1}^{k}(b_{k-l+1}^\alpha - b_{k-l})\sigma^l \\ \qquad -\mu b_k\sigma^0 + 2\tau f(u^{k+1}) + 2\tau g^{k+1}, \\ \\ -\Delta u^{k+1} + \sigma^{k+1} = 0, \end{cases} \tag{۶}$$

که در آن $b_l^\alpha = (l+1)^\alpha - l^\alpha$، به ازای $l = 0, 1, ..., k$، است.
در این روابط، برای به‌دست آوردن یک مقدار اولیه برای u، می‌توان از شرایط اولیه مسئله در (۴) استفاده کرد.

اکنون، به‌منظور گسسته سازی مکانی دستگاه مستقل از زمان به‌دست آمده، مطابق روش بدون شبکه پتروف گالرکین موضعی [۱]، فرم ضعیف معادلات حاکم را به‌دست می‌آوریم؛ لذا طرفین دستگاه معادلات (۵) و (۶) را در تابع تست $w(\mathbf{x})$ ضرب کرده و روی دامنه Ω انتگرال‌گیری می‌کنیم، سپس از قضیه انتگرال گیری جزء به جزء استفاده می‌کنیم.
در این‌جا تابع پله‌ای هیوی ساید به‌عنوان تابع تست در نظر گرفته می‌شود. این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \Omega_i, \\ 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_i, \end{cases}$$

که در آن Ω_i زیر دامنه دلخواهی از دامنه Ω است. در این‌صورت فرم ضعیف معادلات (۵) و (۶) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \int_{\Omega_i} u^1 d\Omega - (2\mu + \tau)\int_{\Omega_i} \sigma^1 d\Omega + \tau\int_{\Gamma_i} \frac{\partial\sigma^1}{\partial n} d\Gamma = \int_{\Omega_i} u^0 d\Omega - 2\mu\int_{\Omega_i} \sigma^0 d\Omega \\ \qquad +\tau\int_{\Omega_i} f(u^1) d\Omega + \tau\int_{\Omega_i} g^1 d\Omega, \\ \\ -\int_{\Gamma_i} \frac{\partial u^1}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Omega_i} \sigma^1 d\Omega = 0. \end{cases} \tag{۷}$$

همچنین

(۸)
$$\begin{cases} ۳\int_{\Omega_i} u^{k+۱}d\Omega - (\mu+۲\tau)\int_{\Omega_i}\sigma^{k+۱}d\Omega + ۲\tau\int_{\Gamma_i}\frac{\partial\sigma^{k+۱}}{\partial n}d\Gamma = ۴\int_{\Omega_i}u^k d\Omega - \int_{\Omega_i}u^{k-۱}d\Omega \\ +\mu\sum_{l=۱}^{k}(b_{k-l+۱}^{\alpha}-b_{k-l}^{\alpha})\int_{\Omega_i}\sigma^l d\Omega - \mu b_k\int_{\Omega_i}\sigma^{\circ}d\Omega + ۲\tau\int_{\Omega_i}f(u^{k+۱})d\Omega + ۲\tau\int_{\Omega_i}g^{k+۱}d\Omega, \\ \\ -\int_{\Gamma_i}\frac{\partial u^{k+۱}}{\partial n}d\Gamma + \int_{\Omega_i}\sigma^{k+۱}d\Omega = ۰, \end{cases}$$

که در آن Γ_i به مرز دامنه Ω_i اشاره دارد و $n=(n_۱,n_۲)$ نشان دهنده بردار یکه خارج شونده مرز Γ_i است.

در ادامه، به‌منظور تقریب جواب‌ها در هر گام زمانی، آن‌ها را به‌صورت ترکیب خطی زیر در نظر می‌گیریم:

$$u^k=\sum_{j=۱}^{N}u_j^{(k)}\varphi_j(\mathbf{x})\ ,\ \sigma^k=\sum_{j=۱}^{N}\sigma_j^{(k)}\varphi_j(\mathbf{x}), \tag{۹}$$

که در آن $u_j^{(k)}$ و $\sigma_j^{(k)}$ ضرائب مجهول بوده و باید محاسبه شوند. به‌علاوه، $\{\varphi_j(\mathbf{x})\}_{j=۱}^{N}$مجموعه توابع پایه‌ای شکل وابسته به داده‌های پراکنده یا نقاط میدانی $\{\mathbf{x}_j\}_{j=۱}^{N}\subseteq\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$ هستند که توسط روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی موضعی به‌دست می‌آیند [۲، ۴]. همچنین، از تابع اسپلاین صفحه نازک[۱](TPS) به‌عنوان تابع پایه شعاعی استفاده می‌شود. این تابع به‌صورت $R(r)=r^۴\ln(r)$ تعریف می‌شود. تنها متغیر این تابع r بوده که به‌صورت $r=\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|_۲$ تعریف می‌شود.

در ادامه نیاز به یک مجموعه دیگر از نقاط پراکنده در دامنه Ω داریم. این نقاط را نقاط ارزیاب می‌نامیم. در این‌جا مجموعه نقاط ارزیاب با نقاط میدانی یکسان در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم مجموعه نقاط ارزیاب به دو مجموعه نقاط داخلی و مرزی Ω افراز شود. این دو مجموعه نقاط را به ترتیب با $\chi_I=\{\mathbf{x}_i\}_{i=۱}^{N_I}$ و $\chi_B=\{\mathbf{x}_i\}_{i=۱}^{N_B}$ نشان می‌دهیم، به‌طوری‌که $N_I+N_B=N$. اکنون به‌ازای هر یک از نقاط ارزیاب $\mathbf{x}_i\in\chi_I$ یک دامنه پوششی Ω_i حول این نقطه در نظر می‌گیریم، که در این‌جا Ω_i دایره به مرکز $\mathbf{x}_i$ و شعاع $r_{\circ}$ است. اکنون به‌ازای هر یک از نقاط $\mathbf{x}_i\in\chi_I$، که $i=۱,...,N_I$، ترکیب خطی (۹) را در (۷) و (۸) قرار می‌دهیم. از سویی دیگر، به ازای نقاط مرزی $\mathbf{x}_i\in\chi_B$ (برای $i=۱,...,N_B$) بایستی شرایط مرزی همگن داده شده در (۴) اعمال شود. برای این منظور، رابطه (۹) را در شرایط مرزی (۴) جایگزین می‌کنیم؛ لذا یک دستگاه جبری غیرخطی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$AU^{(k+۱)}=\sum_{s=۰}^{k}A_sU^s+f(U^{k+۱})+B,\qquad k=۰,۱,\dots, \tag{۱۰}$$

که در آن $U^{(k+۱)}$ بردار ضرائب مجهول مسئله یا جواب در گام زمانی $t_{k+۱}$ بوده و $U^{(s)}$، به ازای $s=۰,\dots,k$، بردارهای جواب به‌دست آمده در گام‌های زمانی قبلی هستند. بردار B، بردار معلوم، $A,\{A_s\}_{s=۰}^{k}$ ماتریس‌های $N\times N$ و $f(U^{k+۱})$ جمله جبری غیر خطی دستگاه هستند. جواب‌های این دستگاه تقریب توابع $u^{k+۱}$ و $\sigma^{k+۱}$ هستند. در مواجهه با این دستگاه غیرخطی، الگوریتم پیشگو بهبودگر [۳] مورد استفاده قرار می‌گیرد. این الگوریتم به‌صورت مختصر در الگوریتم زیر ارائه شده است.

۳. نتایج عددی

در این بخش، به منظور محک زدن دقت و کارآیی روش ارائه شده در بخش‌های قبل، مثالی عددی ارائه می‌کنیم. دامنه Ω را دو حالت مربع شکل و L شکل فرض کرده و یک مجموعه نقاط پراکنده یکنواخت به‌عنوان هر دو مجموعه نقاط میدانی و نقاط ارزیاب در این دامنه‌ها در نظر می‌گیریم (شکل ۱). دقت جواب‌های عددی به‌دست

[۱] Thin Plate Spline

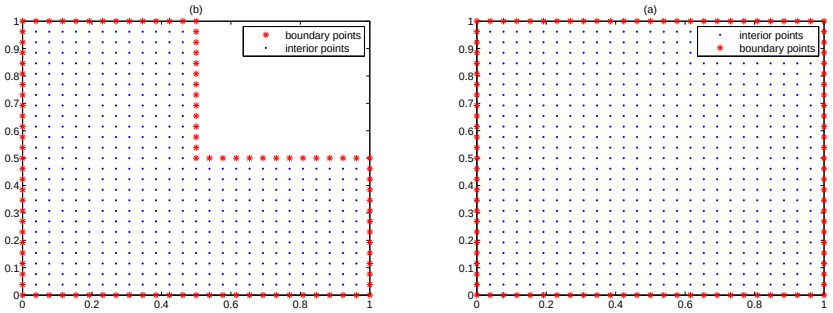
الگوریتم ۱ الگوریتم پیشگو بهبودگر

Consider initial guess $U^{(k+1),*} = U^{(k)}$
$switch = 1$
while $switch > 0$ **do**
  Solve system (10) as follows:
  $A\widehat{U}^{(k+1)} = \sum_{s=0}^{k} A_s U^{(s)} + f(U^{(k+1),*}) + B$
  if $\|U^{(k+1),*} - \widehat{U}^{(k+1)}\| < \varepsilon$ **then**
    $switch = -1,$
  else
    $U^{(k+1),*} = \widehat{U}^{(k+1)}.$
  end if
end while

آمده توسط دو نوع خطای زیر آزموده می‌شود:

$$\varepsilon_u = \|u(\mathbf{x}, t_k) - \widehat{u}(\mathbf{x}, t_k)\|_\infty, \quad RMS_u = \frac{1}{\sqrt{N}} \|u(\mathbf{x}, t_k) - \widehat{u}(\mathbf{x}, t_k)\|_2,$$

که در آن $u(\mathbf{x}, t_k)$ و $\widehat{u}(\mathbf{x}, t_k)$ به ترتیب به جواب‌های واقعی و تقریبی اشاره دارند.



شکل ۱. دامنه مربع شکل Ω_1 (a) و دامنه Lشکل Ω_2 (b) و توزیع نقاط پراکنده یکنواخت درونی و مرزی.

مثال ۱.۳. مدل انتشار واکنشی مرتبه چهارم غیرخطی با مشتقات کسری زمانی (۳) را با جواب واقعی

$$u(x, y, t) = t^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y),$$

و

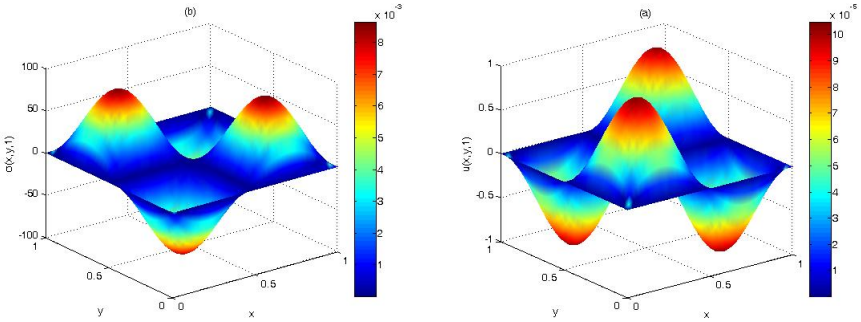
$$\Delta u(x, y, t) = \sigma(x, y, t) = -8\pi^2 t^2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y),$$

در نظر می‌گیریم [۵]. شرایط مرزی و اولیه مسئله و همچنین توابع $g(x, y, t)$ و $u_0(x, y)$ از جواب واقعی مسئله نتیجه می‌شوند. با اجرای فرآیند پیشنهادی در بخش‌های قبل بر روی این مدل و به‌دست آوردن جواب‌های تقریبی، خطای محاسباتی در جدول و شکل‌های ارائه شده گزارش شده است.

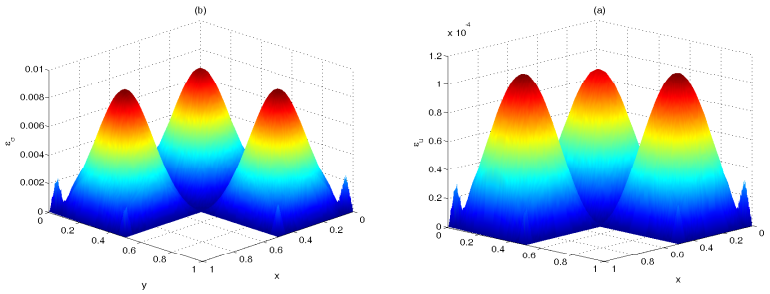
جدول و تصاویر مؤید دقت و کارآیی طرح عددی پیشنهادی در مواجهه با مدل انتشار واکنشی غیرخطی مرتبه چهارم است.

جدول ۱. خطای محاسبه $u(x,y,1)$ و $\sigma(x,y,1)$ در $T=1$ به ازای $\tau=0/01$ و مقادیر مختلف α روی دامنه‌های Ω_1 و Ω_2.

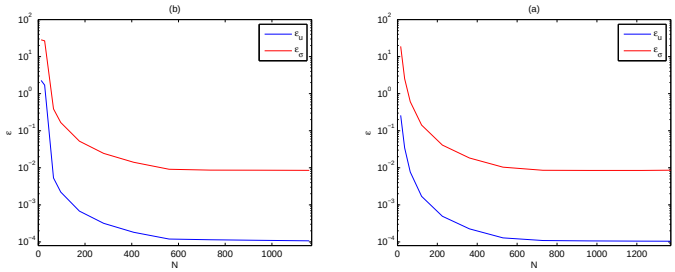
		Ω_1		
α	ε_u	RMS_u	ε_σ	RMS_σ
۰/۱	$۱/۰۲۴۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۰۴۴۲ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۳۲۴۰ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۶۷۰۴ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۳	$۱/۱۰۳۵ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۴۳۱۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۹۴۹۸ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۹۷۵۷ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۵	$۱/۳۵۳۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۶۵۳۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۰۹۲۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۹۴۰۲ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۷	$۱/۸۵۶۴ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۱۰۹۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۴۸۹۱ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۸۷۹۰ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۹	$۲/۵۲۷۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۲۳۹۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰۱۸۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۴۶۹۸ \times ۱۰^{-۳}$
		Ω_2		
۰/۱	$۱/۰۸۳۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۱۸۴۶ \times ۱۰^{-۵}$	$۸/۴۴۸۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۳/۷۰۰۳ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۳	$۱/۱۶۲۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۵/۵۶۶۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۹/۰۷۳۵ \times ۱۰^{-۳}$	$۴/۰۰۲۳ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۵	$۱/۴۱۳۱ \times ۱۰^{-۴}$	$۶/۷۷۲۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۱۰۴۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۹۵۶۸ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۷	$۱/۹۱۵۳ \times ۱۰^{-۴}$	$۹/۲۰۰۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۵۰۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۶/۸۷۶۳ \times ۱۰^{-۳}$
۰/۹	$۲/۵۸۵۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۲۴۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	$۲/۰۳۰۴ \times ۱۰^{-۲}$	$۹/۴۴۲۱ \times ۱۰^{-۳}$



شکل ۲. جواب‌های عددی $u(x,y,1)$ (a) و $\sigma(x,y,1)$ (b) و خطای مطلق روی Ω_1 به‌ازای $N=1369$، $\tau=0/01$ و $\alpha=0/2$.



شکل ۳. خطای مطلق جواب‌های عددی $u(x,y,1)$ (a) و $\sigma(x,y,1)$ (b) روی Ω_2 به ازای $N=1160$، $\tau=0/01$ و $\alpha=0/2$.



شکل ۴. تأثیر افزایش نقاط میدانی بر خطای مطلق جواب‌های عددی روی دامنه‌های Ω_1 (a) و Ω_2(b) به‌ازای $\tau = 0/01$ و $\alpha = 0/2$.

مراجع

1. S. N. Atluri and S. Shen, *The meshless local petrov-Galerkin (MLPG) method: A simple and lesscostly alternative to the finite element and boundary element methods*, Comput. Model. Eng. Sci. **3** (1) (2002) 11–51.
2. H. R. Ghehsareh, A. Zaghian and S. M. Zabetzadeh, *The use of local radial point interpolation method for solving two-dimensional linear fractional cable equation*, Neural. Comput. Appl. **29** (10) (2018) 745–754.
3. M. Ilati and M. Dehghan, *Application of direct meshless local Petrov–Galerkin (DMLPG) method for some Turing-type models*, Eng. Comput. **33** (1) (2017) 107–124.
4. G. R. Liu and Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*, Springer, Netherlands 2005.
5. Y. Liu, Y. Du, H. Li, S. He and W. Gao, *Finite difference/finite element method for a nonlinear time-fractional fourth-order reaction–diffusion problem*, Comput. Math. Appl. **70** (4) (2015) 573–591.
6. Z. Z. Sun and X. Wu, *A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system*, Appl. Numer. Math. **56** (2) (2006) 193–209.

پست الکترونیکی: zabetzadeh@yahoo.com

تحقق انتهای طیف‌ها به وسیله ماتریس‌های فلشی حقیقی متقارن

محمد جواد فاضلی*
گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
و مهدی پناهی
گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران

چکیده. مسأله ساختن یک ماتریس فلشی حقیقی متقارن A، از روی نوع خاصی از این اطلاعات طیفی مشخص که $\lambda^{(j)}$ یک مقدارویژه زیر ماتریس اصلی پیشرو $j \times j$، A_j، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، از A بوده و $(\lambda^{(n)}, x)$ یک جفت‌ویژه A باشد، را در نظر می‌گیریم. برای این مسأله جوابی وجود دارد، یک شرط لازم و کافی برای این مسأله ارائه می‌دهیم. همچنین شرایط کافی برای این که ماتریس ساخته شده، نامنفی باشد را بیان می‌کنیم. نتایج ما ساختاری هستند و یک روش الگوریتمی سودمند برای ساخت چنین ماتریسی را فراهم می‌کنند.
واژه‌های کلیدی: ماتریس‌های فلشی حقیقی متقارن، مقدارویژه.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65F15, 65F18, 15A18.

۱. پیش‌گفتار

ماتریس فلشی حقیقی متقارن به شکل

$$A = \begin{bmatrix} a_۱ & b_۱ & b_۲ & \cdots & b_{n-۱} \\ b_۱ & a_۲ & & & \\ b_۲ & & a_۳ & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_{n-۱} & & & & a_n \end{bmatrix}, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}, \tag{۱}$$

را در نظر می‌گیریم. ساخت یک ماتریس خاص با خصوصیات طیفی معین، که این داده‌های طیفی ممکن است شامل اطلاعات کامل و یا جزئی از مقادیر ویژه یا بردارهای ویژه باشند، به مسأله مقدار ویژه معکوس موسوم است. این مسائل کاربردهای زیادی در نظریه کنترل، ژئوفیزیک، مکانیک، مسأله اشتورم ـ لیوویل و ... دارند [۱، ۲]. در این مقاله یک مسأله مقدارویژه معکوس را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. این مسأله در مورد ساختن یک ماتریس $n \times n$ فلشی حقیقی متقارن خاص به شکل (۱) می‌باشد به نحوی که در شرایط طیفی معینی صدق کند. این مسأله که در زیر آمده است، در [۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

مسأله ۱. اعداد حقیقی $\lambda^{(۱)}$، $\lambda^{(۲)}$، ...، $\lambda^{(n)}$ و بردار حقیقی $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T$ داده شده‌اند. یک ماتریس $n \times n$، فلشی حقیقی متقارن A به شکل (۱) را بیابید که در آن a_iها برای $i = ۲, ۳, \ldots, n$، متمایز و همه b_iها برای $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، مثبت باشند، به‌طوری که $\lambda^{(j)}$ یک مقدارویژه زیرماتریس اصلی پیشرو $j \times j$، A_j از A، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، بوده و $(\lambda^{(n)}, x)$ یک جفت‌ویژه A باشد.

فرمول‌های ارائه شده در [۳] برای حل مسأله ۱، به ماتریسی منجر می‌شود که در شرایط مورد نظر صدق نمی‌کند. برای مثال اعداد حقیقی

* سخنران

$$\begin{array}{cccc} \lambda^{(۱)} & \lambda^{(۲)} & \lambda^{(۳)} & \lambda^{(۴)} \\ ۲ & \frac{۵-\sqrt{۶۵}}{۲} & -۲ & \frac{۵+\sqrt{۸۵}}{۲}, \end{array}$$

و بردار حقیقی

$$x = (\frac{۱}{۲}(\sqrt{۸۵}-۱), ۴, ۲, ۱)^T,$$

در شرایط ارائه شده در [۳، قضیه۲] صدق می‌کنند، اما ماتریس نتیجه شده با استفاده از این قضیه به صورت

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۲ & ۱ \\ ۴ & ۳ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix},$$

می‌باشد، که دارای عناصر قطری تکراری است. در این مقاله شرایط لازم و کافی برای حل مسأله ۱، ارائه می‌شود که ما را به جوابی درست هدایت می‌کند.

در سرتاسر این مقاله فرض کنید A_j زیرماتریس اصلی پیشرو $j \times j$ از A، $P_j(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه A_j، $\lambda^{(j)}$ یک مقدارویژه A_j و $\sigma(A_j)$ نشان‌دهنده طیف A_j است.

۲. لم‌ها و قضایای پیش‌نیاز

لم زیر که یک رابطه بازگشتی برای محاسبه چندجمله‌ای مشخصه زیرماتریس اصلی پیشرو $j \times j$، A_j از A، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، را ارائه می‌کند، با محاسبه مستقیم اثبات می‌شود.

لم ۱.۲. فرض کنید A یک ماتریس فلشی حقیقی متقارن $n \times n$ به شکل (۱) و $P_j(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخصه زیرماتریس اصلی پیشرو $j \times j$، A_j، برای $j = ۱, ۲, \ldots, n$، از A باشد. در این‌صورت دنباله $\{P_j(\lambda)\}_{j=۱}^{n}$ در رابطه بازگشتی

$$P_۱(\lambda) = (\lambda - a_۱), \quad P_۲(\lambda) = (\lambda - a_۲)P_۱(\lambda) - b_۱^۲, \quad \ldots,$$

$$P_j(\lambda) = (\lambda - a_j)P_{j-۱}(\lambda) - b_{j-۱}^۲ \prod_{i=۲}^{j-۱}(\lambda - a_i), \quad j = ۳, ۴, \ldots, n,$$

صدق می‌کند. رابطه بازگشتی فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$P_j(\lambda) = \prod_{i=۱}^{j}(\lambda - a_i) - \sum_{k=۱}^{j-۱}(b_k^۲ \prod_{i=۲,\ i\neq k+۱}^{j} (\lambda - a_i)), \quad j = ۱, ۲, \ldots, n. \qquad (۲)$$

اولین لم زیر با استفاده از رابطه بازگشتی (۲) به راحتی قابل اثبات می‌باشد و دومی که به خاصیت اینرسی معروف است در [۴] ثابت شده است.

لم ۲.۲. فرض کنید A یک ماتریس فلشی حقیقی متقارن $n \times n$ به شکل (۱) باشد که در آن a_jها (عناصر قطری A)، برای $j = ۲, ۳, \ldots, n$، متمایز و همه b_iها برای $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، مثبت باشند. در این‌صورت

۱) مقادیر ویژه $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_n از A همگی ساده هستند.

۲) صفرهای چندجمله‌ای مشخصه $P_{j-۱}(\lambda)$، متمایز با صفرهای $P_j(\lambda)$ می‌باشند.

لم ۳.۲. فرض کنید A یک ماتریس فلشی حقیقی متقارن $n \times n$ به شکل (۱) باشد به‌طوری که $b_i \neq ۰$، برای $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$. همچنین فرض کنید $\lambda_۱^{(j)}$ و $\lambda_j^{(j)}$، به ترتیب مقدارویژه مینیمال و ماکسیمال زیرماتریس

اصلی پیشرو $j \times j$، A_j، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، از A باشند. در این‌صورت

$$\lambda_۱^{(j)} < \cdots < \lambda_۱^{(۳)} < \lambda_۱^{(۲)} < \lambda_۱^{(۱)} < \lambda_۲^{(۲)} < \lambda_۳^{(۳)} < \cdots < \lambda_j^{(j)},$$

و برای هر $j = ۲, ۳, \ldots, n$، داریم

$$\lambda_۱^{(j)} < a_i < \lambda_j^{(j)}, \quad i = ۲, ۳, \ldots, j.$$

۳. حل مسأله ۱

اکنون نتایج اصلی این مقاله را برای حل مسأله ۱، بیان می‌کنیم. اثبات قضیه زیر به دلیل طولانی بودن حذف می‌گردد.

قضیه ۱.۳. n عدد حقیقی $\lambda^{(۱)} < \lambda^{(۲)} < \cdots < \lambda^{(n)}$ و یک بردار حقیقی $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T$ داده شده اند. در این‌صورت یک ماتریس فلشی حقیقی متقارن $n \times n$ به شکل (۱) موجود است که تمام درایه‌های قطر اصلی آن، a_i، $i = ۲, ۳, \ldots, n$، متمایز و همه b_jها، $j = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، مثبت هستند، به نحوی که $\lambda^{(j)}$ یک مقدار ویژه ماکسیمال زیرماتریس اصلی پیشرو A_j، $j \times j$ برای $j = ۱, ۲, \ldots, n$، از A بوده و $(\lambda^{(n)}, x)$ یک جفت‌ویژه A باشد اگر و تنها اگر شرایط

$$x_۱ x_i > ۰, \quad i = ۱, ۲, \ldots, n, \quad \frac{x_۱^۲}{x_۲^۲} \geq \frac{۴(\lambda^{(n)} - \lambda^{(۲)})}{\lambda^{(۲)} - \lambda^{(۱)}}, \tag{۳}$$

$$\frac{x_۱^۲}{x_j^۲} \geq \frac{۴(\lambda^{(n)} - \lambda^{(j)}) \prod_{i=۲}^{j-۱} (\lambda^{(j)} - a_i)}{P_{j-۱}(\lambda^{(j)})}, \quad j = ۳, ۴, \ldots, n, \tag{۴}$$

$$\frac{x_{k+۱}}{x_{j+۱}} \neq \frac{b_k}{b_j}, \quad j = ۲, ۳, \ldots, n-۱, \quad k = ۱, ۲, \ldots, j-۱,$$

برقرار باشند.

نکته ۲.۳. نتایج قضیه ۱.۳، برقرار است هرگاه $\lambda^{(j)}$ را مقدارویژه مینیمال A_j در نظر بگیریم. در این حالت باید داشته باشیم

$$\lambda^{(n)} < \cdots < \lambda^{(۲)} < \lambda^{(۱)},$$

و شرط (۳) به صورت $x_۱ x_i < ۰$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$، تبدیل می‌شود.

نتیجه ۳.۳. n عدد حقیقی

$$\lambda^{(۱)} < \lambda^{(۲)} < \cdots < \lambda^{(n)},$$

و بردار حقیقی $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T$ داده شده اند. ماتریس فلشی حقیقی متقارن $n \times n$ نامنفی به شکل (۱) وجود دارد به‌طوری که $\lambda^{(j)}$ مقدار ویژه ماکسیمال زیرماتریس اصلی پیشرو $j \times j$، A_j، $j = ۱, ۲, \ldots, n$، از A بوده و $(\lambda^{(n)}, x)$ یک جفت‌ویژه A باشد اگر شرایط (۳)، (۴) و

$$\lambda^{(۱)} \geq ۰, \quad \lambda^{(n)} \geq b_{j-۱} \frac{x_۱}{x_j}, \quad j = ۲, ۳, \ldots, n, \tag{۵}$$

برقرار باشند.

اثبات. از برهان قضیه ۱.۳، شرایط (۳) و (۴) تضمین می‌کند که سیستم معادلات

$$P_j(\lambda^{(j)}) = ۰, \quad j = ۱, ۲, \ldots, n,$$
$$Ax = \lambda^{(n)} x,$$

جواب‌های حقیقی a_j و جواب‌های مثبت b_{j-1} دارد. نشان دادن نامنفی بودن درایه‌های روی قطر اصلی (یعنی a_jها) باقی می‌ماند. به وضوح از (۵)، $a_1 = \lambda^{(1)} \geq 0$ و

$$a_j = \lambda^{(n)} - b_{j-1}\frac{x_1}{x_j} \geq 0, \quad j = 2, 3, \ldots, n.$$

□

مثال ۴.۳. اعداد حقیقی

$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\lambda^{(3)}$	$\lambda^{(4)}$	$\lambda^{(5)}$	$\lambda^{(6)}$
۳/۷۵۴۲	۴/۴۰۱۳	۹/۷۶۱۸	۱۰/۲۵۶۳	۱۱/۵۷۷۸	۱۱/۵۷۸۹

و بردار حقیقی

$$x = (-0/6942, -0/0742, -0/52, -0/2501, -0/4237, -0/0123)^T,$$

در شرایط نتیجه ۳.۳، صدق می‌کنند. طبق راهکارهای ارائه شده در اثبات قضیه ۱.۳، با استفاده از این داده‌ها ماتریس فلشی حقیقی متقارن نامنفی

$$A = \begin{bmatrix} 3/7542 & 0/9006 & 6/1056 & 1/9487 & 4/016 & 0/1232 \\ 0/9006 & 3/1479 & 0 & 0 & 0 & \\ 6/1056 & 0 & 3/4273 & 0 & 0 & \\ 1/9487 & 0 & 0 & 6/1696 & 0 & \\ 4/016 & 0 & 0 & 0 & 4/999 & \\ 0/1232 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/6291 \end{bmatrix},$$

را می‌توان ساخت که طیف ماتریس‌های A_j عبارتند از:

$$\begin{aligned}
\sigma(A_1) &= \{3/7542\}, \\
\sigma(A_2) &= \{2/5008, 4/4013\}, \\
\sigma(A_3) &= \{-2/5863, 3/1539, 9/7618\}, \\
\sigma(A_4) &= \{-2/796, 3/1538, 5/8848, 10/2563\}, \\
\sigma(A_5) &= \{-3/7669, 3/1535, 4/5001, 6/0335, 11/5778\}, \\
\sigma(A_6) &= \{-3/7678, 3/1535, 4/4989, 4/6301, 6/0335, 11/5789\},
\end{aligned}$$

و

$$Ax = (11/5789)x.$$

مراجع

1. M. T. Chu and G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and Application*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, New York, 2005.
2. X. Huang, X. Hu and L. Zhang, *Physical parameters reconstruction of a fixed-fixed mass-spring system from its characteristic data,* J. Comput. Appl. Math. **206** (2) (2007) 645–655.
3. J. Peng, X.Y. Hu and L. Zhang, *Two inverse eigenvalue problems for a special kind of matrices*, Linear Algebra Appl. **416** (2-3) (2006) 336–347.
4. J. Stoer and R. Bulirsch, *Introduction to Numerical Analysis*, Texts in Applied Mathematics, Vol. 12. Springer-Verlag, New York, 2002.

پست الکترونیکی: mohammadjavad5799@yahoo.com
پست الکترونیکی: mpanahi@birjand.ac.ir

حل عددی معادله غیرخطی قرنیه

رقیه کتانی*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده. در این مقاله یک مدل ریاضی از شکل قرنیه چشم که یک مسأله مقدار مرزی است، معرفی می‌شود. در ادامه با تبدیل این مسأله به یک معادله انتگرال از روش هم‌مکانی برای حل عددی مدل استفاده خواهد شد. در پایان نتایج عددی، کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهند.
واژه‌های کلیدی: شکل قرنیه، مدل ریاضی، روش هم‌مکانی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 45G15, 65R20.

۱. پیش‌گفتار

بینایی حس حیاتی انسان است و چشم ارگان اصلی است که ما را قادر به دیدن می‌کند. حدود دو سوم قدرت انکساری را قرنیه چشم فراهم می‌نماید، از این رو به درک جزییات آناتومی قرنیه و اپتیک توجه زیادی شده است. بسیاری از اختلالات بینایی از برخی خطاهای هندسه قرنیه ناشی می‌شود. به عنوان مثال بیماری‌های شایع نظیر نزدیک‌بینی، دوربینی، قوز قرنیه و آستیگماتیسم نتایج هندسه اشتباه قرنیه هستند. موفقیت جراحی انکساری و لنزهای تماسی بستگی زیادی به دانش توپوگرافی قرنیه و مدل‌های توصیف کننده آن دارد. بنابراین، برای اهداف چشم پزشکی، توصیف دقیق شکل قرنیه بسیار مهم است.

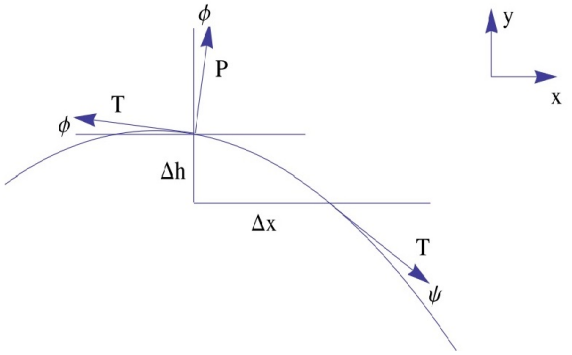
مدل‌های متنوعی برای شکل قرنیه توسط پژوهشگران پیشنهاد شده است. دسته‌ای از این مدل‌ها براساس تئوری پوسته ساخته شده‌اند. این مدل‌ها معمولاً پیچیده هستند اما جزئیات فیزیکی زیادی را توصیف می‌کنند [۲]. برخی از مدل‌های کامپیوتری قرنیه بر اساس روش‌های اجزا محدود ارائه شده‌اند [۱]. همچنین مدل‌هایی نیز وجود دارند که قرنیه را با استفاده از تقریب‌های چندجمله‌ای زرنیک توصیف می‌کنند [۴]. در این مقاله مدلی که ابتدا در [۵] ارائه و سپس در [۷] تعمیم یافت را در نظر می‌گیریم. با تبدیل مسأله مقدار مرزی به‌دست آمده در این مدل به یک معادله انتگرال، درصدد حل آن با روش هم‌مکانی خواهیم بود. در نهایت کارایی روش هم‌مکانی را با مقایسه نتایج عددی به‌دست آمده با نتایج ارائه شده در [۶] خواهیم آزمود.

۲. مدل‌سازی

هندسه قرنیه را متقارن با شعاع R در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که قرنیه یک غشاء است به این معنا که خمش نداشته و دارای تنش ثابتی است. همچنین تنوع در توزیع ضخامت را نادیده گرفته و بنابراین تنها کافی است فقط یک سطح از قرنیه مدل‌سازی شود.

با توجه به تقارن شعاع، فقط قسمت $h = h(x)[m]$ از قرنیه را در نظر می‌گیریم و برآیند نیروهای وارد بر آن را محاسبه می‌کنیم (شکل ۱). همچنین فشار ثابت $P[\frac{N}{m}]$ که در جهت نرمال به برش مقطعی از قرنیه وارد می‌شود را حساب می‌کنیم. تنش $T[N]$ به‌صورت مماس و نیروهای ارتجاعی متناسب با h عمل می‌کنند. نیروهای ارتجاعی به دلیل ویژگی الاستیکی قرنیه برای مدل در نظر گرفته شده‌اند.

* سخنران



شکل ۱. قطع قرنیه.

فرض می‌کنیم $h \in C^۲$، فاصله x از مرکز تقارن ثابت است و اختلال کوچک Δx را در نظر می‌گیریم. همچنین فرض می‌کنیم که فشار در طول این بخش ثابت است و نیروها در جهت y برآیند می‌شوند (شکل ۱) در این صورت داریم

$$T\sin(\phi) + T\sin(\psi) + P\cos(\phi)\Delta x - kh\Delta x = ۰, \tag{۱}$$

که در آن k ثابت متناسب با نیروی ارتجاعی است. با توجه به شکل ۱ می‌توان نوشت

$$\sin(\phi) = \frac{h'(x)}{\sqrt{۱ + (h'(x))^۲}}, \qquad \sin(\psi) = \frac{h'(x+\Delta x)}{\sqrt{۱ + (h'(x+\Delta x))^۲}},$$

و بنابراین $P\cos(\phi) = \frac{P}{\sqrt{۱+(h'(x))^۲}}$. در ادامه با جای‌گذاری در رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$T\left(\frac{h'(x+\Delta x)}{\sqrt{۱ + (h'(x+\Delta x))^۲}}\right) - \frac{h'(x)}{\sqrt{۱ + (h'(x))^۲}} + \frac{P\Delta x}{\sqrt{۱ + (h'(x))^۲}} - kh\Delta x = ۰.$$

با تقسیم طرفین رابطه بالا بر Δx و $\Delta x \to ۰$ رابطه زیر به دست می‌آید

$$-T\frac{h''(x)}{\sqrt{(۱ + (h'(x))^۲)^{۳/۲}}} + kh(x) = \frac{P}{\sqrt{۱ + (h'(x))^۲}}. \tag{۲}$$

در ادامه چون انحراف سطح قرنیه اندک است، برخی ساده‌سازی‌ها را انجام می‌دهیم. به عبارت دیگر می‌توان نوشت

$$\sin(\phi) \approx \tan(\phi) = -h'(x), \qquad \sin(\psi) \approx \tan(\psi) = h'(x+\Delta x).$$

به این ترتیب معادله ساده شده زیر برای توصیف شکل قرنیه حاصل می‌شود

$$-Th''(x) + kh(x) = \frac{P}{\sqrt{۱ + (h'(x))^۲}}. \tag{۳}$$

در نهایت با استفاده از تغییر متغیرهای $h^* = \frac{h}{R}$ و $x^* = \frac{x}{R}$، معادله (۳) به مسأله مقدار مرزی

$$-h''(x) + ah(x) = \frac{b}{\sqrt{۱ + (h'(x))^۲}},$$
$$h(۱) = ۰, \qquad h'(۰) = ۰, \tag{۴}$$

تبدیل می‌شود که در آن $a := \frac{kR^۲}{T}$ و $b := \frac{PR}{T}$.

۳. وجود و یکتایی جواب

معادله (۲) را می‌توان به‌صورت $T(\frac{h'}{\sqrt{۱+h'^۲}})' = kh - \frac{P}{\sqrt{۱+h'^۲}}$ نوشت، زیرا $(\frac{h'}{\sqrt{۱+h'^۲}})' = \frac{h''}{\sqrt{(۱+h'^۲)^۳}}$. بنابراین مسأله مقدار مرزی (۴) معادل

$$(\frac{h'}{\sqrt{۱+h'^۲}})' = ah(x) - \frac{b}{\sqrt{۱+(h'(x))^۲}},$$
$$h(۱) = h'(۰) = ۰, \qquad (۵)$$

است.

قضیه ۱.۳. [۳] فرض کنید $a > ۰$ و $b > ۰$ داده شده باشند، در این صورت جواب یکتا h از مسأله مقدار مرزی (۵) موجود است که در شرایط زیر صدق می‌کند:
(I) جواب h از (۵) برای هر $t \in [۰, ۱)$ در $h(t) > ۰$ و برای هر $t \in [۰, ۱]$ در $h(t) < \frac{b}{a}$ صدق می‌کند.
(II) جواب h از (۵) برای هر $t \in (۰, ۱]$ به گونه‌ای است که $h'(t) < ۰$ و $h''(t) \le ۰$.
(III) جواب h از (۵) برای هر $t \in [۰, ۱]$ به گونه‌ای است که $h'(t) > -R$ که در آن $R = \sqrt{\exp(\frac{۲b^۲}{a}) - ۱}$.

اثبات. مرجع [۳] ملاحظه شود. □

۴. روش هم‌مکانی

مسأله مقدار مرزی (۴) را می‌توان به معادله انتگرال

$$h(x) = \frac{b}{\sqrt{a}\cosh(\sqrt{a})}\Big[\sinh(\sqrt{a}(۱-x))\int_۰^x \cosh(\sqrt{a}t)P(h'(t))dt + \cosh(\sqrt{a}x)\int_x^۱ \sinh(\sqrt{a}(۱-t))P(h'(t))dt\Big], \qquad (۶)$$

تبدیل کرد که در آن $P(y) := \frac{۱}{\sqrt{۱+y^۲}}$.

در ادامه شبکه یکنواخت $x_j = jh$، برای $j = ۰, ۱, ..., n$ را با طول گام $h = \frac{۱}{n}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید X_n زیرفضایی از توابع تکه‌ای خطی روی بازه $[۰, ۱]$ و در نقاط شبکه باشد. به این ترتیب عملگر تصویر درونیاب به‌صورت

$$P_n h(x) := \sum_{j=۰}^{n} h(x_j)l_j(x),$$

و باقیمانده $r_n(x)$ به‌صورت

$$r_n(x) := \sum_{i=۰}^{n} h(x_i)l_i(x) - \frac{b}{\sqrt{a}\cosh(\sqrt{a})}[\sinh(\sqrt{a}(۱-x))\int_۰^x \frac{\cosh(\sqrt{a}t)}{\sqrt{۱+(\sum_{i=۰}^{n} h(x_i)l_i'(x))^۲}}dt + \cosh(\sqrt{a}x)\int_x^۱ \frac{\sinh(\sqrt{a}(۱-t))}{\sqrt{۱+(\sum_{i=۰}^{n} h(x_i)l_i'(x))^۲}}dt],$$

تعریف می‌شوند. حال با در نظر گرفتن شرط هم‌مکانی $r_n(x_j) = ۰$ می‌توان نوشت

$$\sum_{i=۰}^{n} h(x_i)l_i(x_j) - \frac{b}{\sqrt{a}\cosh(\sqrt{a})}[\sinh(\sqrt{a}(۱-x_j))\int_{۰}^{x_j}\frac{\cosh(\sqrt{a}t)}{\sqrt{۱+(\sum_{i=۰}^{n} h(x_i)l_i'(x_j))^۲}}dt$$
$$+\cosh(\sqrt{a}x_j)\int_{x_j}^{۱}\frac{\sinh(\sqrt{a}(۱-t))}{\sqrt{۱+(\sum_{i=۰}^{n} h(x_i)l_i'(x_j))^۲}}dt = ۰].$$

با توجه به ویژگی‌های توابع کلاهی رابطه بالا به‌صورت زیر ساده می‌شود

$$h(x_j) - \frac{b}{\sqrt{a}\cosh(\sqrt{a})}[\sinh(\sqrt{a}(۱-x_j))\sum_{i=۰}^{j-۱}\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{h(x_{i+۱})-h(x_i)}{h})^۲}}\int_{x_i}^{x_{i+۱}}\cosh(\sqrt{a}t)dt$$

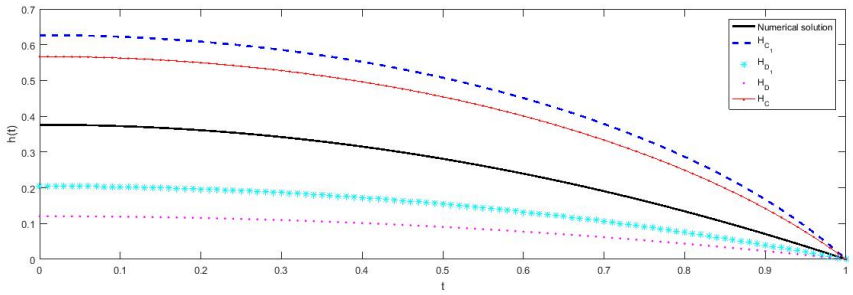
(۷)

$$+\cosh(\sqrt{a}x_j)\sum_{i=j}^{n-۱}\frac{۱}{\sqrt{۱+(\frac{h(x_{i+۱})-h(x_i)}{h})^۲}}\int_{x_i}^{x_{i+۱}}\sinh(\sqrt{a}(۱-t))dt] = ۰,\quad j = ۰, ۱, \ldots, n,$$

که در آن انتگرال‌ها به‌صورت دقیق محاسبه می‌شوند. با جای‌گذاری مقدار این انتگرال‌ها، دستگاه غیرخطی از n معادله برای مجهول‌های $h(x_{n-۱}), ..., h(x_۱), h(x_۰)$ خواهیم داشت. با حل این دستگاه با یک روش تکراری مانند روش نیوتن، مقادیر تابع مجهول در نقاط شبکه حاصل می‌شوند.

۵. نتایج عددی

در این بخش به منظور بررسی کارایی روش عددی ارائه شده، نتایج حاصل از حل دستگاه (۷) به ازای پارامترهای $b = ۰/۹$ و $a = b^۲\sqrt{۱-b^۲} = ۰/۳۵۳$ در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲. نتایج عددی مسأله مقدار مرزی (۴) $a = ۰/۳۵۳, b = ۰/۹$.

همان‌طور که از شکل ۲ مشخص است، نتایج به‌دست آمده از روش هم‌مکانی در فواصل به‌دست آمده در مرجع [۶] قرار دارند. در این مرجع برای

$$C = \frac{۱-\sqrt{۱-۲ab^۲+a^۲b^۲}}{ab},\qquad D = \frac{۲}{a}(\frac{\sqrt{a^۲b^۲-۲ab^۲+۱}}{ab} - \frac{۱}{ab} + b),$$

ثابت شده است که

$$H_D(t) \leq h(t) \leq H_C(t).$$

همچنین برای $C_1 = b$ و $D_1 = b\sqrt{1-b^2}$ ثابت شده است که

$$H_{D_1}(t) \leq h(t) \leq H_{C_1}(t),$$

که نتایج عددی حاصل از روش هم‌مکانی این کران‌ها را پوشش می‌دهد.

مراجع

1. E. Ahmed, *Finite element modeling of corneal biomechanical behavior*, J. Refract. Surg. **26** (2010) 289–300.
2. K. Anderson, A. El-Sheikh and T. Newson, *Application of structural analysis to the mechanical behaviour of the cornea*, J. R. Soc. Interface **1** (2004) 3–15.
3. I. Coelho, C. Corsato and P. Omari, *A one- dimensional prescribed curvature equation modeling the corneal shape*, Bound. Val. Prob. **2014** (2014) 127.
4. D. R. Iskander, M. J. Collins and B. Davis, *Optimal modeling of corneal surfaces by Zernike polynomials*, IEEE Trans. Bio. Eng. **48** (1) (2001) 87–95.
5. W. Okrasiński and L. Płociniczak, *A nonlinear mathematical model of the corneal shape*, Nonlin. Anal. RWA **13** (2012) 1498–1505.
6. W. Okrasiński and L. Płociniczak, *Solution estimates for system of nonlinear integral equations arising in optometry,* J. Int. Equ. Appl. **30** (1) (2018) 167–179.
7. L. Płociniczak, W. Okrasiński, J. N. Juan and D. Oscar, *On a nonlinear boundary value problem modeling corneal shape*, J. Math. Anal. Appl. **414** (2014) 461–471.

پست الکترونیکی: katani@yu.ac.ir

حل عددی مسئله براتو با استفاده از روش بی‌اسپلاین درجه پنجم

زهرا محمودی*
گروه ریاضی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ابهر، ابهر، ایران

چکیده. یک روش عددی بر پایه بی‌اسپلاین درجه پنجم برای حل مسئله براتو که به‌طور گسترده در سوخت، نظریه احتراق و انتقال گرما کاربرد دارد، توسعه داده شده است. مسئله براتو به‌شکل معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرالی ولترا–فردهلم تبدیل می‌شود. از روش بسط تابع مجهول به کمک روش هم‌محلی مبتنی بر بی‌اسپلاین درجه پنجم و قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوس–کرونرود با تابع وزن لژاندر برای تقریب انتگرال‌ها استفاده می‌شود. نتایج عددی حاصل شده با روش پیشنهادی با نتایج به‌دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: مسئله براتو، معادله انتگرالی غیر خطی ولترا–فردهلم، بی‌اسپلاین درجه پنجم، قاعده انتگرال‌گیری گاوس–کرونرود–لژاندر، آنالیز خطا.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34K28, 74G15, 60D30.

۱. پیش‌گفتار

مسئله براتو از ساده‌سازی مدل اشتعال سوخت جامد در تئوری احتراق حرارتی [۱، ۴، ۶] به‌وجود آمده است. همچنین مسئله براتو یک مسئله مقادیر ویژه غیرخطی است بدین معنی که اغلب به‌عنوان یک ابزار مقایسه برای روش‌های عددی به‌کار برده می‌شود. در [۵] جاکوبسون و اشمیت یک خلاصه عالی از اهمیت و پیشینهٔ مسئله براتو فراهم آورده‌اند.

مسئله مقدار مرزی براتو در مختصات مسطح یک بعدی به‌شکل زیر است:

$$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0,\ 0 < x < 1,\ u(0) = u(1) = 0. \tag{۱}$$

جواب دقیق معادله (۱) $u(x) = -2\ln[\frac{\cosh((x-\frac{1}{2})\frac{\theta}{4})}{\cosh(\frac{\theta}{4})}]$ است، که θ در $\theta = \sqrt{2\lambda}\cosh(\frac{\theta}{4})$ صدق می‌کند.

جواب مسئله براتو صفر، یک و دو است وقتی که به ترتیب $\lambda > \lambda_c$، $\lambda = \lambda_c$ و $\lambda < \lambda_c$ باشد و مقدار بحرانی λ_c در معادله $\frac{1}{4}\sqrt{2\lambda_c}\sinh(\frac{\theta}{4}) = 1$ صدق کند [۱۰] و همچنین مقدار بحرانی λ_c برابر با $\lambda_c = 3.5138307019$ است.

برای فرمول‌بندی مسئله براتو (۱) بر حسب معادله انتگرالی ولترا–فردهلم ابتدا باید دوبار نسبت به x انتگرال‌گیری کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$u(x) - u(0) = -\lambda \int_0^x \int_0^\eta e^{u(t)} dt d\eta + cx. \tag{۲}$$

با به‌کارگیری انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء، انتگرال دوگانه (۲) به‌صورت زیر به انتگرال یگانه تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^\eta e^{u(t)} dt d\eta &= [\eta \int_0^\eta e^{u(t)} dt]_0^x - \int_0^x \eta e^{u(\eta)} d\eta \\ &= x \int_0^x e^{u(t)} dt - 0 - \int_0^x \eta e^{u(\eta)} d\eta \\ &= \int_0^x (x-\eta) e^{u(\eta)} d\eta \\ &= \int_0^x (x-t) e^{u(t)} dt. \end{aligned} \tag{۳}$$

با جای‌گذاری (۳) در (۲) و با به‌کارگیری شرایط مرزی (۱) به‌دست می‌آوریم:

* سخنران

$$c = \lambda \int_{۰}^{۱} (۱ - t)e^{u(t)}dt.$$

با جای‌گذاری مقدار c در (۲) داریم:

$$u(x) = \lambda(-\int_{۰}^{x} (x - t)e^{u(t)}dt + \int_{۰}^{۱} (۱ - t)xe^{u(t)}dt). \quad (۴)$$

یک رویداد فیزیکی را می‌توان با معادله دیفرانسیل، معادله انتگرالی یا معادله دیفرانسیل-انتگرالی یا دستگاهی از این معادلات مدل‌سازی کرد. از آن‌جائی که تعدادی از این معادلات به روش صریح قابل حل نیستند اغلب لازم است که از روش‌های عددی که ترکیب مناسبی از انتگرال‌گیری عددی و درونیابی می‌باشند استفاده کنیم.

در این مقاله روش هم‌محلی مبتنی بر تقریب تابع مجهول توسط بی‌اسپلاین درجه پنجم در معادله (۴) و سپس قاعده انتگرال‌گیری گاوس کرونرور لژاندر در حالت $n = ۲$ را برای تقریب معادله‌های انتگرالی ولترا-فردهلم غیرخطی توسعه خواهیم داد.

۲. روش هم‌محلی بی‌اسپلاین درجه پنجم

فضای بی‌اسپلاین درجه پنجم و توابع پایه در ساختن درونیاب s که در فرمول‌بندی روش هم‌محلی بی‌اسپلاین درجه پنجم مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی می‌کنیم.

فرض کنید $\triangle_N \equiv \{a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_N = b\}$ یک افراز یکنواخت از بازه $[a, b]$ با طول گام $h = \frac{b-a}{N}$ و $s(t) \in S_۵(\Delta_N) = \{s \in C^۴[a, b]; s|_{[t_i,t_{i+۱}]} \in P_۵, i = ۰, ۱, \ldots, N - ۱\}$ که $P_۵$ کلاس چندجمله‌ای درجه پنجم است.

برای تقریب جواب تحلیلی u در معادله (۵)، ساختار بی‌اسپلاین درجه پنجم به کمک ده نقطه اضافی می‌تواند اجرا شود، به‌طوری که

$$t_{-۵} < t_{-۴} < t_{-۳} < t_{-۲} < t_{-۱} \ , \ t_{N+۱} < t_{N+۲} < t_{N+۳} < t_{N+۴} < t_{N+۵},$$

می‌توان در هر کدام از زیر بازه‌های افراز Δ_N تابع اسپلاین $s(t)$ را به‌صورت ترکیب خطی از پایه‌های $B_i^۵(t)$ به‌شکل زیر نوشت [۲]:

$$s(t) = \sum_{i=-۲}^{N+۲} c_i B_i^۵(t), \quad (۵)$$

که پایه‌های $B_i^۵(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_i^۵(t) = \frac{۱}{h^۵ ۵!} \begin{cases} (t - t_{i-۳})^۵, & \text{اگر } t \in [t_{i-۳}, t_{i-۲}), \\ (t - t_{i-۳})^۵ - ۶(t - t_{i-۲})^۵, & \text{اگر } t \in [t_{i-۲}, t_{i-۱}), \\ (t - t_{i-۳})^۵ - ۶(t - t_{i-۲})^۵ + ۱۵(t - t_{i-۱})^۵, & \text{اگر } t \in [t_{i-۱}, t_i), \\ (t - t_{i-۳})^۵ - ۶(t - t_{i-۲})^۵ + ۱۵(t - t_{i-۱})^۵, & \\ ۲۰(t - t_i)^۵, & \text{اگر } t \in [t_i, t_{i+۱}), \\ (t - t_{i-۳})^۵ - ۶(t - t_{i-۲})^۵ + ۱۵(t - t_{i-۱})^۵, & \\ ۲۰(t - t_i)^۵ + ۱۵(t - t_{i+۱})^۵, & \text{اگر, } t \in [t_{i+۱}, t_{i+۲}), \\ (t - t_{i-۳})^۵ - ۶(t - t_{i-۲})^۵ + ۱۵(t - t_{i-۱})^۵, & \\ ۲۰(t - t_i)^۵ + ۱۵(t - t_{i+۱})^۵ - ۶(t - t_{i+۲})^۵, & \text{اگر } t \in [t_{i+۲}, t_{i+۳}), \\ ۰, & t < t_{i-۳}, t_{i+۳} < t, \end{cases}$$

و ضرایب $-۲ \le i \le N + ۲$ ، c_i ها از شرایط درونیابی و شرایط انتهایی زیر مشخص می‌شوند،

$$s(t_i) = u(t_i), \ ۰ \le i \le N,$$

و

$$(۶)\qquad \begin{cases} (i)\ D^j s(t_\circ) = D^j u(t_\circ),\ D^j s(t_N) = D^j u(t_N),\ j = ۱, ۲, \\ \text{یا} \\ (ii)\ D^j s(t_\circ) = D^j s(t_N),\ j = ۱, ۲, ۳, ۴, \\ \text{یا} \\ (iii)\ D^j s(t_\circ) = \circ,\ D^j s(t_N) = \circ,\ j = ۳, ۴. \end{cases}$$

۳. قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوس- کرونرود-لژاندر

روش انتگرال‌گیری $۲n+۱$ نقطه‌ای گاوس-کرونرود در حالت کلی به‌شکل زیر است [۹]:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=۱}^{۲n+۱} \overline{\delta}_k f(\overline{\tau}_k) = \sum_{\nu=۱}^{n} \delta_\nu f(\tau_\nu) + \sum_{\rho=۱}^{n+۱} \delta^*_\rho f(\tau^*_\rho) + R_{۲n+۱}(f),$$

که در آن گره‌های τ_ν گره‌های گاوس، τ^*_ρ گره‌های کرونرود و وزن‌های δ_ν اوزان گاوس و δ^*_ρ اوزان کرونرود هستند. روش برای چندجمله‌ای‌ها از درجه حداکثر $۳n+۱$ دقیق است یعنی $\forall f \in P_{۳n+۱}$ $R_{۲n+۱}(f) = \circ$.
با انتخاب $w(x) = ۱$ و $n = ۲$ ، در بازه $[-۱, ۱]$ روش انتگرال‌گیری گاوس-کرونرود- لژاندر به‌دست می‌آید که گره‌ها و وزن‌های آن را از [۹] داریم:

$$(۷)\qquad \int_{-۱}^{۱} f(x)dx = \sum_{k=۱}^{۵} \overline{\delta}_k f(\overline{\tau}_k) = \sum_{\nu=۱}^{۲} \delta_\nu f(\tau_\nu) + \sum_{\rho=۱}^{۳} \delta^*_\rho f(\tau^*_\rho) + R_۵(f),$$

$$(۸)\qquad \begin{aligned} \tau_۱ = \frac{-\sqrt{۳}}{۳}, \tau_۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}, \tau^*_۱ = -\sqrt{\frac{۶}{۷}}, \tau^*_۲ = \circ, \tau^*_۱ = \sqrt{\frac{۶}{۷}}, \\ \delta_۱ = \frac{۲۷}{۵۵}, \delta_۲ = \frac{۲۷}{۵۵}, \delta^*_۱ = \frac{۹۸}{۴۹۵}, \delta^*_۲ = \frac{۲۸}{۴۵}, \delta^*_۳ = \frac{۹۸}{۴۹۵}. \end{aligned}$$

۴. حل عددی معادلات انتگرالی ولترا-فردهلم غیرخطی

معادله انتگرالی ولترا-فردهلم غیرخطی (۴) را در نظر می‌گیریم:

$$(۹)\qquad u(x) = \lambda \left[-\int_\circ^x (x-t)e^{u(t)}dt + \int_\circ^۱ (۱-t)xe^{u(t)}dt \right].$$

تابع مجهول $u(t)$ را با تابع بی‌اسپلاین درجه پنجم در (۹)تقریب می‌زنیم و داریم:

$$(۱۰)\qquad s(x) = \lambda \left[-\int_\circ^x (x-t)e^{s(t)}dt + \int_\circ^۱ (۱-t)xe^{s(t)}dt \right],\ x \in (\circ, ۱).$$

حال معادله (۱۰) را در نقاط $x_i = ih,\ , h = \frac{۱}{N}\ i = \circ, ۱, \ldots, N$ گسسته‌سازی می‌کنیم:

$$s(x_i) = \lambda \left[-\int_\circ^{x_i} (x_i-t)e^{s(t)}dt + \int_\circ^۱ (۱-t)x_i e^{s(t)}dt \right],\ i = \circ, ۱, \ldots, N.$$

با افراز بازه‌های $[\circ, ۱]$ و $[\circ, x_i]$ به N زیر بازه مساوی داریم:

$$s(x_i) = \lambda \left[-\sum_{p=\circ}^{i-۱} \int_{x_p}^{x_{p+۱}} (x_i-t)e^{s(t)}dt + \sum_{p=\circ}^{N-۱} \int_{x_p}^{x_{p+۱}} (۱-t)x_i e^{s(t)}dt \right],\ i = \circ, ۱, \ldots, N.$$

برای استفاده از فرمول گاوس-کرونرود-لژاندر برای تقریب انتگرال‌ها، باید به کمک تغییر متغیر زیر هر یک از زیر بازه‌های $[x_p, x_{p+1}]$ را به بازه $[-1, 1]$ تبدیل کنیم:

$$t = \frac{1}{2}[(x_{p+1} - x_p)y + (x_{p+1} + x_p)],\ dt = \frac{(x_{p+1} - x_p)}{2}dy = \frac{h}{2}dy,$$

$$s(x_i) = \frac{h}{2}\lambda[-\sum_{p=0}^{i-1}\int_{-1}^{1}(x_i - \frac{(x_{p+1} - x_p)y + (x_{p+1} + x_p)}{2})e^{s(\frac{(x_{p+1} - x_p)y + (x_{p+1} + x_p)}{2})}dy$$

$$+\sum_{p=0}^{N-1}\int_{-1}^{1}(1 - \frac{(x_{p+1} - x_p)y + (x_{p+1} + x_p)}{2})x_i e^{s(\frac{(x_{p+1} - x_p)y + (x_{p+1} + x_p)}{2})}dy],$$
$$i = 0, 1, \ldots, N.$$
(۱۱)

برای تقریب انتگرال‌ها در معادله (۱۱)، فرمول انتگرال‌گیری گاوس -کرونرود لژاندر (۷) را به‌کار می‌بریم و دستگاه غیرخطی $(N+1)\times(N+5)$ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} s(x_i) &= \frac{\lambda h}{2}[-\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{\nu=1}^{5}\overline{\delta}_\nu(x_i - \xi_{p\nu})e^{s(\xi_{p\nu})} \\ &+ \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{\nu=1}^{5}\overline{\delta}_\nu(1 - \xi_{p\nu})x_i e^{s(\xi_{p\nu})}], \quad i = 0, 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

که در آن $\xi_{p\nu} = \frac{(x_{p+1} - x_p)\overline{\tau}_\nu + (x_{p+1} + x_p)}{2}$ و $\overline{\tau}_\nu$ گره‌ها و ضرایب $\overline{\delta}_\nu$ را از بخش قبل رابطه (۸) داریم.

اما برای به‌دست آوردن جواب از معادلات (۱۲) به چهار معادله دیگر نیاز داریم، برای این منظور شرایط انتهایی (۶) را اعمال می‌کنیم، بنابراین با اضافه‌کردن معادلات (۶) به معادلات (۱۲)، دستگاه غیرخطی $(N+5)\times(N+5)$ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} s(x_i) = \frac{\lambda h}{2}[-\sum_{p=0}^{i-1}\sum_{\nu=1}^{5}\overline{\delta}_\nu(x_i - \xi_{p\nu})e^{s(\xi_{p\nu})} + \sum_{p=0}^{N-1}\sum_{\nu=1}^{5}\overline{\delta}_\nu(1 - \xi_{p\nu})x_i e^{s(\xi_{p\nu})}], \\ i = 0, 1, \ldots, N, \\ \\ D^j s(x_0) = D^j s(x_N),\ j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$
(۱۲)

حال با حل دستگاه غیرخطی فوق ضرایب $c_i, i = -2, -1, \ldots, N+2$ را به‌دست می‌آوریم و با جای‌گذاری c_iها در رابطه (۵)، جواب تقریبی معادله (۹) را به‌دست می‌آوریم.

۵. نتایج عددی و مقایسه روش ارائه شده

به منظور تست پایداری و دقت روش ارائه شده در حل معادله انتگرالی ولترا-فردهلم (۹)، معادله (۹) را با λهای مختلف بررسی می‌کنیم. قدرمطلق خطای جواب‌های معادله (۹) با نتایج موجود در [۳، ۷، ۸] برای مقادیر $\lambda = 1,3051$ و $N = 10$ مقایسه شده‌اند و نتایج در جدول‌های ۱ و ۲ هستند.
نتایج نشان می‌دهند که روش این مقاله برای حل مسئله براتو بسیار دقیق است.

نکته ۱.۵. در جدول ۱ داریم:

$$^*1/86(-8) = 1/86 \times 10^{-8}$$

جدول ۱. قدرمطلق خطای جواب مسئله (۱) در نقاط خاص به ازای $N = ۱۰, \lambda = ۱$.

x_i	روش [۸]	روش [۷]	روش [۳]	روش (۱۲)
۰٫۱	۱٫۹۸(−۶)	۲٫۶۸(−۳)	۲٫۹۸(−۶)	۱٫۸۶(−۸)*
۰٫۲	۳٫۹۴(−۶)	۲٫۰۲(−۳)	۵٫۴۶(−۶)	۱٫۴۱(−۸)
۰٫۳	۵٫۸۵(−۶)	۱٫۵۲(−۳)	۷٫۳۳(−۶)	۱٫۶۸(−۸)
۰٫۴	۷٫۷۰(−۶)	۲٫۲۰(−۳)	۸٫۵۰(−۶)	۱٫۶۰(−۸)
۰٫۵	۹٫۴۹(−۶)	۳٫۰۱(−۳)	۸٫۸۹(−۶)	۱٫۶۷(−۸)
۰٫۶	۱٫۱۱(−۵)	۲٫۲۰(−۳)	۸٫۵۰(−۶)	۱٫۶۰(−۸)
۰٫۷	۱٫۲۶(−۵)	۱٫۵۲(−۴)	۷٫۳۳(−۶)	۱٫۶۸(−۸)
۰٫۸	۱٫۳۵(−۵)	۲٫۰۲(−۳)	۵٫۴۶(−۶)	۱٫۴۱(−۸)
۰٫۹	۱٫۲۰(−۵)	۲٫۶۸(−۳)	۲٫۹۸(−۶)	۱٫۸۶(−۸)

جدول ۲. قدر مطلق خطای جواب مسئله (۱) در نقاط خاص به ازای $N = ۱۰, \lambda = ۳٫۵۱$.

x_i	روش [۳]	روش (۱۲)
۰٫۱	۳٫۸۴(−۲)	۹٫۶۶(−۶)
۰٫۲	۷٫۴۸(−۲)	۱٫۶۷(−۵)
۰٫۳	۱٫۰۶(−۱)	۲٫۳۴(−۵)
۰٫۴	۱٫۲۷(−۱)	۲٫۷۵(−۵)
۰٫۵	۱٫۳۵(−۱)	۲٫۹۲(−۵)
۰٫۶	۱٫۲۷(−۱)	۲٫۷۵(−۵)
۰٫۷	۱٫۰۶(−۱)	۲٫۳۴(−۵)
۰٫۸	۷٫۴۸(−۱)	۱٫۶۷(−۵)
۰٫۹	۳٫۸۴(−۲)	۹٫۶۶(−۶)

مراجع

1. E. Allgower, S. G. Cruceanu and S. Tavener, *Application of numerical continuation to compute all solutions of semilinear elliptic equations*, Adva. Geom. **9** (3) (2009) 371–400.
2. A. Askari Hemmat, T. Ismaeelpour and H. Saeedi, *Quartic and pantic B-spline operational matrix offractional integration*, Wave. Line. Alg. **3** (2) (2016) 55–68.
3. H. Caglar, N. Caglar, M. Antonios Valaristos and N. Antonios, Anagnostopoulos, *B-spline method for solving Bratus problem*, Int. J. Comput. Math. **87** (8) (2010) 1885–1891.
4. D. A. Frank-Kamenetski, *Dzffusion and Heat Exchange in Chemical Kinetics*, Princeton University Press, Princeton, 1955.
5. J. Jacobson and K. Schmitt, *The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators*, J. Diff. Eq. **184** (1) (2002) 283–298.
6. L. Jin, *Application of modified variational iteration method to the Bratu-type problems*, Int. J. Cont. Math. Sci. **5** (4) (2010) 153–158.
7. S. Liao and Y. Tan, *A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations*, Stud. Appl. Math. **119** (4) (2007) 297–354.
8. J. S. McGough, *Numerical continuation and the Gelfand problem*, Appl. Math. Compu. **89** (1-3) (1998) 225–239.
9. M. M. Spalevic, *A note on generalized averaged Gaussian formulas*, Numer. Algo. **46** (2007) 253–264.
10. A. M. Wazwaz, *Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations*, Appl. Math. Compu. **166** (3) (2005) 652–663.

پست الکترونیکی: z_mahmoodi_a@yahoo.com

یک روش سینک-نیشتروم در حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم-همرشتاین

علی مهدی‌پور*
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و علی افتخاری
گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله، یک رویکرد عددی به کمک روش سینک-نیشتروم و بر مبنای تبدیلات نمایی مضاعف در حل معادلات انتگرال غیرخطی از نوع ولترا-فردهلم-همرشتاین ارائه می‌شود. نتایج عددی، کارایی و همگرایی بالای این روش را در مقایسه با برخی روش‌های عددی موجود آشکار می‌سازد.
واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال غیرخطی، ولترا-فردهلم-همرشتاین، تابع سینک، روش نیشتروم.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65R20.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله، روش نیشتروم بر پایه توابع سینک در حل معادله انتگرال ولترا-فردهلم-همرشتاین

$$u(x)+\lambda_1\int_a^b K_1(x,t)F_1(t,u(t))dt+\lambda_2\int_a^x K_2(x,t)F_2(t,u(t))dt=g(x),\ a\le x\le b, \quad (1)$$

مورد استفاده قرار می‌گیرد.
در این‌جا توابع $K_1(x,t)$، $K_2(x,t)$، $F_1(t,u(t))$، $F_2(t,u(t))$، $g(x)$ و پارامترهای λ_1 و λ_2 معلوم هستند و $u(x)$ جواب مجهول برای معادله (۱) است.

یک مدل عددی، در بسیاری از زمینه‌ها از قبیل مسائل انتقال ذرات در اخترفیزیک، مکانیک، الکتریسیته و مغناطیس، ژنتیک، ژئوفیزیک، اقتصاد ریاضی و ... می‌تواند به معادله (۱) تبدیل شود. پژوهش‌های بسیاری برای حل معادله (۱) وجود دارند که از میان آن‌ها می‌توان به روش هم‌مکانی، روش تیلور و روش تجزیه اصلاح‌شده، اشاره نمود [۴]. عموماً در برخی از این روش‌ها، با استفاده از بسط جواب توسط توابع پایه‌ای یا روش‌های کوادراتور، به حل مسأله اقدام می‌نمایند که معمولاً از نرخ همگرایی از مرتبه چندجمله‌ای برخوردار هستند. کوادراتور سینک، نقش مهمی در زمینه‌های مختلف حساب دیفرانسیل و انتگرال دارد. این شیوه مکرراً در حل معادلات مختلف از جمله معادلات انتگرال و دیفرانسیل استفاده شده است.

ینینگ ما و همکاران [۴]، با استفاده از کوادراتور سینک و بر مبنای تبدیلات نمایی استاندارد (SE)، معادله (۱) را حل نموده و نرخ همگرایی آن را به نمایی ترقی دادند.

در این مقاله، قصد داریم تا با استفاده از روش سینک-نیشتروم و بر اساس تبدیلات نمایی مضاعف (DE)، معادله (۱) را حل نموده و نرخ همگرایی روش ارائه‌شده در [۴] را بهبود بخشیم.

۲. تعاریف و قضایا

در این بخش، برخی تعاریف و قضایای ضروری مربوط به کوادراتور سینک ارائه می‌گردد. تابع سینک روی $\mathbb{R}$ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

* سخنران

$$\mathrm{Sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

همچنین، تقریب درونیاب سینک نظیر به یک تابع f روی $\mathbb{R}$ به ازای مقدار طبیعی N توسط رابطه زیر بیان می‌شود:

$$f(t) \approx f_N(t) = \sum_{i=-N}^{N} f(ih) S(i,h)(t),$$

که در آن به ازای طول گام $h > 0$، تابع $S(i,h)(t)$ به کمک انتقال و اتساع توابع سینک به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S(i,h)(t) = \mathrm{Sinc}(\tfrac{t}{h} - i),\ i = -N, ..., N.$$

علاوه بر این، تابع $J(i,h)(t)$ روی $\mathbb{R}$ با ضابطه

$$J(i,h)(t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{\pi}\mathrm{Si}\left[\pi(\tfrac{t}{h} - i)\right],\ i = -N, ..., N,$$

تعریف می‌گردد که $\mathrm{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin\mu}{\mu} d\mu$.

به منظور تقریب تابع f در بازه متناهی (a,b)، از نگاشت همدیس زیر استفاده می‌نماییم:

$$t = \phi(z) = \ln\left[\frac{1}{\pi}\ln(\frac{z-a}{b-z}) + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi}\ln(\frac{z-a}{b-z})\right)^2}\right],\ z \in (a,b),$$

که از ضابطه وارون

$$z = \psi(t) = (\phi)^{-1}(t) = \frac{b-a}{2}\tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh(t)\right) + \frac{b+a}{2},\ t \in \mathbb{R}, \qquad (2)$$

برخوردار است. تحت نگاشت (۲)، $\mathbb{R}$ به بازه (a,b) تصویر می‌گردد و علاوه بر این $\psi(-\infty) = a$ و $\psi(\infty) = b$.

هم‌چنین، به ازای یک مقدار $d > 0$ ناحیه نواری $D_d = \{z \in \mathbb{C} :| Im(z) |< d\}$ توسط نگاشت (۲) به ناحیه همبند ساده‌کراندار $D = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|\arg\left[\frac{1}{\pi}\ln(\frac{z-a}{b-z}) + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\pi}\ln(\frac{z-a}{b-z})\right)^2}\right]\right| < d \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ تصویر می‌گردد.

تعریف ۱.۲. [۳] فرض کنید α یک ثابت مثبت باشد. در این‌صورت $L_\alpha(D)$ بیانگر خانواده همه توابع تحلیلی مانند f روی ناحیه همبند ساده کراندار D است که به ازای یک ثابت K،

$$\forall z \in D,\ |f(z)| \leq K|Q(z)|^2,$$

که در آن $Q(z) = (z-a)(b-z)$ و $(a,b) \subseteq D$.

قضیه ۲.۲. [۲] (درونیابی سینک) فرض کنید $f \in L_\alpha(\psi(D_d))$، $0 < d < \frac{\pi}{2}$ و N عددی طبیعی باشد و h مطابق دستور زیر انتخاب گردد:

$$h = \frac{\ln(\frac{2dN}{\alpha})}{N}. \qquad (3)$$

در این‌صورت ثابت C_1 مستقل از N یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$\max_{a\le t\le b}\left|f(t)-\sum_{i=-N}^{N} f(t_i)S(i,h)(\phi(t))\right| \le C_1 \exp\left(\frac{-\pi dN}{\ln(\frac{2dN}{\alpha})}\right).$$

در این‌جا،

$$t_i=\psi(ih),\ i=-N,...,N,$$

مشهور به نقاط درونیاب سینک هستند.

قضیه ۳.۲. [۲] (کوادراتور سینک) فرض کنید $fQ \in L_\alpha(\psi(D_d))$ که در آن $0 < d < \frac{\pi}{2}$. همچنین فرض کنید N عددی طبیعی و h توسط (۳) انتخاب گردد. در این‌صورت، ثابت C_2 مستقل از N یافت می‌شود به‌طوری‌که

$$\left|\int_a^b f(t)dt - h\sum_{i=-N}^{N} f(t_i)\psi'(ih)\right| \le C_2 \exp\left(\frac{-\pi dN}{\ln(\frac{2dN}{\alpha})}\right).$$

قضیه ۴.۲. [۳] فرض کنید به ازای $0 < d < \frac{\pi}{2}$، تابع fQ به خانواده $L_\alpha(\psi(D_d))$ تعلق گیرد. در این‌صورت به ازای مقدار طبیعی N و طول گام h در (۳)، ثابت C_3 مستقل از N و ثابت K یافت می‌شوند به‌طوری‌که

$$\max_{a\le t\le b}\left|\int_a^t f(s)ds - \sum_{i=-N}^{N} f(t_i)W_i(t)\right| \le K(b-a)^{2\alpha-1}C_3\frac{\ln(\frac{2dN}{\alpha})}{N}\exp\left(\frac{-\pi dN}{\ln(\frac{2dN}{\alpha})}\right),$$

که در آن

$$W_i(t)=\psi'(ih)J(i,h)\left(\phi(t)\right),\ i=-N,...,N.$$

۳. به‌کارگیری روش سینک-نیشتروم

بر طبق قضایای ۲.۲ و ۳.۲ کوادراتورهای زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\int_a^b K_1(x,t)F_1(t,u(t))dt \approx h\sum_{i=-N}^{N}\frac{K_1(x,t_i)}{\phi'(t_i)}F_1(t_i,u_i),$$

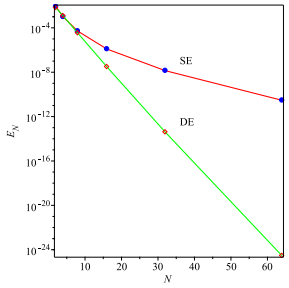
$$\int_a^x K_2(x,t)F_2(t,u(t))dt \approx h\sum_{i=-N}^{N}\frac{K_2(x,t_i)}{\phi'(t_i)}J(i,h)(\phi(x))F_2(t_i,u_i),$$

که u_i مخفف $u(t_i)$ است، $t_i=\psi(ih)$ و h با دستور (۳) انتخاب می‌شود. روش نیشتروم با گسسته‌سازی معادله (۱) توسط رابطه زیر آشکار می‌گردد:

$$u_N(x)+\lambda_1 h\sum_{i=-N}^{N}\frac{K_1(x,t_i)}{\phi'(t_i)}F_1(t_i,u_i)+\lambda_2 h\sum_{i=-N}^{N}\frac{K_2(x,t_i)}{\phi'(t_i)}J(i,h)(\phi(x))F_2(t_i,u_i)=g(x). \quad (۴)$$

به منظور تعیین $2N+1$ مجهول u_i در معادله (۴)، نقاط سینک $x_j=\psi(jh)\ ,\ j=-N,...,N$ را به عنوان نقاط کوادراتور هم‌مکانی، انتخاب می‌کنیم.

با جای‌گذاری x_j به جای x در معادله (۴)، یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی بر اساس مجهولات u_i به دست می‌آید که با استفاده از فرمان fsolve در میپل حل می‌گردد. به این ترتیب، جواب تقریبی $u_N(x)$ به صورت



شکل ۱. مقایسه مقادیر E_N بر پایه تبدیلات SE و DE به ازای مقادیر مختلف N برای مثال ۱.۴.

زیر محاسبه می‌گردد:

$$u_N(x) = g(x) - \lambda_1 h \sum_{i=-N}^{N} \frac{K_1(x,t_i)}{\phi'(t_i)} F_1(t_i,u_i)$$
$$- \lambda_2 h \sum_{i=-N}^{N} \frac{K_2(x,t_i)}{\phi'(t_i)} J(i,h)(\phi(x)) F_2(t_i,u_i),\ x \in [a,b].$$

۴. نتایج عددی

در این بخش، با به کارگیری روش سینک-نیشتروم بر پایه تبدیلات SE و DE به حل دو مثال می‌پردازیم. به ازای یک مقدار طبیعی N، ماکسیمم خطا در نقاط سینک به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E_N = \max_{-N \le i \le N} |u(x_i) - u_N(x_i)|.$$

همچنین، در تمامی مثال‌ها، مقادیر $d = \frac{\pi}{4}$ و $\alpha = 1$ به طور تجربی انتخاب شده‌اند.

مثال ۱.۴. [۴] معادله انتگرال غیرخطی ولترا-فردهلم-همرشتاین

$$u(x) = \int_0^1 xtu^2(t)dt + \int_0^x xte^{u(t)}dt + \ln x - \frac{x}{4} - \frac{x^4}{3},\ x \in [0,1],$$

با جواب دقیق $u(x) = \ln x$ را در نظر بگیرید. در شکل ۱، نمودار E_N به ازای مقادیر $N = 2,4,8,16,32,64$ برپایه تبدیلات SE و DE و در قالب log mode ترسیم شده است.
این تصویر بیان می‌دارد که دقت و سرعت همگرایی روش سینک-نیشتروم بر پایه تبدیلات DE بسیار بالا است و اندک افزایش در مقدار N، به طور قابل ملاحظه‌ای از E_N می‌کاهد.

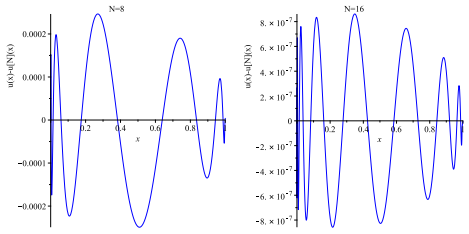
مثال ۲.۴. [۱] معادله انتگرال غیرخطی ولترای

$$u(x) = -3 \int_0^x \sin(x-t)u^2(t)dt + 1 + \sin^2(x),\ x \in [0,1],$$

با جواب دقیق $u(x) = \cos(x)$ مفروض است. در شکل ۲، نمودار خطای مطلق به ازای مقادیر $N = 8$ و $N = 16$ ترسیم شده است.

۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با به کارگیری روش سینک-نیشتروم مبتنی بر تبدیلات نمایی مضاعف، موفق به حل دو معادله انتگرال غیرخطی شدیم. نتایج عددی حاصل، نشان می‌دهند که روش از کارایی و قابلیت اطمینان بالایی در حل



شکل ۲. نمودار خطای مطلق به ازای مقادیر $N = ۸$ و $N = ۱۶$ برای مثال ۲.۴.

معادلات انتگرال غیرخطی ولترا–فردهلم–همرشتاین برخوردار است و تحت شرایطی می‌تواند نرخ همگرایی نمایی از مرتبه $\exp(\frac{-CN}{\ln N})$ را کسب نماید.

مراجع

1. M. A. El-Ameen and M. El-Kady, *A new direct method for solving nonlinear Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via optimal control problem*, J. Appl. Math. **2012** (2012) 714973.
2. T. Okayama, *Improvement of a Sinc-collocation method for Fredholm integral equations of the second kind*, BIT Numer. Math. **51** (2011) 339–366.
3. T. Okayama, *Theoretical analysis of a Sinc-Nyström method for Volterra integro-differential equations and its improvement*, Appl. Math. Comput. **324** (2018) 1–15.
4. Y. Ma, J. Huang and C. Wang, *Numerical solutions of nonlinear Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations using Sinc Nyström Method*, ITITS. **455** (2017) 187–194.

پست الکترونیکی: alimehdipor73@gmail.com
پست الکترونیکی: eftekhari@kashanu.ac.ir

ارائه یک روش ضمنی جدید برای حل عددی دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی و بررسی B-پایداری آن

آذر میرزایی*
دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران
و مینو کامرانی
دانشکده علوم، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

چکیده. از آن‌جایی که معمولاً جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی در دست نیست لذا حل عددی این معادلات موضوعی است که در سال‌های اخیر بسیار مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله به منظور به‌دست آوردن تقریب جواب برای معادلات فوق یک روش ضمنی جدید مطرح می‌شود که ضمن اثبات پایداری روش فوق در قالب یک قضیه، به پیاده‌سازی آن روی یک مثال که در پزشکی کاربرد دارد پرداخته می‌شود.
واژه‌های کلیدی: معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی، روش نقطه میانی میانگینی ضمنی، B-پایداری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34D30, 65C30, 60H10.

۱. پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی دسته مهمی از معادلات دیفرانسیل هستند که شامل فرایند نویز هستند و کاربردهای فراوانی در علوم مختلف از جمله فیزیک و بیوشیمی دارند [۳]. این معادلات را می‌توان به‌صورت مسیری به‌عنوان یک معادله دیفرانسیل معمولی در نظر گرفت [۷]، پس برای حل آن‌ها می‌توان از روش‌های عددی که در معادلات دیفرانسیل معمولی کاربرد دارند [۶]، استفاده کرد. اما از آن‌جایی‌که روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی معمولا مرتبه همگرایی قبلی خود را برای معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی حفظ نمی‌کنند به همین دلیل روش‌های عددی جدیدی برای حل این دسته از معادلات مطرح می‌شوند [۵].

هدف اصلی این مقاله، مطرح کردن یک روش عددی جدید برای تقریب معادلات فوق است. از طرفی چون یکی از راهکارها برای نشان دادن چگونگی عملکرد روش‌های عددی بررسی پایداری آن‌هاست لذا پایداری روش فوق نیز ثابت می‌شود و در انتها روش میانگینی مورد نظر روی یک مدل پزشکی به‌کار گرفته می‌شود.

۲. روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی تصادفی

فرض کنید $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ دو بار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد و مشتقات جزئی آن به‌طور یکنواخت کران‌دار باشند و ζ_t یک فرایند تصادفی m-بعدی مانند حرکت براونی یا حرکت براونی کسری باشد. شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی d-بعدی به‌صورت زیر است

$$\frac{dx}{dt} = f\left(\zeta_t, x\right). \tag{۱}$$

رابطه فوق شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی در حالت مسیری را نشان می‌دهد که وجود جواب‌های مسیری آن‌ها طبق فرضیات استاندارد قضیه وجود معادلات دیفرانسیل معمولی به‌صورت مسیری به‌دست می‌آید [۲]. چون جواب تحلیلی این دسته از معادلات به ندرت در دسترس هستند لذا به‌دست آوردن جواب تقریبی برای آن‌ها با استفاده از روش‌های عددی مورد توجه قرارگرفته است.

* سخنران

یکی از این روش‌ها، روش نقطه میانی میانگینی ضمنی است [۴]، که به ازای $n = ۰, ۱, \dots, N-۱$ روی بازه زمانی $[۰, T]$ $(T > ۰)$، برای فضای احتمال $\left(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq ۰}, P\right)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_{n+۱}^{(N)} = X_n^{(N)} + f\left(I_n, \frac{۱}{۲}(X_n^{(N)} + X_{n+۱}^{(N)})\right)\Delta, \quad X_۰^{(N)} = x_۰, \tag{۲}$$

که

$$I_n = \frac{۱}{\Delta}\int_{n\Delta}^{(n+۱)\Delta} \zeta_s ds.$$

لازم به ذکر است که برای معرفی روش‌های فوق ابتدا بازه $[۰, T]$ را با گسسته‌سازی زمانی به ازای $n = ۰, ۱, \dots, T$ به نقاط متساوی‌الفاصله $t_n = n\Delta$ با طول گام $h = \Delta = \frac{T}{N}$، تقسیم می‌کنیم سپس تقریب جواب مسأله را در نقطه t_n با $X_n^{(N)} = X_n$ نمایش می‌دهیم.

برای آنالیز رفتار جواب این روش، مفهومی تحت عنوان B-پایداری آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است که در [۴] ثابت می‌شود که روش (۲)، B-پایدار است. از طرفی با تعمیم روش (۲) به ازای $\vartheta \in (۰, ۱)$ داریم

$$X_{n+۱}^{(N)} = X_n^{(N)} + f\left(I_n, \vartheta X_n^{(N)} + (۱-\vartheta)X_{n+۱}^{(N)}\right)\Delta, \tag{۳}$$

که B-پایداری این روش برای $\vartheta \in (۰, \frac{۱}{۲})$ در [۱] ثابت شده است. اما هدف از این مقاله بررسی B-پایداری برای روش فوق به ازای $\vartheta \in (\frac{۱}{۲}, ۱)$ است. بدین منظور ابتدا به تعریف دو مفهوم زیر می‌پردازیم، سپس در قالب قضیه‌ای ثابت می‌کنیم روش (۳) به ازای $\vartheta \in (\frac{۱}{۲}, ۱)$، B-پایدار است.

تعریف ۱.۲. (شرط لیپ‌شیتز یک طرفه) [۹] ثابت $\gamma \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که برای تمام $x, y \in \mathbb{R}^d$ و $\mathsf{w} \in \mathbb{R}^m$

$$\langle f(\mathsf{w}, x) - f(\mathsf{w}, y), x - y\rangle \leqslant \gamma \parallel x - y \parallel^۲ .$$

تعریف ۲.۲. [۴] یک روش عددی را B-پایدار گویند هرگاه به ازای $n = ۱, \dots, N$ برای هر دو جواب X_n و X'_n، در شرط زیر صدق کند

$$\parallel X_n - X'_n \parallel \leq \parallel X_{n-۱} - X'_{n-۱} \parallel .$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید به ازای $n = ۰, \dots, N-۱$، X_n و Y_n دو جواب برای روش عددی

$$X_{n+۱}^{(N)} = X_n^{(N)} + f\left(I_n, \vartheta X_n^{(N)} + (۱-\vartheta)X_{n+۱}^{(N)}\right)\Delta, \quad \vartheta \in (\frac{۱}{۲}, ۱), \tag{۴}$$

که بر معادله (۱) اعمال شده است، باشند. در این صورت روش فوق B-پایدار است، یعنی

$$\parallel X_{n+۱} - Y_{n+۱} \parallel \leq \parallel X_n - Y_n \parallel .$$

اثبات. با استفاده از فرض مسئله که X_n و Y_n دو جواب از روش (۳) هستند داریم

$$X_{n+۱} = X_n + f(I_n, \vartheta X_n + (۱-\vartheta)X_{n+۱})\Delta,$$
$$Y_{n+۱} = Y_n + f(I_n, \vartheta Y_n + (۱-\vartheta)Y_{n+۱})\Delta.$$

لذا

$$X_{n+۱} - Y_{n+۱} = (X_n - Y_n) + D,$$

که در آن

$$D := f\left(I_n, \vartheta X_n + (۱-\vartheta)X_{n+۱}\right)\Delta - f\left(I_n, \vartheta Y_n + (۱-\vartheta)Y_{n+۱}\right)\Delta.$$

بنابراین

$$\parallel X_{n+۱} - Y_{n+۱} \parallel^۲ = \parallel (X_n - Y_n) + D \parallel^۲ = \parallel X_n - Y_n \parallel^۲ + ۲\langle X_n - Y_n, D\rangle + \parallel D \parallel^۲ .$$

از طرفی با استفاده از رابطه زیر

$$(۱-\vartheta)\,(X_{n+۱}-Y_{n+۱})=(۱-\vartheta)\,(X_n-Y_n)+(۱-\vartheta)D,$$

داریم

$$X_n-Y_n=(۱-\vartheta)(X_{n+۱}-Y_{n+۱})+\vartheta(X_n-Y_n)-(۱-\vartheta)D.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\|X_{n+۱}-Y_{n+۱}\|^۲ &= \|X_n-Y_n\|^۲+\|\,D\,\|^۲ +۲\langle(۱-\vartheta)\,(X_{n+۱}-Y_{n+۱})\\ &\quad+\vartheta\,(X_n-Y_n)-(۱-\vartheta)\,D,D\rangle\\ &=\|X_n-Y_n\|^۲+\|\,D\,\|^۲ -۲\,(۱-\vartheta)\,\|\,D\,\|^۲\\ &\quad+۲\langle(۱-\vartheta)\,(X_{n+۱}-Y_{n+۱})+\vartheta\,(X_n-Y_n)\,,D\rangle.\end{aligned}$$

از طرفی طبق تعریف شرط لیپ‌شیتز یک طرفه و فرض این که $\gamma\leqslant ۰$ داریم

$$\begin{aligned}&\langle(۱-\vartheta)\,(X_{n+۱}-Y_{n+۱})+\vartheta\,(X_n-Y_n)\,,D\rangle\\ &\leqslant\gamma\Delta\,\|\,(۱-\vartheta)\,(X_{n+۱}-Y_{n+۱})+\vartheta\,(X_n-Y_n)\,\|^۲\leqslant ۰.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲ &\leqslant\|\,X_n-Y_n\,\|^۲+(۲\vartheta-۱)\,\|\,D\,\|^۲\\ &\leqslant\|\,X_n-Y_n\,\|^۲+(۲\vartheta-۱)\,\|\,(X_{n+۱}-Y_{n+۱})-(X_n-Y_n)\,\|^۲\\ &\leqslant\|\,X_n-Y_n\,\|^۲+(۲\vartheta-۱)\,\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲+(۲\vartheta-۱)\,\|\,X_n-Y_n\,\|^۲\\ &\quad-۲(۲\vartheta-۱)\,\|\,X_n-Y_n\,\|\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|,\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲-(۲\vartheta-۱)\,\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲&\leqslant\|\,X_n-Y_n\,\|^۲+(۲\vartheta-۱)\,\|\,X_n-Y_n\,\|^۲\\ &\quad-۲(۲\vartheta-۱)\,\|\,X_n-Y_n\,\|\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|,\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲\leqslant(\frac{۲\vartheta}{۲-۲\vartheta})\,\|\,X_n-Y_n\,\|^۲-(\frac{۲(۲\vartheta-۱)}{۲-۲\vartheta})\,\|\,X_n-Y_n\,\|\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|,$$

که با استفاده از رابطه (۲) داریم

$$\begin{aligned}\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲\leqslant(\frac{۲\vartheta}{۲-۲\vartheta})\,\|\,X_n-Y_n\,\|^۲&-(\frac{۲(۲\vartheta-۱)}{۲-۲\vartheta})\,\|\,X_n-Y_n\,\|^۲\\ &-(\frac{۲(۲\vartheta-۱)}{۲-۲\vartheta})\,\|\,X_n-Y_n\,\|\|\,D\,\|,\end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲\leqslant\|\,X_n-Y_n\,\|^۲+(\frac{۲-۴\vartheta}{۲-۲\vartheta})\,\|\,X_n-Y_n\,\|\|\,D\,\|,$$

از طرفی چون عبارت $(\frac{۲-۴\vartheta}{۲-۲\vartheta})$ برای $\frac{۱}{۲}<\vartheta<۱$ همواره منفی است لذا

$$\|\,X_{n+۱}-Y_{n+۱}\,\|^۲\leqslant\|\,X_n-Y_n\,\|^۲,$$

و این یعنی روش (۴)، B-پایدار است. □

در ادامه یک مثال از یک معادله دیفرانسیل معمولی تصادفی بیان می‌شود که روش عددی مورد بحث در این مقاله برای تقریب جواب آن به‌کار گرفته شده است.

مثال ۴.۲. در این مثال به بررسی یکی از ساده‌ترین مدل‌ها برای درمان ویروس هپاتیت C پرداخته می‌شود. این مدل به‌صورت زیر است:

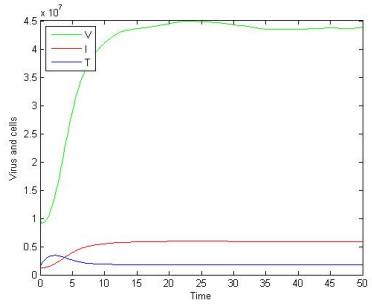
$$\frac{dV}{dt}(t) = (۱ - \epsilon) pI(t) - cV(t), \frac{dI}{dt}(t) = \beta T(t) V(t) - \delta I(t), \frac{dT}{dt}(t) = s - \beta T(t) V(t) - dT(t),$$

که در آن V تعداد ویروس، I سلول‌های عفونی، T سلول‌های هدف، ϵ ویروس موثر، p میزان تولید ویروس جدید، c میزان زدودگی ویروس، β میزان سرایت دوباره ویروس، δ میزان سلول‌های عفونی از دست رفته، s میزان سلول‌های هدف ترمیم شده و d میزان سلول‌های هدف از دست رفته هستند. همچنین فرض کنید پارامتر δ به‌صورت فرایند تصادفی زیر وابسته به W_t باشد.

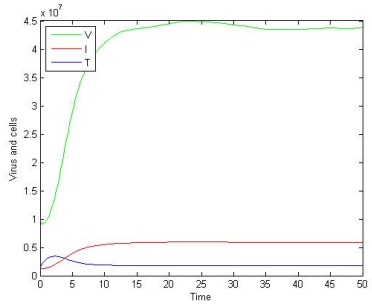
$$\delta_t = \delta_۰ \left(۱ - \nu \frac{۲}{\pi} \tan^{-۱} W_t \right),$$

که در آن $\delta_۰ > ۰$، $\nu \in [۰, ۱]$ و W_t یک فرایند تصادفی وینر است [۸].

حل. برای حل عددی سیستم فوق از روش (۴) با اندازه گام $h = ۰/۲$ با مقادیر اولیه $V_۰ = ۱۰^۷$، $I_۰ = ۱/۲ \times ۱۰^۶$، $T_۰ = ۱/۶ \times ۱۰^۶$ و پارامترهای ثابت $c = ۸$، $\delta_۰ = ۰/۴$، $s = ۱۰^{۶/۵}$، $d = ۰/۵$، $\nu = ۰/۳$، $\epsilon = ۰/۱$ و $p = \frac{cV_۰}{I_۰}$، $\beta = \frac{\delta_۰ I_۰}{(T_۰ V_۰)}$، استفاده می‌شود. نمودارهایی که در ادامه رسم می‌شوند بر اساس محور افقی t و محور عمودی V، I و T در نظر گرفته شده‌اند.



شکل ۱. حل عددی مثال ۴.۲ با روش Δ $X_{n+۱}^{(N)} = X_n^{(N)} + f\left(I_n, \frac{۳}{۴} X_n^{(N)} + \frac{۱}{۴} X_{n+۱}^{(N)}\right)$.



شکل ۲. حل عددی مثال ۴.۲ با روش Δ $X_{n+۱}^{(N)} = X_n^{(N)} + f\left(I_n, \frac{۴}{۵} X_n^{(N)} + \frac{۱}{۵} X_{n+۱}^{(N)}\right)$.

مراجع

1. A. Mirzae and M. Kamrani, *Numerical solution of stiff random ordinary differential equations via averaged schemes*, Math. Method. Appl. Sci. (2020) 1–10.
2. A. Alfonsi, *Strong order one convergence of a drift implicit Euler scheme*, Application to the CIR process, Stat. Probabil. Lett. **83** (2013) 602–607.
3. L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1997.
4. Y. Asai, E. Herrmann and P. E. Kloeden, *Stable integration of stiff random ordinary differential equations*, Stoch. Anal. Appl. **31** (2013) 293–313.
5. F. Carbonell, J. C. Jimenez, R. J. Biscay and H. de la Cruz, *The local linearization method for numerical integration of random differential equations*, BIT Numer. Math. **45** (2005) 1–14.
6. E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1991.
7. A. Jentzen and P. E. Kloeden,*Pathwise Taylor schemes for random ordinary differential equations*, BIT Numer. Math. **49** (2009) 113–140.
8. A. U. Neumann, N. P. Lam, H. Dahari, D. R. Gretch, T. E. Wiley and T. J. Layden, *Hepatitis C viral dynamics in vivo and the antiviral efficacy of interferon-alpha-therapy*, Science **282** (1998) 103–107.
9. A. M. Stuart and A. R. Humphries, *Dynamical Systems and Numerical Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

پست الکترونیکی: a.mirzaei9495@yahoo.com
پست الکترونیکی: minookamrani@yahoo.com

سخنرانی‌ها

بهینه‌سازی

مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی با روش جستجوی خطی نایکنواخت تعمیم‌یافته

زهره اکبری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

چکیده. در این مقاله، یک روش جستجوی خطی نادقیق و نایکنواخت برای مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارائه می‌گردد. ابتدا، شرط آرمیژو نایکنواخت تعمیم‌یافته برای یک جهت کاهشی در نقطه فعلی معرفی می‌گردد. سپس وجود حداقل یک طول گام در امتداد یک جهت کاهشی و صادق در شرط آرمیژو تعمیم‌یافته نشان داده می‌شود. سپس الگوریتم مینیمم‌سازی نایکنواخت برای مسأله بهینه سازی ناهموار و نامحدب ارائه می‌گردد. همگرایی سراسری روش ارائه شده اثبات می‌شود. در پایان، روش ارائه شده در محیط متلب پیاده سازی شده و نتایج با برخی روش‌های موجود در ادبیات موضوع مقایسه می‌گردد. مشاهده می‌شود این روش، نه تنها منجر به محاسبه جواب بهینه سراسری مسأله می‌شود، بلکه سرعت حل مسأله در رسیدن به جواب بهینه نسبت به روش جستجوی خطی یکنواخت بالاتر است.

واژه‌های کلیدی: الگوریتم مینیمم‌سازی، شرط آرمیژو نایکنواخت ناهموار، تابع پیوسته لیپ‌شیتز، همگرایی سراسری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 49J52, 90C26.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله، مسأله مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی در نظر گرفته می‌شود. اغلب روش‌های موجود در بهینه‌سازی ناهموار، روش‌های تکراری یکنواخت می‌باشند. در یک الگوریتم تکراری یکنواخت، به ازای دنباله تولید شده رابطه $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$ برقرار است. زمانی که نقطه آغازین، نزدیک نقطه مینیمم موضعی انتخاب شود، روش‌های یکنواخت احتمالاً به همان مینیمم موضعی همگرا می‌شوند. یکی از معایب روش‌های یکنواخت، همین وابستگی به نقطه شروع است در حالی که روش‌های نایکنواخت همگرایی سراسری را تضمین می‌کنند. در این مقاله، سعی می‌شود روش نایکنواخت برای مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی توسعه داده شود. روش‌های زیادی برای حل مسأله بهینه‌سازی ناهموار ارائه شده است، برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۱، ۷، ۱۱] مراجعه نمود. زمانی که تابع هدف دو بار به طور پیوسته مشتق‌پذیراست، روش‌های جستجوی خطی یکی از مهمترین روش‌ها می‌باشد [۱۰]. روش‌های جستجوی خطی بر اصل پیدا کردن یک طول گام در یک جهت کاهشی مفروض، بنا نهاده شده‌اند، که بر دو دسته تقسیم می‌شوند: یکنواخت و نایکنواخت. در روش جستجوی خطی یکنواخت، هدف پیدا کردن طول گام α_k در یک جهت کاهشی مفروض d_k در نقطه x_k می‌باشد. محاسبه طول گام به صورت دقیق و نادقیق انجام می‌شود. در روش جستجوی دقیق، α_k از حل مسأله $\min_{\alpha} f(x_k + \alpha d_k)$ محاسبه می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، مسأله بالا یک مسأله بهینه بوده که در ابعاد بالا حل آن دارای هزینه محاسباتی بالایی است. در روش جستجوی خطی نادقیق، α_k بزرگترین عددی است که در شرط آرمیژو صدق می‌کند:

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \varepsilon \alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k,$$

که در آن $c_1 \in (0, 1)$، $\nabla f(x_k)$ گرادیان تابع f در نقطه x_k است [۱۰]. به شرط آرمیژو شرط کاهش کافی نیز گفته می‌شود. معمولاً α_k از روش بازگشتی محاسبه می‌گردد. برای اولین بار، گریپو و همکاران تکنیک جستجوی خطی نایکنواخت را برای مینیمم‌سازی تابع هموار ارائه نمودند [۵]. آن‌ها جهت کاهشی را همان جهت کاهشی

* سخنران

نیوتن در نظر گرفتند و سپس بزرگ‌ترین عدد نامنفی α_k را انتخاب کردند به‌طوری که در رابطه زیر صدق کند:

$$f(x_k+\alpha_k d_k) \le \max_{0\le j\le m(k)}[f(x_{k-j})] + \varepsilon\alpha_k \nabla f(x_k)^T d_k, \qquad (1)$$

که در آن $c_1 \in (0,1)$، $\nabla f(x_k)$ گرادیان تابع f در نقطه x_k، $0 \le m(k) \le \min[m(k-1)+1, M]$ برای $k \ge 1$ و $m(0) = 0$ می‌باشند، همچنین M عدد صحیح نامنفی است. شرط (1)، شرط آرمیژو نایکنواخت نامیده می‌شود. دای همگرایی R-خطی روش جستجوی خطی نایکنواخت را برای توابع محدب یکنواخت اثبات کرد [۴]. ژانگ و همکاران، روش جستجوی خطی نایکنواخت جدیدی ارائه کردند که در هر تکرار، میانگین مقادیر تابع هدف در تکرار اخیر، کاهش می‌یابد، در حالی که در روش گریپو ماکزیمم مقدار تابع هدف در هر تکرار کاهش می‌یافت [۱۳]. همچنین، آن‌ها نشان دادند زمانی که تابع هدف نامحدب و هموار باشد روش پیشنهادی‌شان دارای خاصیت همگرایی سراسری است. با توجه به نتایج عددی خوب روش‌های نایکنواخت، اخیراً روش‌های ناحیه اعتماد و روش‌های شبه نیوتن با روش نایکنواخت ترکیب شده‌اند [۲، ۱۲]. تاکنون هیچ روش نایکنواختی برای مسأله مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارائه نشده است. در این مقاله، برای اولین بار یک روش جستجوی خطی نایکنواخت برای حل مسأله مینیمم‌سازی تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی ارائه می‌گردد. در بخش دوم، مقدمه‌ای کوتاه از آنالیز ناهموار بیان می‌شود. در بخش سوم، روش جستجوی خطی نایکنواخت در جهت تندترین کاهش برای تابع هدف پیوسته لیپ‌شیتز موضعی تعریف می‌شود و سپس الگوریتم بهینه‌سازی و همگرایی آن ارائه می‌گردد. بخش چهارم و پنجم، به‌ترتیب، به نتایج عددی الگوریتم جستجوی خطی نایکنواخت ناهموار و نتیجه‌گیری از مقاله اختصاص یافته است.

۲. مقدمه‌ای بر آنالیز ناهموار

در این بخش، برخی مفاهیم مقدماتی از آنالیز ناهموار را بیان می‌کنیم [۳]. تابع f در نقطه x پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است هرگاه همسایگی از x موجود باشد، به طوری که $|f(y)-f(z)| \le L\|y-z\|$، $y,z \in N_r(x)$، که در آن $L > 0$ ثابت لیپ‌شیتز است. فرض کنید تابع f در نقطه x پیوسته لیپ‌شیتز موضعی باشد، مشتق جهتی تعمیم یافته کلارک تابع f در نقطه x در جهت d به صورت زیر تعریف می‌شود [۳]:

$$f^\circ(x,d) := \limsup_{y\to x, t\downarrow 0} \frac{f(y+td)-f(x)}{t}.$$

بر اساس این تعریف، زیردیفرانسیل تعمیم‌یافته کلارک به صورت

$$\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n | f^\circ(x;d) \ge \xi^T d,\ \forall\, d \in \mathbb{R}^n\}$$

. تعریف می‌گردد. هر بردار $\xi \in \partial f(x)$، یک زیرگرادیان تابع f در x نامیده می‌شود. برای هر $\varepsilon > 0$ ، ε-زیردیفرانسیل گلداشتاین تابع f در x به صورت $\partial_\varepsilon f(x) := \text{cl conv}\{\partial f(y),\ \|x-y\| \le \varepsilon\}$، تعریف می‌گردد که در آن conv و cl به ترتیب پوسته محدب و بستار مجموعه هستند. هر بردار $\xi \in \partial f(x)$، ε-زیرگرادیان تابع f در x نامیده می‌شود. می‌توان مشاهده کرد $f_\varepsilon^\circ(x,d) = \sup_{\xi\in\partial_\varepsilon f(x)} \xi^T d$. اگر برای هر $d \in \mathbb{R}^n$، $f_\varepsilon^\circ(x,d) \ge 0$ یا $0 \in \partial_\varepsilon f(x)$ باشد، در این‌صورت نقطه x^* یک نقطه ε- ایستای تابع f نامیده می‌شود. در سرتاسر این مقاله فرض می‌شود که تابع $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ پیوسته لیپ‌شیتز موضعی است و نرم در نظر گرفته شده همان نرم اقلیدسی است.

۳. روش جستجوی خطی نایکنواخت و همگرایی‌اش

در این بخش، یک روش جستجوی خطی نایکنواخت ناهموار ارائه و همگرایی سراسری آن اثبات می‌شود. ابتدا یک جهت کاهشی با استفاده از $\partial_\varepsilon f(x)$ به ازای $\varepsilon > 0$ تعریف می‌شود. سپس، با استفاده از این تعریف شرط

آرمیژو تعمیم داده می‌شود و خوش تعریف بودن آن نشان داده می‌شود. فرض کنید v_k یک عنصر از $\partial_\varepsilon f(x)$ با مینیمم نرم است:

$$v_k = \arg\min \{\|\xi\| \ : \ \xi \in \partial_{\varepsilon_k} f(x_k)\}. \tag{۲}$$

اگر $v_k^T d_k < 0$، در این‌صورت d، یک جهت کاهشی برای تابع f در x است. حال با در نظر گرفتن یک جهت کاهشی، شرط آرمیژو نایکنواخت (۱) برای تابع پیوسته لیپ‌شیتز موضعی به صورت زیر تعریف می‌گردد:

تعریف ۱.۳. فرض کنید d یک جهت کاهشی برای تابع f در x_k باشد. گوییم طول گام α در شرط آرمیژو نایکنواخت ناهموار صادق است، هرگاه

$$f(x_k + \alpha d_k) - f(x_{l(k)}) \leq c_1 \alpha v_k^T d, \tag{۳}$$

که در آن v_k جواب مسأله (۳) ، $c_1 \in (0, 1]$، $f(x_{l(k)}) = \max_{0 \leq j \leq m(k)} f(x_{k-j})$، $m(0) = 0$، برای $k \geq 1$، $0 \leq m(k) \leq \min\{m(k-1)+1, M\}$ و M عدد صحیح نامنفی است.

می‌دانیم جهت $d_k = -v_k$، یک جهت نزولی برای تابع f در x_k می‌باشد. بنابراین جهت کاهشی تعریف شده در (۳) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد.

$$f(x_k + \alpha v_k) - f(x_{l(k)}) \leq c_1 \alpha ||v_k||^2, \tag{۴}$$

گزاره زیر نشان می‌دهد که حداقل یک طول گام وجود دارد که در شرط آرمیژو نایکنواخت ناهموار (۴) صدق می‌کند.

گزاره ۲.۳. فرض کنید $\varepsilon > 0$ و v_k جواب مسأله (۲) است، آن‌گاه

$$f(x_k + \frac{\varepsilon}{\|d_k\|} d_k) - f(x_{l(k)}) \leq -c_1 \varepsilon ||v_k||,$$

که در آن $d_k = -v_k$.

حال، روش جستجوی خطی نایکنواخت ناهموار به صورت زیر بیان می‌شود:

الگوریتم ۱. الگوریتم مینیمم‌سازی جستجوی خطی نایکنواخت ناهموار

گام ۱ : قرار ده $\varepsilon, \sigma, c_1 \in (0, 1)$، $x_0 \in \mathbb{R}^n$، $k = 0$ و M عدد صحیح مثبت است.

گام ۲ : v_k را به عنوان جواب مسأله بهینه‌سازی (۲) در نقطه x_k در نظر بگیر. اگر $\|v_k\| \leq \varepsilon$، متوقف شو. درغیر این‌صورت، قرار ده $d_k = -v_k$.

گام ۳ : قرار ده $\alpha = \sigma$، $\theta = \min\{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\|d_k\|}\}$، تا زمانی که

$$f(x_k + \alpha d_k) > f(x_{l(k)}) - c_1 \alpha \|v_k\|^2 \& \alpha > \theta,$$

قرار ده $\alpha = \sigma * \alpha$.

گام ۴ : اگر $\alpha > \varepsilon$، آن‌گاه $\alpha_k = \alpha$، در غیر این‌صورت قرار ده

$$\alpha_k = \theta, x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k, k = k + 1,$$

و به گام ۲ برو.

لم زیر نشان می‌دهد که دنباله تولیده شده $\{f(x_{l(k)})\}$ توسط الگوریتم ۱ ناصعودی است.

لم ۳.۳. فرض کنید مجموعه تراز $L = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$ کراندار است. اگر $\{f(x_{l(k)})\}$ دنباله تولید شده توسط الگوریتم ۱ باشد، در این‌صورت به ازای هر k، $f(x_{k+1}) \leq f(x_{l(k+1)}) \leq f(x_{l(k)})$، و دنباله $\{f(x_{l(k)})\}$ حداقل یک نقطه حدی دارد.

حال، آماده‌ایم تا با بیان قضیه زیر به اثبات همگرایی سراسری الگوریتم ۱ بپردازیم. در این قضیه نشان داده می‌شود که x_k، دنباله تولید شده توسط الگوریتم ۱، دارای نقطه حدی x^* بوده که ε-ایستای تابع f است.

قضیه ۴.۳. فرض کنید مجموعه تراز L کراندار است. اگر الگوریتم ۱ بعد از تعداد متناهی تکرار متوقف نشود، آنگاه $0 \in \partial_\varepsilon f(x^*)$، که x^* یک نقطه حدی از دنباله $\{x_k\}$ است.

۴. نتایج عددی

در این بخش، کارایی الگوریتم پیشنهادی روی مسائل بهینه‌سازی نامحدب و ناهموار ارائه شده در [۶، ۸] مورد بررسی قرار می‌گیرد و با الگوریتم تقریب تندترین کاهش مقایسه می‌گردد. الگوریتم‌ها در محیط MATLAB۲۰۱۹b پیاده‌سازی می‌شوند و برای مقایسه این دو الگوریتم تعداد دفعات محاسبه تابع گزارش داده می‌شود. مسائل مورد آزمایش در ابعاد ۱۰، ۱۰۰ و ۱۰۰۰ به همراه مقدار بهینه آن‌ها در جدول ۱ آورده شده است. لازم به ذکر است تمامی مسائل مورد آزمایش، نامحدب هستند.

جدول ۱. مسأله های آزمایشی و جواب بهینه هر مسأله به ازای ابعاد مختلف.

شماره	مسأله ها	$n = ۱۰$	$n = ۱۰۰$	$n = ۱۰۰۰$
۱	MAXQ	۰	۰	۰
۲	MAXHILB	۰	۰	۰
۳	LQ	$-۱/۲۷۲۷۹۲e+۰۱$	$-۱/۴۰۰۰۷۱e+۰۲$	$-۱/۴۱۲۷۹e+۰۳$
۴	CB۳I	۱۸	۱۹۸	۱۹۹۸
۵	CB۳II	۱۸	۱۹۸	۱۹۹۸
۶	TEST۲۹ from ۲ problem	۰	۰	۰
۷	TEST۲۹ from ۵ problem	۰	۰	۰
۸	TEST۲۹ from ۶ problem	۰	۰	۰
۹	TEST۲۹ from ۱۱ problem	$۱/۰۱۹۶۱۴e+۰۲$	$۱/۱۸۶۳۲۴e+۰۳$	$۱/۲۰۳۱۲e+۰۰۴$
۱۰	TEST۲۹ from ۱۳ problem	$۴/۵۳۷۹۷۸e+۰۰$	$۵/۵۵۹۰۲۳e+۰۱$	$۵/۶۶۱۳۱e+۰۰۲$

الگوریتم پیشنهادی به ازای $M = ۱$ به الگوریتم تقریب تندترین کاهش در [۹] تبدیل می‌شود. الگوریتم تقریب تندترین کاهش با روش‌های دیگر در [۹] مقایسه شده است. لذا این مقاله، به مقایسه روش پیشنهادی با روش‌های دیگر نمی‌پردازد. الگوریتم‌های تقریب تندترین کاهش و الگوریتم جستجوی خطی نایکنواخت ناهموار به اختصار my و $nnls$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید n_{my}، n_{nnls}، f^* و $\bar{f}$، به ترتیب، نشان‌دهنده تعداد دفعات محاسبه تابع توسط الگوریتم my، تعداد دفعات محاسبه تابع توسط الگوریتم $nnls$، جواب بهینه و جواب بهینه محاسبه شده توسط الگوریتم پیشنهادی باشند. پارامترهای الگوریتم پیشنهادی مشابه الگوریتم تقریب تندترین کاهش در [۹] مقداردهی اولیه شده‌اند.

مطابق نتایج عددی به‌دست آمده برای $M = ۱, ۲, ۵, ۱۰$، حالت $M = ۲$ مناسب‌ترین انتخاب هست، زیرا تعداد مسائل بیشتری را نسبت به سایر حالت‌ها حل می‌کند. برای $n = ۱۰$ عملکرد الگوریتم‌ها تقریباً مشابه است، ولی زمانی که بعد مسأله افزایش می‌یابد، الگوریتم برای $M = ۱$، که همان الگوریتم my است، مسائل کمتری را نسبت به سایر حالت‌ها حل می‌کند. این موضوع نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نسبت به روش جستجوی یکنواخت برای مسائل نامحدب کاراتر است. اکنون نسبت تعداد دفعات محاسبه تابع برای حالت‌های $M = ۱$ و $M = ۲$ محاسبه و در جدول ۲ نمایش داده می‌شود. این نسبت افزایش دقت را نسبت به تعداد دفعات محاسبه تابع نشان می‌دهد. در جدول ۲ ، نماد + و − نشان‌دهنده حل و عدم حل مسأله توسط الگوریتم می‌باشد. در حالت $M = ۲$ و در ابعاد بالا، جواب بهینه برخی از مسائل با تعداد تکرار بسیار کمتری محاسبه شده است. در بقیه مسائل تفاوت قابل توجهی با حالت $M = ۱$ وجود ندارد، ولی با توجه به این‌که روش پیشنهادی تعداد بیشتری از مسائل را حل می‌کند، این نکته قابل اغماض می‌باشد.

جدول ۲. موفقیت و عدم موفقیت در حل مسائل و نسبت تعداد محاسبه توابع.

$n = ۱۰۰۰$			$n = ۱۰۰$			$n = ۱۰$			
$\frac{n_{my}}{n_{nnls}}$	$nnls$	my	$\frac{n_{my}}{n_{nnls}}$	$nnls$	my	$\frac{n_{my}}{n_{nnls}}$	$nnls$	my	نام مسأله
۱	+	+	۱٫۰۱	+	+	۱٫۳۴	+	+	۱
–	–	–	۲٫۷۸	+	+	۱٫۶۲	+	+	۲
۰٫۸۶	+	+	۰٫۷۷	+	+	۱٫۸۶	+	+	۳
–	+	–	–	+	–	۰٫۵۵	+	+	۴
–	+	–	۱٫۳۶	+	+	۲٫۹۹	+	+	۵
۱٫۴۴	+	+	۱٫۱۵	+	+	۲٫۵۷	+	+	۶
–	–	–	–	+	–	۱٫۲۷	+	+	۷
۰٫۰۷	+	+	۰٫۰۷۹	+	+	۰٫۰۷۹	+	+	۸
۱.۶۴	+	+	–	–	–	–	–	–	۹
–	–	–	–	–	–	۰٫۰۰۱	+	+	۱۰

۵. نتایج اصلی

در این مقاله، برای اولین بار روش جستجوی خطی نایکنواخت برای حل مسأله بهینه سازی ناهموار ارائه شد. برای انتخاب طول گام در امتداد جهت کاهشی تقریب تندترین کاهش، تعمیم ناهمواری از شرط آرمیژو معرفی شد. سپس الگوریتم مینیمم‌سازی بیان و همگرایی سراسری الگوریتم ارائه شده نشان داده شد. از نتایج به‌دست آمده، می‌توان گفت الگوریتم جستجوی خطی نایکنواخت بر روش تقریب تندترین کاهش برتری دارد. در کارهای آتی سعی می‌شود که الگوریتم جستجوی خطی نایکنواخت و الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار ترکیب شوند. حدس زده می‌شود که الگوریتم پیشنهادی ترکیبی، کارآمدتر از روش الگوریتم ناحیه اعتماد ناهموار و الگوریتم جستجوی خطی نایکنواخت باشد.

مراجع

1. Z. Akbari, R. Yousefpour and M. R. Peyghami, *A new nonsmooth trust region algorithm for locally Lipschitz unconstrained optimization problems*, J. Optim. Theory Appl. **164** (3) (2015) 3733–754.
2. D. Ataee Tarzanagh, M. R. Peyghami and H. Mesgarani, *A new nonmonotone trust region method for unconstrained optimization equipped by an efficient adaptive radius*, Optim. Methods and Software. **29** (4) (2014) 819–836.
3. A. M. Bagirov, N. Karmitsa and M. M. Mäkelä, *Introduction to Nonsmooth Optimization: Theory, Practice and Software*, Springer Publishing Company, Incorporated, 2014.
4. Y. H. Dai, *On the nonmonotone line search*, J. Optim. Theory Appl. **112** (3) (2002) 315–330.
5. L. Grippo, F. Lampariello and S. Lucidi, *A nonmonotone line search technique for Newton's method*, SIAM J. Numer. Anal. **23** (4) (1986) 707–7161.
6. N. Haarala, K. Miettinen and M.M. Mäkelä, *Globally convergent limited memory bundle method for large-scale nonsmooth optimization*, Math. Prog. **109** (2007) 181–205.
7. N. Karmitsa and A.M. Bagirov, *Limited memory discrete gradient bundle method for nonsmooth derivative-free optimization*, Optimization **61** (12) (2012) 1491–1509.
8. L. Luksan, M. Tuma, M. Siska, J. Vlcek and N. Ramesovat, *UFO* 2002*: interactive system for universal functional optimization*, Academy of Sciences of the Czech Republic. (2002). Also available at `http://www.cs.cas.cz/luksan/ufo.pdf`.
9. N. Mahdavi-Amiri and R. Yousefpour, *An effective nonsmooth optimization algorithm for locally Lipschitz functions*, J. Optim. Theory Appl. **155** (2012) 180–195.
10. J. Nocedal and S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer-Verlag New York, 1999.
11. L. Qi and J. Sun, *A trust region algorithm for minimization of locally Lipschitzian functions*, Math. Programming. **66** (1994) 25–43.
12. W. Sun, *Nonmonotone trust region method for solving optimization problems*, Appl. Math. Comput. **156** (1) (2004) 159–174.

13. H. Zhang and W. W. Hager, *A nonmonotone line search technique and its application to unconstrained optimization*, SIAM J. Optim. **14** (2004) 1043–1056.

پست الکترونیکی: z.akbari@umz.ac.ir

استفاده از روش برنامه‌ریزی تصادفی در مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری شامل پارامترهای بازه‌ای

مرضیه ایزدی*
دانشکده ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران
و محمدعلی یعقوبی
دانشکده ریاضی و کامپیوتر، گروه ریاضی کاربردی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان، ایران

چکیده. مقاله حاضر به بیان مسأله انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری تحت برخی شرایط عدم قطعیت با پارامترهای بازه‌ای می‌پردازد. بعد از مدل‌سازی مسأله شامل پارامترهای بازه‌ای با توجه به در نظر گرفتن معیارهای بالاترین بازده و کمترین ریسک برای برخورد با آن از توزیع نرمال بریده شده استفاده می‌شود. در ادامه یک مدل برنامه‌ریزی تصادفی حاصل می‌شود که با به‌کارگیری روشی مناسب می‌توان آن‌را به یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی تبدیل کرد.
واژه‌های کلیدی: انتخاب بهینه سبد سرمایه‌گذاری، بهینه‌سازی بازه‌ای، برنامه‌ریزی عدم قطعیت.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. بیان مسأله

بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری عبارت است از انتخاب بهترین ترکیب از دارایی‌های مالی به‌نحوی که باعث شود تا حد ممکن بازده سبد سرمایه‌گذاری حداکثر و ریسک آن حداقل شود. ریسک و بازده معیارهایی هستند که میزان مطلوبیت سرمایه‌گذار از انتخاب مجموعه دارایی‌ها را مشخص می‌کنند. انتخاب مجموعه دارایی بهینه اغلب با تبادل بین ریسک و بازده صورت می‌گیرد، هر چه ریسک مجموعه دارایی بیشتر باشد، سرمایه‌گذاران انتظار دریافت بازده بالاتری را خواهند داشت. در ادامه فرض کنید n دارایی (سهم) برای سرمایه‌گذاری در اختیار است. متغیر تصمیم‌گیری x_j $(j = ۱, \ldots, n)$ نشان دهنده میزان نسبتی از کل سرمایه است، که باید در دارایی $j-$ام سرمایه‌گذاری شود. متغیر تصادفی r_j نشان دهنده میزان بازده $j-$امین دارایی می‌باشد. بازده مورد انتظار $j-$امین دارایی به‌صورت $\gamma_j = E(r_j) = \frac{۱}{T}\sum_{t=۱}^{T} r_{jt}$ تعریف می‌شود، که در آن T تعداد کل دوره‌ها و r_{jt} بازده $j-$امین دارایی در دوره t است. از دیدگاه عملی معمولا دشوار است که بازده‌ای از دارایی‌ها را بتوان به‌طور دقیق پیش بینی کرد. در واقع، در مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بازده دارایی‌ها نامشخص هستند و بیان آن‌ها به‌صورت یک مقدار واحد دقیق نیست. برای برخورد با این مشکل می‌توان مقدار بازده هر دارایی را به جای یک مقدار واحد به‌صورت بازه مقادیری که بازده دارایی ممکن است در آن ظاهر شود، در نظر گرفت [۲، ۴]. در این مقاله برای تعیین بازه از چهار شاخص قیمت: قیمت باز، قیمت بالا، قیمت پایین، قیمت بسته (پایانی) استفاده شده است و مینیمم میانگین بازده دوره‌ها در این چهار شاخص به‌عنوان کران پایین و ماکزیمم میانگین بازده دوره‌ها به‌عنوان کران بالایی از بازه در نظر گرفته شده است. برای دارایی $j-$ام به‌ترتیب γ_j^L و γ_j^U نشان دهنده کران پایین و بالای بازه تخمین زده شده برای بازده این دارایی می‌باشند. بنابراین بازده مورد انتظار سبد سرمایه‌گذاری با وزن‌های سرمایه‌گذاری x، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$r_p(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) = E[\sum_{j=۱}^{n} r_j x_j] = \sum_{j=۱}^{n} [\gamma_j^L, \gamma_j^U] x_j.$$

امروزه سرمایه‌گذاران از معیارهای مختلف اندازه‌گیری ریسک به‌منظور انتخاب سبد سرمایه‌گذاری مورد نظر استفاده می‌کنند [۱، ۶]. در این مقاله برای اندازه‌گیری ریسک مدل کونو و یامازاکی استفاده شده است. آن‌ها قدرمطلق انحراف از بازده مورد انتظار را برای اندازه‌گیری ریسک به‌کار بردند و راه حل ساده‌ای برای مسأله انتخاب سبد سرمایه‌گذاری پیشنهاد دادند [۳]. مطالعات کونو و یامازاکی حاکی از آن است که قدرمطلق انحراف از میانگین

* سخنران

بازده تحت این شرط که متغیر تصادفی r_j دارای توزیع نرمال باشد همانند واریانس معیار مناسبی برای اندازه‌گیری ریسک است. لذا در مدل آن‌ها تابع ریسک به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E|\sum_{j=1}^{n}(r_j-\gamma_j)x_j| = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-\gamma_j)x_j|.$$

با در نظر گرفتن این‌که $|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-\gamma_j)x_j| \le \sum_{j=1}^{n}|(r_{jt}-\gamma_j)||x_j|$ و $|x| = x$ (چون x_j بین صفر و یک مقدار می‌گیرد) به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\sum_{j=1}^{n}(r_{jt}-\gamma_j)x_j| \le \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\sum_{j=1}^{n}|(r_{jt}-\gamma_j)|x_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|(r_{jt}-\gamma_j)|x_j. \quad (1)$$

بنابراین اگر در (۱) عبارت سمت راست مینیمم شود در واقع یک کران بالا از ریسک و در نتیجه ریسک مینیمم شده است. با توجه به این‌که $\gamma_j \in [\gamma_j^L, \gamma_j^U]$، برای راحتی $[\theta_j^L, \theta_j^U]$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$[\theta_j^L, \theta_j^U] = \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{T}|(r_{jt}-\gamma_j)| = \left[\min_{\gamma_j\in[\gamma_j^L,\gamma_j^U]}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|(r_{jt}-\gamma_j)|, \max_{\gamma_j\in[\gamma_j^L,\gamma_j^U]}\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|(r_{jt}-\gamma_j)|\right].$$

بنابراین به کمک یک مدل بهینه‌سازی دو هدفی که در آن ریسک حداقل و بازده حداکثر می‌شود، می‌توان سبد سرمایه‌گذاری بهینه را انتخاب کرد. مدل انتخاب سبد سرمایه‌گذاری بهینه به‌صورت زیر است:

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n}[\theta_j^L,\theta_j^U]x_j, -\sum_{j=1}^{n}[\gamma_j^L,\gamma_j^U]x_j\right\} \quad (2)$$

$$subject\ to\ \sum_{j=1}^{n}x_j = 1,\ 0 \le x_j \le 1, j = 1,\dots,n,$$

که در آن $\sum_{j=1}^{n}x_j = 1$ دلالت بر این دارد که مجموع وزن‌های کل دارایی‌های موجود در سبد سرمایه‌گذاری باید برابر یک باشد.

۲. مراحل حل مسأله

۱.۲. تبدیل محدودیت بازه‌ای به احتمال. بازه $A = [A^L, A^U]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید متغیر تصادفی X در این بازه دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است. چون متغیر تصادفی در یک بازه دارای توزیع نرمال است از توزیع نرمال بریده شده استفاده می‌شود. توزیع نرمال بریده شده یک توزیع آماری است که با محدود کردن مقادیر یک متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال به‌دست می‌آید. تابع توزیع متغیر تصادفی نرمال بریده شده روی بازه A به‌صورت زیر است:

$$F_X(x,\mu,\sigma,A^L,A^U) = \frac{\Phi(\xi)-\Phi(\alpha)}{\Phi(\beta)-\Phi(\alpha)},$$

که در آن $\xi = \frac{x-\mu}{\sigma}$، $\alpha = \frac{A^L-\mu}{\sigma}$، $\beta = \frac{A^U-\mu}{\sigma}$ و Φ تابع توزیع نرمال است. بازه‌ها با متغیر تصادفی متناظرشان نمایش داده می‌شوند. فرض کنید متغیر تصادفی X در بازه $[A^L, A^U]$ دارای توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ است در این‌صورت بنابر قاعده 3σ، $p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) \approx 0/9973$ است. به‌جهت سهولت فرض کنید $p(\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma) = 1$ و بنابراین $[A^L, A^U] = [\mu-3\sigma, \mu+3\sigma]$. متغیرتصادفی متناظر با این بازه دارای توزیع نرمال بریده شده با میانگین $\frac{A^L+A^U}{2}$ و انحراف معیار $\frac{A^U-A^L}{6}$ است. در ادامه متغیرهای تصادفی با حروف کوچک لاتین نمایش داده می‌شوند و رابطه بین دو بازه

با استفاده از متغیرهای متناظرشان به‌دست می‌آید. دو بازه $A = [A^L, A^U]$، $B = [B^L, B^U]$ و متغیرهای متناظرشان به‌ترتیب با $a \sim N(m(A), (\frac{R(A)}{3})^2)$ و $b \sim N(m(B), (\frac{R(B)}{3})^2)$ را در نظر بگیرید، که $m(A) = \frac{A^L + A^U}{2}$ و $R(A) = \frac{A^U - A^L}{2}$. رابطه‌های ترتیبی مختلفی بین بازه‌ها تعریف شده است [۷]. در این مقاله رابطه زیر که توسط مارکوف تعریف شده مورد استفاده قرار می‌گیرد [۵]:

$$(3) \qquad A \ominus B = \begin{cases} [A^L - B^L, A^U - B^U] & if \quad A^L - B^L \leq A^U - B^U, \\ [A^U - B^U, A^L - B^L] & if \quad A^L - B^L > A^U - B^U, \end{cases}$$
$$m(A \ominus B) = m(A) - m(B),\ R(A \ominus B) = |R(A) - R(B)|.$$

حال بازه $C = A \ominus B$ و متغیر متناظر با این بازه $c \sim N(m(C), (\frac{R(C)}{3})^2)$ را در نظر بگیرید. با توجه به رابطه (۳) $A \leq B$، معادل با $C \leq 0$ است. میزان احتمال رابطه به‌صورت $p(C \leqslant 0)$ تعریف می‌شود. برای مثال اگر $A = [2, 5]$ و $B = [3, 2]$ پس $C = [3, 2] - [2, 5] = [-3, 1]$ و متغیر تصادفی $c \sim N(-1, (\frac{2}{3})^2)$ متناظر با آن است. چون متغیر تصادفی دارای توزیع نرمال بریده شده در بازه C است، بنابراین $p(C \leqslant 0) = F_c(0) = \frac{\Phi(\xi) - \Phi(\alpha)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}$ که در آن $\xi = \frac{3}{4}$، $\alpha = -3$، $\beta = 3$، $\Phi(\xi) = 0.9332$، $\Phi(\alpha) = 0.0013$، $\Phi(\beta) = 0.9987$ و در نتیجه $p(C \leqslant 0) = \frac{0.9332 - 0.0013}{0.9987 - 0.0013} = 0.94$. بنابراین $A \leqslant B$ با احتمال ۰/۹۴ برقرار است. این مفاهیم را هم‌چنین می‌توان برای نامساوی‌های بازه‌ای به‌فرم نامساوی‌های جبری توسعه داد. برای مثال نامساوی بازه‌ای $Ax_1 + Bx_2 \leqslant D$ که در آن $x_1, x_2 \geqslant 0$ $A = [1, 3], B = [2, 4], D = [1, 5]$ را در نظر بگیرید.

$$Z(x_1, x_2) = (Ax_1 + Bx_2) \ominus D = [x_1 + 2x_2, 3x_1 + 4x_2] \ominus [1, 5].$$

در ادامه احتمال رابطه بین $Ax_1 + Bx_2$ و D با درجه حداقل $\lambda \in [0, 1]$ در نظر گرفته می‌شود. برای مثال به ازای $\lambda = 0.9$ داریم:

$$P(z(x_1, x_2) \leq 0) \geq 0.9 \equiv \frac{\Phi(\frac{-m(Z(x_1, x_2))}{\frac{R(z(x_1, x_2))}{3}}) - \Phi(\alpha)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} \geq 0.9,$$

که در آن $\alpha = -3$ و $\beta = 3$. با توجه به اینکه $\alpha = -\beta$ و $\Phi(\beta) = 0.9987$ نتیجه می‌شود:

$$\Phi\left(\frac{-(2x_1 + 3x_2 - 3)}{\frac{|x_1 + x_2 - 2|}{3}}\right) \geq 0.8989 \equiv \frac{-6x_1 - 6x_2 + 9}{|x_1 + x_2 - 2|} \geq \Phi^{-1}(0.8989) = 1.27,$$
$$-6x_1 - 6x_2 + 9 \geq 1.27|x_1 + x_2 - 2|.$$

لذا محدودیت بازه‌ای تبدیل به یک محدودیت با عبارات جبری همراه با قدر مطلق می‌شود.

۲.۲. تبدیل مسأله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به یک مسأله برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای. برای حل مسأله (۲) باتوجه به دو معیاره بودن تابع هدف، یک پیشنهاد این است که با توجه به ریسک مورد قبول سرمایه‌گذار یک

کران بالا برای آن در نظر گرفته شود. بنابراین مسأله بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری به‌صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
(۴) \qquad & min \ -\sum_{j=۱}^{n}[\gamma_j^L, \gamma_j^U]x_j \\
& subject\ to \sum_{j=۱}^{n}[\theta_j^L, \theta_j^U]x_j \leq [\upsilon^L, \upsilon^U], \\
& \sum_{j=۱}^{n} x_j = ۱, \ ۰ \leq x_j \leq ۱, j = ۱, \ldots, n,
\end{aligned}
$$

که در آن $[\upsilon^L, \upsilon^U]$ بازه‌ای است که سرمایه‌گذار تمایل دارد ریسک در آن ناحیه قرار داشته باشد.
اکنون نامساوی‌های بازه‌ای به نامساوی‌های جبری تبدیل می‌شوند. بازه‌ها و متغیرهای تصادفی متناظر آن‌ها را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:

$$
G(x_۱, \ldots, x_n) = \sum_{j=۱}^{n} \theta_j x_j \ominus \upsilon, \qquad g \sim N\left(m(G(x_۱, \ldots, x_n)), \frac{R(G(x_۱, \ldots, x_n))}{۳}\right),
$$

$$
m(G(x_۱, \ldots, x_n)) = \sum_{j=۱}^{n} m(\theta_j)x_j - m(\upsilon), \ R(G(x_۱, \ldots, x_n)) = |\sum_{j=۱}^{n} R(\theta_j)x_j - R(\upsilon)|.
$$

با استفاده از λ مناسب می‌توان محدودیت‌های بازه‌ای را به محدودیت‌های احتمال تبدیل کرد و مجموعه شدنی را به‌صورت زیر در نظر گرفت:

$$
S_\lambda = \{(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) | P(G(X_۱, \ldots, x_n, v^L, v^U) \leq ۰) \geq \lambda, \sum_{j=۱}^{n} x_j = ۱, \ ۰ \leq x_j \leq ۱, j = ۱, \ldots, n\}.
$$

محدودیت احتمال را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
& P(G(x_۱, \ldots, x_n, \upsilon^L, \upsilon^U) \leq ۰) \geq \lambda \\
& \equiv \Phi\left(\frac{-m[G(x_۱, \ldots, x_n, \upsilon^L, \upsilon^U)]}{\frac{R([G(x_۱, \ldots, x_n, \upsilon^L, \upsilon^U)]}{۳}}\right) \geq (۲\lambda - ۱)\Phi(\beta) + (۱ - \lambda).
\end{aligned}
$$

چون $\Phi(\beta)$ بر حسب متغیرهای کراندار است می‌توان یک کران پایین برای عبارت سمت راست به‌دست آورد که آن‌را $\hat{\lambda}$ می‌نامیم. هم‌چنین با جایگزینی میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی، نتیجه می‌شود:

$$
\sum_{j=۱}^{n} m(\theta_j)x_j - m(\upsilon) + \Phi^{-۱}(\hat{\lambda})\left(\frac{|(\sum_{j=۱}^{n} R(\theta_j)x_j) - R(\upsilon)|}{۳}\right) \leq ۰.
$$

در روش برنامه‌ریزی محدودیت شانس، به حداقل رساندن یک تابع هدف شامل متغیر تصادفی معادل با به حداقل رساندن مجموع میانگین و انحراف معیار آن است. بنابراین مدل (۴) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(۵)\quad \min\ -\sum_{j=۱}^{n} m(\gamma_j)x_j - \sum_{j=۱}^{n} \frac{R(\gamma_j)}{۳}x_j$$
$$subject\ to\ \sum_{j=۱}^{n} m(\theta_j)x_j - m(\upsilon) + \Phi^{-۱}(\hat{\lambda})\left(\frac{|(\sum_{j=۱}^{n} R(\theta_j)x_j) - R(\upsilon)|}{۳}\right) \leq ۰$$
$$\sum_{j=۱}^{n} x_j = ۱,\ ۰ \leq x_j \leq ۱, j = ۱, \ldots, n.$$

مثال ۱.۲. بازده‌های متناظر با قیمت باز، ماکزیمم قیمت، مینیمم قیمت، قیمت پایانی از دو دارایی چافست و ایران خودرو از بازار بورس ایران برای یک دوره ۳۶ ماه را در نظر بگیرید (این داده‌ها با استفاده از نرم افزار Tseclient به‌دست آمده‌اند.) به‌دلیل حجم زیاد داده ها و قابل دسترس بودن آن‌ها، فقط داده‌های به‌دست آمده از این بازده‌ها در ادامه ذکر شده‌اند. برای به‌دست آوردن داده‌های مورد نیاز از این بازده‌ها از نرم افزار متلب استفاده شده است. برای به‌دست آوردن بازده هر ماه قیمت آخرین روز کاری در آن ماه منهای قیمت اولین روز کاری در آن ماه تقسیم بر قیمت اولین روز کاری در آن ماه شده است. از بین ۳۶ ماه فقط ماه‌هایی که دارای روزهای معاملاتی بوده‌اند، در نظر گرفته شده است.

$$[\gamma_{ch}^{L}, \gamma_{ch}^{U}] = [-/۰۲۴, /۰۸۱], \qquad [\gamma_{Kh}^{L}, \gamma_{Kh}^{U}] = [-/۰۳۴, /۰۶۵],$$
$$m(\gamma_{ch}) = /۰۲۸ \quad R(\gamma_{ch}) = /۰۰۳۵, \qquad m(\gamma_{Kh}) = /۰۱۵ \quad R(\gamma_{Kh}) = /۰۰۳$$

اندیس ch متناظر با دارایی چافست و اندیس Kh متناظر با دارایی ایران خودرو است. با توجه به داده‌های بالا بعد از حل مدل (۵) جواب $x_{KH} = ۰/۲۱, x_{ch} = ۰/۷۹$ به‌دست می‌آید.

مراجع

1. X. Cai, K. L. Teo, X. Yang and X. Y. Zhou, *Portfolio optimization under a minimax rule*, Manag. Sci. **46** (7) (2000) 957–972.
2. Y. Jong, *Optimization method for interval portfolio selection based on satisfaction index of interval inequality relation*, (2012). arXiv:1207.1932
3. H. Konno and H. Yamazakii, *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market*, Manag. Sci. **37** (5) (1991) 519–531.
4. S. T. Liu, *The mean-absolute deviation portfolio selection problem with interval-valued returns*, J. Comput. Appl. Math. **235** (14) (2011) 4149–4157.
5. S. Markov, *Calculus for interval functions of a real variable*, Computing **22** (4) (1979) 325–337.
6. H. Markowitz, *Portfolio selection*, J. Finance **7** (1) (1952) 77–91.
7. R. E. Moore, R. B. Kearfott and M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 2009.

پست الکترونیکی: marzie.izadi@gmail.com
پست الکترونیکی: yaghoobi@uk.ac.ir

طراحی قابل اطمینان از شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن با حداقل‌سازی انرژی مصرفی

عاطفه عبداله ابیانه*
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
و محمد علی رعایت پناه
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

چکیده. در شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن، افزایش سطح کیفیت خدمات در پایش بیمار و تشخیص زودهنگام بیماری‌های پرخطر در گرو مسیریابی امن و قابل اطمینان اطلاعات از گره‌های حسگر زیستی به گره چاهک و افزایش طول عمر شبکه است. بنابراین در این مقاله، مسأله طراحی قابل اطمینان از شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن با حداقل‌سازی انرژی مصرفی کل شبکه مورد بررسی قرار گرفته است و یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی برای آن پیشنهاد شده است.

واژه‌های کلیدی: طراحی قابل اطمینان، شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن، انرژی، مسأله بهینه‌سازی غیرخطی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90C30, 78M50, 65Kxx.

۱. پیش‌گفتار

شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن $(WBAN)$ که به‌منظور نظارت بر سلامت بیمار و تشخیص بسیاری از بیماری‌های تهدیدآمیز گسترش یافته‌اند، متشکل از حسگرهای زیستی کم‌توان، سبک و ارزان قیمت در دو نوع پوشیدنی و کاشتنی می‌باشند و اطلاعات فیزیولوژیکی بدن مانند فشار خون، دمای بدن، ضربان قلب، قندخون و اسیدلاکتیک را دریافت کرده و آن‌ها را به گره چاهک منتقل می‌کنند. ماهیت بیسیم این شبکه، امکان پایش بیمار در حین فعالیت‌های روزانه و هم‌چنین خارج از محیط بیمارستان را فراهم آورده است. بنابراین $WBAN$، جایگزین مناسبی برای تجهیزات مراقبتی پیچیده است [۶]. از آن‌جایی که انتقال اطلاعات در $WBAN$ از طریق فرکانس‌های رادیویی انجام می‌شود، بدن انسان هنگامی که در معرض میدان‌های الکترومغناطیسی فرکانس رادیویی قرار می‌گیرد، انرژی را جذب می‌کند و منجر به ضعیف شدن سیگنال‌ها می‌شود [۶]. هم‌چنین وجود موانع بین دستگاه‌های شبکه (حالتی را در نظر بگیرید که گره حسگر در یک سمت بدن و گره‌های رله و چاهک در سمت دیگر بدن بیمار قرار داشته باشند) تضعیف سیگنال‌ها را تشدید می‌کند. سیگنال‌های ضعیف شده با تأخیر مواجه می‌شوند که یکی از عوامل وقوع تداخل در شبکه است. به تداخل ناشی از تأخیر که توان دریافت دستگاه گیرنده (رله یا چاهک) را کاهش دهد، پدیده محو عمیق گفته می‌شود. محو عمیق اتصال شبکه را برای مدت طولانی (حداقل ۱۰ میلی ثانیه) قطع می‌کند [۶]. از طرفی پویایی در حرکات بدن بیمار و تغییر توپولوژی شبکه، ثبات لینک‌های شبکه را از بین می‌برد؛ قطع ارتباط و تأخیر در انتقال اطلاعات یا از بین رفتن آن‌ها ممکن است منجر به مرگ بیمار شود. از این رو مسیریابی قابل اطمینان، یافتن مسیری که از تأخیر و از دست دادن اطلاعات جلوگیری کند، از چالش‌های شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن به شمار می‌آید. انرژی مصرفی، مسأله مهم دیگری است که در بسیاری از مقالات از جمله [۱، ۴] به آن پرداخته شده است. در شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن، انتقال و دریافت اطلاعات توسط گره‌ها با مصرف انرژی همراه است و افزایش فاصله بین اجزای شبکه و ارتباط آن‌ها از طریق فرکانس‌های رادیویی از عواملی است که مصرف انرژی را افزایش می‌دهد. الیاس و همکاران [۲] یک مدل برنامه‌ریزی خطی صحیح (ILP) برای حداقل‌سازی مصرف انرژی در شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن ارائه دادند. آن‌ها با توجه به حالت‌های مختلف بدن بیمار مانند ایستادن، نشستن و راه رفتن به طراحی توپولوژی قابل اطمینان برای شبکه‌های بیسیم

* سخنران

ناحیه بدن پرداختند. در [۵] نویسندگان برای بهبود عملکرد لینک‌ها، مدلی برای حداقل‌سازی سطح از دست رفتن اطلاعات با توجه به احتمال شکست هر لینک ارائه دادند. در [۶] مدل‌هایی برای بهبود قابلیت اطمینان شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن با حداقل‌سازی انرژی مصرفی ارائه شده است. نتایج، بیانگر بهبود قابلیت اطمینان از نظر اتلاف بسته تا ۹۰٪ و کاهش انرژی مصرفی تا ۱۳٪ است.

به هر حال، قابلیت اطمینان شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن که به نظر می‌آید باید مستقل از حرکات بدن باشد، مسأله مهمی است که به‌طور جدی به آن پرداخته نشده است. در این مقاله برای تضمین تحویل موفقیت‌آمیز داده‌ها از حسگر زیستی به گره چاهک، هر لینک از شبکه به یک تابع محدب، غیرافزایشی، مشتق پذیر و پیوسته برحسب میزان جریان عبوری از آن لینک متناظر می‌شود که به آن تابع قابلیت اطمینان گفته می‌شود و احتمال موفقیت هر لینک در انجام عملیات انتقال اطلاعات تعریف شده است. در این‌جا فرض می‌شود که این احتمالات مستقل از یکدیگر باشند؛ بنابراین احتمال اینکه اطلاعات هر حسگر زیستی با موفقیت به گره چاهک تحویل داده شود از حاصل ضرب قابلیت اطمینان لینک‌های داخل مسیر حاصل می‌شود. هدف یافتن مسیری است که قابلیت اطمینان آن از یک پارامتر حد آستانه بیشتر باشد. علاوه بر موفقیت‌آمیز بودن مسیریابی در تحویل اطلاعات، حداقل‌سازی مصرف انرژی، موضوع دیگر مورد بررسی در این مقاله است. در واقع گره‌های حسگر در انتقال مستقیم اطلاعات به گره چاهک به دلیل فاصله زیاد، متحمل مصرف بالای انرژی برای انتقال اطلاعات می‌شوند [۷]. از آن‌جا که این حسگرها بسیار کوچک هستند، فضای محدودی در آن‌ها به باطری تخصیص داده شده است و تعویض یا شارژ مجدد باطری‌ها تقریبا غیرممکن است [۳]. بنابراین مصرف زیاد انرژی، طول عمر باطری‌ها و هم‌چنین طول عمر شبکه را کاهش می‌دهد. به‌منظور کاهش فاصله بین اجزای شبکه و در نتیجه بهینه‌سازی مصرف انرژی، در این مقاله از مسیریابی چند هاب برای انتقال اطلاعات استفاده شده است که در آن انتقال اطلاعات توسط بعضی گره‌های میانی به نام رله انجام می‌شود. ساختار مقاله در ادامه به شرح زیر است: در بخش ۲ به ارائه مدل ریاضی مسأله و در بخش ۳ به ارائه نتایج پرداخته می‌شود.

۲. مدل ریاضی

شبکه مورد بررسی در این مقاله به صورت یک گراف جهت‌دار $G(V,A)$ نمایش داده می‌شود که در آن V بیانگر گره‌های شبکه است و شامل مجموعه گره‌های حسگر زیستی B، مجموعه گره‌های رله R و در نهایت گره چاهک s می‌باشد. هم‌چنین $A=\tilde{A}\cup\hat{A}$ بیانگر مجموعه لینک‌های شبکه است که در آن مجموعه‌های $\hat{A}$ و $\tilde{A}$ به‌ترتیب معرف مجموعه لینک‌های بیسیم و جهت‌دار متناظر با گره‌های رله و مجموعه لینک‌های بیسیم و بدون جهت بین حسگرها-رله‌ها و رله‌ها-چاهک می‌باشد، یعنی:

$$\hat{A}\subseteq\{(i,j)|i,j\in R\}\,,\qquad \tilde{A}\subseteq\{(b,i)\cup(i,s)|b\in B,i\in R\}\,.$$

برای هر رله $i\in R$، حسگر زیستی $b\in B$ وچاهک s، مجموعه‌های FS، RS، $\widetilde{RS}$ و $\widetilde{FS}$ به‌صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$FS(i)=\left\{j:(i,j)\in\hat{A}\right\},\qquad RS(i)=\left\{h:(h,i)\in\hat{A}\right\},$$
$$\widetilde{FS}(b)=\left\{i:(b,i)\in\tilde{A}\right\},\qquad \widetilde{RS}(s)=\left\{i:(i,s)\in\tilde{A}\right\}.$$

در مجموعه‌های فوق $\widetilde{FS}(b)$ بیانگر مجموعه رله‌های $i\in R$ است که می‌توانند به حسگرهای زیستی $b\in B$ تخصیص داده شوند و $\widetilde{RS}(s)$ بیانگر مجموعه رله‌های $i\in R$ که می‌توانند به چاهک s تخصیص داده شوند. در این مسأله فرض شده است که ارسال اطلاعات بین حسگرهای زیستی مجاز نمی‌باشد. برای مدل کردن این مسأله محدودیت‌های زیر تعریف شده است.

۱.۲. محدودیت‌های تخصیص. برای محافظت از بافت‌های اساسی بدن، هر حسگر زیستی می‌تواند اطلاعات خود را تنها به یک رله که در محدوده ارتباطی آن حسگر مستقر شده است منتقل کند. به‌طور مشابه، برای گره چاهک نیز محدوده ارتباطی در نظر گرفته شده است و تمامی اطلاعات توسط یک رله به آن منتقل می‌شود. بدین منظور

متغیرهای دودویی x_{bi} و x_{is} که به‌ترتیب بیانگر متغیر تخصیص حسگر به رله و چاهک به رله است به‌صورت زیر تعریف می‌گردند.

$$x_{bi} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر حسگر زیستی } b \text{ به رله } i \text{ تخصیص داده شود} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad \forall (b,i) \in \tilde{A},$$

$$x_i s = \begin{cases} ۱ & \text{اگر رله } i \text{ به چاهک } s \text{ تخصیص داده شود} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \qquad \forall (i,s) \in \tilde{A}.$$

بنابراین محدودیت‌های تخصیص برای گره‌های حسگر و چاهک به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

$$\sum_{i \in \widetilde{FS}(b)} x_{bi} = ۱, \qquad \forall b \in B, \tag{۱}$$

$$\sum_{i \in \widetilde{RS}(s)} x_{is} = ۱, \tag{۲}$$

$$x_{bi} \le a_{bi} y_i, \qquad \forall b \in B, i \in R, \tag{۳}$$

$$x_{is} \le e_{is} y_i, \qquad \forall i \in R. \tag{۴}$$

محدودیت‌های (۱) و (۲) نشان‌دهنده آن هستند که تنها یک رله می‌تواند به هر گره حسگر و چاهک اختصاص یابد. محدودیت‌های (۳) و (۴) به‌ترتیب بیان می‌کنند که تنها رله‌هایی که در محدوده ارتباطی حسگرهای زیستی و چاهک مستقر شده‌اند می‌توانند به آن‌ها تخصیص داده شوند. پارامترهای a_{bi} و e_{is} پارامترهای اتصال بین حسگر–رله و رله –چاهک هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$a_{bi} = \begin{cases} ۱, & \text{اگر رله } i \text{ در محدوده ارتباطی حسگر زیستی } b \text{ نصب و بتواند یک لینک بیسیم با } b \text{ برقرار کند.} \\ ۰, & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$$e_{is} = \begin{cases} ۱, & \text{اگر رله } i \text{ در محدوده ارتباطی چاهک } s \text{ نصب و بتواند یک لینک بیسیم با } s \text{ برقرار کند.} \\ ۰. & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

۲.۲. **محدودیت تعادل جریان.** در مدل پیشنهادی فرض شده است که اطلاعات هر حسگر زیستی از یک مسیر واحد به چاهک ارسال شود، هم‌چنین ارسال اطلاعات از حسگرهای زیستی به رله، از رله به رله و از رله به چاهک می‌تواند انجام گردد؛ بنابراین محدودیت تعادل جریان به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sum_{j \in FS(i)} z_{ij}^b - \sum_{h \in RS(i)} z_{hi}^b = x_{bi} - x_{is}, \qquad \forall i \in R, b \in B.$$

در محدودیت فوق، z_{ij}^b بیانگر متغیر دودویی متناظر با هر لینک $(i,j) \in \hat{A}$ و برابر ۱ است اگر، حسگر زیستی b برای انتقال اطلاعات خود از لینک بیسیم (i,j) استفاده کند و در غیر این‌صورت برابر ۰ است.

۳.۲. **محدودیت محاسبه جریان.** میزان جریان عبوری از هر لینک $(i,j) \in \hat{A}$ به‌صورت مجموع اطلاعات تولید شده توسط هر حسگر زیستی روی آن لینک محاسبه می‌شود. دراین‌جا d_b^s(bit/s) نرخ تولید اطلاعات گره حسگر زیستی $b \in B$ است، بنابراین میزان جریان عبوری از هر لینک $(i,j) \in \hat{A}$، l_{ij}، به شکل محدودیت (۵) بیان می‌گردد.

$$l_{ij} = \sum_{b \in B} d_b^s z_{ij}^b, \qquad \forall (i,j) \in \hat{A}. \tag{۵}$$

با توجه به محدودیت‌های تخصیص، میزان بار عبوری از هر یک از لینک‌های بیسیم $(b,i) \in \tilde{A}$ برابر است با نرخ اطلاعات تولید شده توسط هر حسگر زیستی یعنی: $\sum_{i\in R} d_b^s x_{bi}$ و می‌توان آن‌را برای هر $b \in B$ به‌طور معادل برابر با پارامتر $l_{bi} = d_b^s$ قرار داد. به‌طور مشابه میزان جریان عبوری برای هر $(i,s) \in \tilde{A}$ به‌صورت $l_{is} = \sum_{b\in B}\sum_{i\in R} d_b^s x_{is} = \sum_{b\in B} d_b^s$ محاسبه می‌شود.

۴.۲. **محدودیت ظرفیت جریان.** در مدل پیشنهادی، فرض شده است که لینک (i,j) دارای ظرفیت محدود m_{ij} می‌باشد و میزان جریان عبوری از لینک‌ها می‌تواند حداکثر به اندازه ظرفیت آن لینک باشد، یعنی:

$$0 \le l_{ij} \le m_{ij}, \qquad \forall (i,j) \in \hat{A}.$$

۵.۲. **محدودیت قابلیت اطمینان لینک.** قابلیت اطمینان Re_{ij} برای لینک (i,j) به‌عنوان یک تابع غیرافزایشی و بر حسب میزان جریان عبوری از آن لینک به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$Re_{ij} = \frac{(m_{ij} - l_{ij})^2}{(m_{ij})^2}, \qquad \forall (i,j) \in \hat{A}, \tag{۶}$$

برای هر حسگر زیستی $b \in B$ حاصل‌ضرب قابلیت اطمینان لینک‌های موجود در مسیر انتقال اطلاعات باید حداقل به اندازه پارامتر حد آستانه τ_b باشد، یعنی:

$$\alpha_b . \beta . \prod_{(i,j)\in\hat{A}} Re_{ij}^{z_{ij}^b} \le \tau_b, \qquad \forall b \in B. \tag{۷}$$

در محدودیت‌های فوق، $0 \le \tau_b \le 1$ بیانگر پارامتر حد آستانه برای هر حسگر زیستی $b \in B$ است. هم‌چنین پارامترهای α_b و β به‌ترتیب بیانگر قابلیت اطمینان لینک‌های اتصال دهنده حسگر زیستی $b \in B$ به رله $i \in R$ و رله $i \in R$ به چاهک s است.

$$\alpha_b = \frac{(m_{bi} - d_b^s)^2 x_{bi}}{(m_{bi})^2}, \qquad (\forall (b,i) \in \tilde{A}),$$
$$\beta = \frac{(m_{is} - \sum_{b\in B} d_b^s)^2 x_{is}}{(m_{is})^2}, \qquad (\forall (i,s) \in \tilde{A}).$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود محدودیت‌های (۶) و (۷) غیرخطی هستند. می‌توان محدودیت (۷) را با استفاده از روش زیر به‌صورت یک محدودیت خطی بیان کرد.

$$\alpha_b \beta \sum_{(i,j)\in\hat{A}} \log(Re_{ij}) z_{ij}^b \ge \log(\tau_b).$$

۶.۲. **تابع هدف.** در این مقاله هدف، حداقل‌سازی انرژی مصرفی برای انتقال اطلاعات از حسگرهای زیستی به گره چاهک است. پارامتر E_{ij}، که به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است، بیانگر انرژی مصرفی برای انتقال یک واحد اطلاعات از گره i به گره j روی لینک (i,j) است.

$$E_{ij} = E_{TX_{CIRC}} + E_{TX_{AMP}}(\lambda_{ij}) \delta_{ij}^{\lambda_{ij}},$$

در عبارت فوق، پارامتر $E_{TX_{CIRC}}$ بیانگر انرژی انتقال و پارامتر $E_{TX_{AMP}}$ بیانگر انرژی آمپلی‌فایر انتقال است؛ به‌علاوه λ_{ij} و δ_{ij} به‌ترتیب بیانگر پارامترهای ضریب از دست رفت مسیر و فاصله بین گره‌های (i,j)

است. در نهایت تابع هدف به‌صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\sum_{(b,i)\in\tilde{A}} d_b^s E_{bi} x_{bi} + \sum_{b\in B} d_b^s \left(\sum_{(i,j)\in\hat{A}} E_{ij} z_{ij}^b + \sum_{(i,s)\in\tilde{A}} E_{is} x_{is} \right).$$

۳. نتایج اصلی

در این مقاله، مسأله طراحی قابل اطمینان از شبکه‌های بیسیم ناحیه بدن با حداقل‌سازی انرژی انتقال مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌بندی مسأله منجر به مدل غیرخطی صحیح آمیخته شده است که در آن برای حصول اطمینان در ارسال بدون تأخیر یا تلف شدن بسته‌های اطلاعاتی، شبکه مستلزم است مسیریابی را به گونه‌ای انجام دهد که قابلیت اطمینان رله‌های مستقر در مسیر انتقال داده‌های تولید شده توسط هر حسگر، بیشتر از پارامتر حد آستانه مورد تایید پزشک یا مرکز بهداشتی تحت نظر باشد. به این منظور، به هر لینک از شبکه یک تابع غیرافزایشی برحسب میزان جریان عبوری از آن لینک متناظر می‌شود و بر اساس آن، قابلیت اطمینان مسیرها محاسبه می‌گردد.

مراجع

1. J. Elias and A. Mehaoua, *Energy-aware topology design for wireless body area networks*, in Proc. IEEE Int. Conf. Commun. Ottawa, ON, (2012) pp. 3409–3413.
2. J. Elias, A. Jarray, J. Salazar, A. Karmouch and A. Mehaoua, *A reliable design of wireless body area networks*, in Proc. IEEE Global Commun. Conf. (GLOBECOM), Atlanta, GA, USA, (2013) pp. 2742–2748.
3. B. Latré, B. Braem, I. Moerman, C. Blondia and P. Demeester, *A survey on wireless body area networks*, Wirel. Netw. **17** (1) (2011) 1–8.
4. S. Maurya, V. K. Jain and D. R. Chowdhury, *Delay aware energy efficient reliable routing for data transmission in heterogeneous mobile sink wireless sensor network*, J. Netw. Comput. Appl. **144** (2019) 118–137.
5. N. Kaur and S. Singh, *Optimized Cost Effective and Energy Efficient Routing Protocol for Wireless Body Area Networks*, Ad Hoc Networks **61** (2017) 65–84.
6. M. Salayma, A. Al-Dubai, I. Romdhani and Y. Nasser, *Reliability and energy efficiency enhancement for emergency-aware wireless body area networks (WBANs)*, IEEE Trans. Green Commun. Netw. **2** (3) (2018) 804–816.
7. M. M. Zanjireh and H. Larijani, *A survey on centralised and distributed clustering routing algorithms for wsns*, IEEE 81st Vehicular Tech. Conf. (VTC Spring) (2015) pp. 1–6.

پست الکترونیکی: raayatpanah@khu.ac.ir
پست الکترونیکی: Std_Abyaneh@khu.ac.ir

یک مدل بهینه برای کنترل زمان-حافظه در شبکه‌های حسگر بی‌سیم

جلال عسکری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و محمد خلیلی
باشگاه پژوهشگران جوان، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمین، خمین، ایران

چکیده. در دهه‌های اخیر، تکنیکی به نام کد مقداردهی شبکه ارائه شده، که در شبکه‌های کامپیوتری فواید فراوانی به همراه داشته است. وزن‌دهی شبکه با کنار گذاشتن دیدگاه سنتی، ارسال اطلاعات در یک شبکه‌ی داده به روش دریافت-ارسال، به گره‌های شبکه اجازه می‌دهد بر روی اطلاعات ارسال شده شبکه، وزن گذاری انجام دهند. در این تکنیک، گره‌های شبکه، اطلاعات دریافتی را در داخل حافظه خود نگهداری می‌کنند، تا با داده‌های دیگر گره‌ها ترکیب کرده و ارسال نمایند. با توجه به محدودیت زمان و حافظه نقاط حسگر، باید این محدودیت را برای گره‌های موجود در شبکه‌های حسگر بی‌سیم در نظر گرفت. در این تحقیق، میزان زمان و حافظه در شبکه‌های حسگر بی‌سیم با تابع هدفی بر روی زمان مورد نیاز گره‌ها مورد بررسی قرار گرفته و به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی مدل شده است. مدل بهینه‌سازی ارائه شده را می‌توان به‌صورت متمرکز حل نمود، اما برای حل مسائل بهینه‌سازی در این شکل نیاز است که اطلاعات تمام گره‌ها را در یک گره جمع آوری نموده و بعد از حل مسئله، راه‌حل بهینه را برای سایر گره‌های شبکه ارسال نمود. بنابراین حل مدل ارائه شده در شبکه‌های بزرگ، غیرعملی و تقریباً غیرممکن است و مناسب برای شبکه حسگر بی‌سیم نمی‌باشد. ما در این تحقیق به کمک روش تصویر گرادیان-نیوتن و با تفکیک جریان‌های شبکه، به یک الگوریتم توزیع شده و تکراری برای حل مسئله پرداخته‌ایم. در الگوریتم توزیع شده پیشنهادی، هر گره به‌صورت محلی و بر اساس اطلاعات گره‌های همسایه خود تصمیم گیری می‌کند.

واژه‌های کلیدی: شبکه حسگر بی‌سیم، بهینه سازی غیرخطی، گراف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90C30, 90C35.

۱. مقدمات

وظیفه اصلی شبکه‌های حسگر، جمع‌آوری داده‌های حس شده از محیط پیرامونی شبکه است. گره‌های شبکه حسگر بی‌سیم وظیفه جمع‌آوری، پردازش و ذخیره‌سازی اطلاعات را دارند. داده‌های جمع‌آوری شده توسط حسگرها، با کمک دیگر گره‌های حسگر به گره(ها) داخلی(چاهک) منتقل می‌شوند. در شبکه‌های حسگر به دنبال کاهش هزینه‌ها می‌باشند و معمولا در گره‌های حسگر با محدودیت منابع روبرو هستند. به عبارت دیگر، استفاده از گره‌های با انرژی و پهنای باند بیشتر منجر به افزایش قیمت و پیچیدگی گره‌های حسگر می‌شود. بنابراین باید از منابع موجود در شبکه‌های حسگر بی‌سیم بیشترین بهره را در حداقل زمان برد [۶].

از سوی دیگر، کدگذاری شبکه تکنیکی است که باعث افزایش بهره‌وری و کارآیی شبکه‌های ارتباطی می‌شود. با استفاده از کدگذاری شبکه در شبکه‌های ارتباطی این امکان فراهم می‌شود که بتوان، علاوه بر ارسال اطلاعات، آن‌ها را مورد پردازش قرار داد. در واقع بسته‌های اطلاعات در گره‌های میانی(داخلی) کدگذاری و سپس ارسال می‌شوند، الگوریتم‌هایی که بر اساس آن کار می‌کنند امکان تحویل بیشتر و مؤثرتر بسته‌های داده را فراهم می‌کنند [۲، ۵].

تکنیک کد گذاری گره‌ها سبب می‌شود تا در شبکه‌های ارتباطی گوناگون، از مزایایی چون امنیت در شبکه، کاهش تاخیر ارسال و دریافت اطلاعات، کارآیی یا گذردهی بالاتر در شبکه، ایجاد تعادل در بار ترافیکی شبکه، افزایش قابلیت اطمینان در داده‌های دریافتی، کاهش پیچیدگی الگوریتم ارسال و دریافت، کاهش هزینه‌های شبکه و کاهش قابل توجهی در پهنای باند مصرفی شبکه برخوردار شود. در شبکه‌های بی‌سیم، کدگذاری شبکه با توجه به ویژگی پخش همگانی کانال‌های بی‌سیم، فواید بیشتری را نیز نصیب شبکه می‌کند. تحقیقات گسترده‌ای در

* سخنران

مورد شبکه‌های حسگر بی‌سیم، کدگذاری شبکه و ترکیب آن‌ها انجام شده است، برای مطالعه بیشتر به مراجع [۴، ۳، ۱۰، ۹] مراجعه نمایید.

۲. فرمول‌بندی مسئله

مسئله ارسال اطلاعات با استفاده از کدگذاری شبکه به دو فاز کدگذاری و انتخاب مسیر یا به طور دقیق‌تر زیرگرافی با بهترین مسیرها تقسیم می‌شود [۶].

مسئله اول، نوع کدگذاری است که توسط گره‌های شبکه با استفاده از نظریه میدان‌های متناهی در جبر انجام می‌گردد. عمل کدگذاری که توسط هر گره انجام می‌شود به این شکل است که بسته‌ها در زمانی خاص و حافظه گره میانی ذخیره می‌شود و سپس ترکیب خطی از آن‌ها به لینک‌های خروجی گره ارسال می‌گردد. در کدگذاری خطی، بسته‌های دریافتی از گره‌های همسایه توسط هر گره به‌صورت خطی با یکدیگر ترکیب و یک بسته جدید ایجاد می‌شود که به گره بعدی ارسال می‌گردد.

مسئله دوم در کدگذاری شبکه، انتخاب زیرگرافی است که مسیرهای مورد استفاده برای ارسال اطلاعات کدگذاری شده را شامل می‌شود. این مسئله همانند مسئله مسیریابی است، زیرا مسیر ارسال بسته‌ها از طریق زیرگراف ایجاد شده انجام می‌شود. در کدگذاری شبکه، دو نوع جریان مجازی و حقیقی مطرح می‌شود. جریان مجازی، جریانی است که به عنوان متغیر میانی، به ازای هر گره مبدأ و گره‌های مقصد به‌صورت جداگانه بیان می‌شود. جریان مجازی برای به‌دست آوردن جریان حقیقی استفاده می‌شود که در عمل باید توسط گره‌های شبکه عبور داده شود و به ازای هر گره مبدأ تعریف می‌شود. به عبارت دیگر، جریانی که در واقع از گره‌های شبکه عبور می‌کند، جریان حقیقی است و برای به‌دست آوردن آن، از متغیر میانی جریان مجازی استفاده می‌شود [۳، ۷]. در شبکه‌های بی‌سیم از آنجایی‌که انرژی لازم برای محاسبات کمتر از انرژی ارسال داده‌ها در گره‌ها می‌باشد، ابتدا در هر گره محاسبات انجام گرفته و سپس داده‌ها به گره بعدی ارسال می‌گردد. اگر هر بیت اطلاعات توسط گره‌ای به گره‌های مجاور انتقال یابد، ساختار شبکه به‌طوری است که می‌توانیم در یک لحظه به ۲ گره، اطلاعات ارسال نماییم، یکی به‌عنوان داده اصلی و دیگری ذخیره است، در صورت عدم موفقیت در ارسال داده اصلی، داده ذخیره به گره بعدی ارسال می‌شود. به‌عبارتی اگر در هر لحظه داده اصلی در هنگام انتقال به‌صورت بی‌سیم از بین برود، داده پشتیبان، اطلاعات را انتقال می‌دهد، یعنی انتقال داده از گره مبدأ به‌صورت "XOR" به گره‌ها منتقل می‌گردند.

انتخاب زیرگراف بهینه بدون استفاده از کدگذاری شبکه برای جریان‌های چندپخشی یک مسئله NP-hard است، درحالی‌که با استفاده از کدگذاری شبکه به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی بیان می‌شود. ما در این تحقیق مدل ارسال اطلاعات در شبکه را مشابه، مسئله انتخاب زیرگراف ارسال جریان چندپخشی با حداقل هزینه در شبکه باسیم مبتنی بر کدگذاری شبکه که در [۵] ارائه شده است، به‌صورت مسئله بهینه‌سازی زیر در نظر می‌گیریم.

$$
\begin{aligned}
&\min\ f(z) = \sum_{(i,J_i)\in A} f(z_{(i,J_i)}) = \sum_{(i,J_i)\in A} a_{(i,J_i)} z_{(i,J_i)} \\
&\text{s.t.} \\
&\forall\, i \in V,\ t \in T: \quad \sum_{\{j|(i,j)\in E\}} g^{(t)}_{(i,j)} - \sum_{\{j|(j,i)\in E\}} g^{(t)}_{(j,i)} = \delta^{(t)}_i \\
&\forall\, i \in V,\ t \in T, j \in J_i: \quad z_{(i,J_i)} \geq g^{(t)}_{(i,j)} \\
&\forall\, i \in V,\ t \in T: \quad g^{(t)}_{(i,j)} \geq 0 \\
&\forall\, i \in V: \quad z_{(i,J_i)} \leq C_i,
\end{aligned}
$$

که در آن، $g^{(t)}_{(i,j)}$ جریان مجازی بر روی لینک (i,j) و $z_{(i,J_i)}$ جریان حقیقی روی آن است.

جدول ۱. شرح نمادها.

نماد	توصیف
J_i	مجموعه گره‌های همسایه گره i
$C(i)$	حداکثر ظرفیت ارسال گره i
T	مجموعه گره‌های مقصد جریان‌های چندپخشی در شبکه
$g_{(i,j)}^{(t)}$	جریان اطلاعاتی مجازی که از گره i بر روی لینک (i,j) به مقصد t ارسال می‌شود
$z_{(i,J_i)}$	جریان اطلاعاتی واقعی که از گره i روی لینک (i,J_i) بعد از کدگذاری شبکه ارسال می‌شود
A_i	میزان زمان موجود و در دسترس گره i
TA_i	حداکثر زمان انتقال اطلاعات در گره i
$C(i,j)$	حداکثر ظرفیت لینک (i,j)

$z_{(i,J_i)}$ یک تابع غیرخطی می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$z_{(i,J_i)} = \max_{t\in T, j\in J_i} \left\{ g_{(i,j)}^{(t)} \right\} = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{t\in T} \sum_{\forall j\in J_i} \left(g_{(i,j)}^{(t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

در واقع چون تابع هدف به‌صورت گسسته می‌باشد با استفاده از نُرم l_m تابع هدف را به حالت پیوسته تبدیل کرده‌ایم و از آن‌جایی‌که در عمل نمی‌توانیم به مقدار بینهایت میل کنیم با انتخاب یک مقدار برای m تقریبی قابل قبول برای تابع هدف می‌سازیم، یعنی تابع هدف را به‌صورت

$$\forall\, i \in V: \quad z_{(i,J_i)} = \left(\sum_{t\in T} \sum_{j\in J_i} \left(g_{(i,j)}^{(t)} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}},$$

در نظر می‌گیریم. همچنین محدودیت‌های مسئله این‌گونه تعریف می‌شوند، محدودیت اول نمایش قانون بقای جریان است که در جریان‌های چندپخشی همانند جریان تک پخشی برقرار است و به جز گره‌های مبدأ و مقصد جریان، مجموع جریان‌های ورودی در یک گره برابر مجموع جریان‌های خروجی از آن گره است. در محدودیت اول، مجموع ابتدائی عبارت است از جریان‌های چندپخشی خروجی از گره $t \in T$ به مقصد i و مجموع دوم جریان‌های چندپخشی ورودی به گره t به مقصد R است. برای گره‌های مبدأ یا گره s میزان جریان خروجی برابر با R (مقدار جریانی که باید ارسال شود) و برای تمام گره‌های مقصد جریان چندپخشی $-R$ است.

۳. روش حل مسئله

یکی از روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی ریاضی، استفاده از دوگان (همزاد) مسئله می‌باشد. در حل مسئله بهینه‌سازی از طریق دوگان، ابتدا تابع لاگرانژ مسئله اصلی را نوشته و سپس مسئله دوگان را با کمک تابع لاگرانژ محاسبه می‌شود.

تابع لاگرانژ مسئله فوق عبارت است از

$$\begin{aligned} L(g,\beta,\gamma,\varphi) = & \sum_{i\in V} \frac{TA_i}{A_i} z_{(i,J_i)} + \sum_{i\in V} \sum_{t\in T} \beta_i^{(t)} W_i^{(t)} \\ & + \sum_{i\in V} \sum_{t\in T} \sum_{j\in J_i} \gamma_{(i,j)}^{(t)} [-g_{(i,j)}^{(t)}] + \sum_{i\in V} \varphi_i \left[z_{(i,J_i)} - C_i \right], \end{aligned}$$

که مسئله دوگان از روی لاگرانژین آن عبارت است از

$$\begin{aligned}&\min L\left(g,\beta,\gamma,\varphi\right)\\&s.t.\\&\qquad\forall\, i\in V,\ t\in T,\ j\in J_i:\quad \gamma_{(i,j)}^{(t)}\geq 0,\ \beta_i^{(t)}\geq 0,\ \varphi_i\geq 0,\end{aligned}$$

اگر مقدار بهینه متغیر بهینه‌سازی g را با $\hat{g}$ و مقدار بهینه مسئله بهینه‌سازی پریمال را با $\hat{f}$ نشان دهیم که $f(\hat{g})=\hat{f}$، آن‌گاه به ازای هر $\gamma_{(i,j)}^{(t)}\geq 0$ و $\beta_i^{(t)}\geq 0$ و $\varphi_i\geq 0$ که ضرایب لاگرانژین نامیده می‌شوند، خواهیم داشت $L\left(\hat{g},\beta,\gamma,\varphi\right)\geq\hat{f}$. به عبارت دیگر، به ازای هر مقدار برای ضرایب لاگرانژین γ و β و φ، تابع دوگان یک کران پایین برای مقدار بهینه مسئله پریمال ارائه می‌کند. از آن‌جا که تابع دوگان یک تابع محدب می‌باشد و شرایط مسئله نیز محدب است، مسئله دوگان یک مسئله بهینه سازی محدب بوده و دارای جواب یکتا است. در این‌صورت، اگر یک نقطه بهینه دوگان مانند $\left(\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\varphi}\right)$ وجود داشته باشد، هر نقطه بهینه مسئله اصلی یک مینیمم برای $L\left(g,\beta,\gamma,\varphi\right)$ خواهد بود. بنابراین می‌توان به راه‌حل مسئله اصلی از طریق نقطه بهینه مسئله دوگان یا حل مسئله دوگان دست یافت.

در روش تصویرگرادیان-نیوتن، در مرحله nام یک نقطه از فضای شدنی $x[n]\in X$، طول گام مرحله $\lambda[n]$ (انواع مختلفی از طول گام‌ها را برای روش تصویر گرادیان-نیوتن در این تحقیق در نظر گرفته‌ایم) و جهت کاهشی $s[n]$ به کار گرفته می‌شود و نقطه نتیجه از رابطه

$$\bar{x}[n+1]=x[n]+\lambda[n]s[n],$$

به‌دست می‌آید، که نیازی نیست به X متعلق باشد. در نهایت، نقطه $x[n+1]$ با استفاده از نگاشت $\bar{x}[n+1]$ به X به‌دست می‌آید که نزدیکترین نقطه از X به $\bar{x}[n+1]$ است. در عمل، برای محاسبه بهترین حالت با یک مقدار شدنی که در شرایط دوگان صدق کند شروع کرده و در جهت تصویر گرادیانی از تابع $L\left(g,\beta,\gamma,\varphi\right)$ حرکت می‌کنیم و چون از حالت شدنی بودن خارج می‌شویم با روش نیوتن، شدنی ماندن نقطه به‌دست آمده را حفظ می‌نماییم. این الگوریتم را تکرار می‌کنیم تا یک تقریب به‌اندازه کافی مناسب برای جواب بهینه حاصل شود.

در مورد همگرایی روش به طور کلی به این موضوع توجه شود که چون ظرفیت گره‌ها ثابت است، در هر انتقال داده بر روی شبکه تابع هدف مسئله ($z_{(i,J_i)}$) با توجه به مقدار m مقداری مثبت و نزدیک به صفر دارد، یعنی در عمل با یک مسئله غیرخطی به‌صورت

$$\begin{aligned}&\min z_{(i,J_i)}=h_1(X)\rightsquigarrow 0\\&\text{s.t.}\\&h_2(X)=0\\&x\geq 0,\end{aligned}$$

روبرو هستیم که ما در این تحقیق با تکنیک تصویر گرادیان $h_1(X)$ بر روی تابع $h_2(X)$ جهت کاهشی و مفیدی را به‌دست آورده و در هر گام برای تصحیح جواب حاصل شده، با روش نیوتن بر روی نقاط شدنی در قید $h_2(X)=0$ جوابی با بهترین زمان در ارسال داده‌هایی بر روی شبکه بی‌سیم به‌دست می‌آوریم.

الگوریتم تصویر گرادیان نیوتن که در این تحقیق استفاده شده از روش‌های مهم حل مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است و در تحقیقات فراوانی مورد استفاده قرار گرفته و دارای همگرایی مناسبی می‌باشد. همگرایی این الگوریتم، به انتخاب اندازه طول گام مناسب وابسته می‌باشد. البته، در تحقیقات مختلفی پیشنهاد استفاده از اندازه طول گام متغیر ارائه شده است، که در این تحقیق نیز ما اینگونه عمل کرده‌ایم.

در اندازه طول گام متغیر کاهشی، ابتدا مقدار متوسطی برای اندازه طول گام انتخاب می‌شود و به تدریج با نزدیک شدن به جواب بهینه مسئله کاهش پیدا می‌کند. اثبات شده است که اگر اندازه طول گام سه شرط $\lambda[n]>0,\lim_{n\to\infty}\lambda^2[n]=0$ و $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda\left[n\right]=\infty$ را دارا باشد، الگوریتم یا به نقطه بهینه ختم می‌شود و یا بعد

از تعداد محدودی مرحله، مقدار UB_i نزدیک به $L\left(\hat{g},\hat{\beta}\right)$ خواهد شد، که $\hat{g}$ و $\hat{\beta}$ به ترتیب مقدار بهینه متغیرهای g و β هستند. جزییات همگرایی بهینه‌سازی محدب و اندازه طول گام‌های متغیر را می‌توانید در مراجع [۱، ۸] ببینید.

در پایان پس از شبیه‌سازی مدل انتخابی و بررسی جواب‌های به‌دست آمده با مدل‌های دیگر به این نتیجه رسیده‌ایم که این الگوی کنترل زمان–حافظه نسبت به برخی روش‌ها سریع تر و کم هزینه‌تر می‌باشد. امیدواریم که این تحقیق زمینه‌ای برای تحقیقات بیشتر محققین باشد و بتوانند راهکارهایی مناسب و کارا برای این‌گونه مسائل فراهم نمایند.

مراجع

1. S. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex Optimization,* Cambridge University Press, New York, 2004.
2. Y. Fan, *Network Coding Based Information Security in Multi-Hop Wireless Networks,* Ph. D. Thesis, Electrical and Computer Engineering University of Waterloo Waterloo, Ontario, Canada, 2010.
3. C. Fragouli and E. Soljanin, *Network Coding Applications,* Now Publishers Inc., Boston, 2008.
4. J. Hao, H. Feng and G. Wu, *Improving data transmission reliability with network coding in wireless sensor network*, 2010 Int. Conf. on Multimedia Information Networking and Security (MINES), Nanjing, Jiangsu, 2010, 159-163. DOI: 10.1109/MINES.2010.42
5. T. Ho and D. S. Lun, *Network Coding: An Introduction,* Cambridge University Press, UK, 2008.
6. M. Khalily-Dermany, M. Shamsi and M. J. Najafi-Arani, *A convex optimization model for topology control in network-coding-based-wireless-sensor networks*, Ad Hoc Networks **59** (2017) 1–11.
7. M. Khalily-Dermany and M. J. Nadjafi-Arani, *Itinerary planning for mobile sinks in network-coding-based wireless sensor networks,* Comput. Commun. **111** (2017) 1–13.
8. M. Khalily-Dermany, *A convex programming for range assignment to optimize lifetime in network-coding-based-wireless-sensor networks*, Int. J. Wireless Info. Networks **24** (2017) 470–475.
9. V. Pandit, J. H. Jun and D. P. Agrawal, *Inherent security benefits of analog network coding for the detection of byzantine attacks in multi-hop wireless networks,* in: IEEE 8th Int. Conf. on Mobile Adhoc and Sensor Systems (MASS), (2011) 697–702.
10. M. Xiao and T. Aulin, *Optimal decoding and performance analysis of a noisy channel network with network coding,* IEEE Trans. Commun. **57** (5) (2009) 1402–1412.

پست الکترونیکی: askari@kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: md.khalili@gmail.com

ارزیابی کارایی متقاطع در زنجیره تامین به‌کمک نظریه بازی

فاطمه قندی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و مصطفی داوطلب علیائی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. داشتن اطلاعات ناقص توسط تصمیم‌گیرندگان در زنجیره تامین، یکی از دلایل اصلی ناهماهنگی زنجیره تامین است. به اشتراک گذاری اطلاعات عرضه و تقاضا هزینه‌های انبار را کاهش می‌دهد و در پی آن هزینه کل زنجیره نیز کاهش می‌یابد. اما چگونگی اشتراک گذاری اطلاعات نیز، در نیل به این هدف، بسیار تاثیرگذار است. از این‌رو در این مقاله به‌کمک ترکیب تحلیل پوششی داده‌ها و نظریه بازی یک روش برای ارزیابی و رتبه‌بندی روش‌های مختلف اشتراک گذاری اطلاعات ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی متقاطع، خروجی نامطلوب، نظریه بازی، زنجیره تامین.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90Bxx, 90B50.

۱. پیش‌گفتار

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA)، در ابتدا با ارائه مدل (CCR)، توسط چارنز و همکارانش [۱] بیان گردید که در واقع به‌منظور ارزیابی کارایی نسبی مجموعه‌ای از واحدهای تصمیم گیرنده (DMUs)، برای تولید چند خروجی، چند ورودی را مصرف می‌کند. به‌کمک این روش، ممکن است چندین واحد به عنوان واحد کارا معرفی گردد. از این‌رو، روش‌های مختلفی برای رتبه‌بندی واحدها معرفی شد.

سکستون و همکارانش [۸] با ارائه روش کارایی متقاطع، عملکرد یک واحد را با مقایسه توسط وزن‌های ورودی و خروجی بهینه دیگر واحدها، ارزیابی نمودند.

روش مذکور دارای دو ضعف اساسی است. اول آن که چون وزن‌های مورد استفاده در این روش از مدل CCR به‌دست می‌آید، ممکن است این وزن‌ها غیر یکتا گردند و در نتیجه امتیاز کارایی متقاطع چندگانه برای واحدها پدید می‌آید. دویل و گرین [۲]، به منظور برطرف نمودن این مشکل، فرمول‌های خوشبینانه و بدبینانه را ارائه دادند. این دو مدل، با حفظ کارایی واحد تحت ارزیابی، کارایی متقاطع سایر DMUها را به ترتیب ماکزیمم و مینیمم می‌نماید. دومین ضعف روش کارایی متقاطع این است که امتیاز کارایی متقاطع تولید شده برای واحدها، بهینه پاراتو نیست. برای رفع این مشکل نیز مدل‌هایی پیشنهاد گردیده است. به‌عنوان مثال، در [۷] و [۹] با در نظر گرفتن DMUها به عنوان بازیکن‌های بازی، برای برطرف نمودن غیر پاراتویی امتیازهای کارایی متقاطع DMUها به‌کمک نظریه بازی، مدل‌هایی ارائه گردید.

مدیریت یک زنجیره تامین، غالباً نیازمند یکپارچه سازی روابط درون و برون سازمانی است و بدین منظور لازم است انواع مختلفی از فعالیت‌ها و جریان‌های درون کل زنجیره با یکدیگر هماهنگ گردند. در واقع عملکرد زنجیره تامین به وسیله عوامل زیادی می‌تواند تحت تاثیر قرار بگیرد که در این میان به اشتراک گذاری اطلاعات از تعیین‌کننده‌ترین آن‌ها است. زیرا به اشتراک گذاشتن اطلاعات بین طرفین معامله و هماهنگی و تصمیم گیری جهت تولید، تا حد قابل قبولی می‌تواند هزینه‌های تولید و در نتیجه قیمت محصولات را کاهش داده و سطح خدمات رسانی به مشتری را بهبود بخشد.

از این‌رو سناریوهای مختلفی برای به اشتراک گذاشتن اطلاعات در زنجیره تامین وجود دارد که به شرح زیر است.

(۱) N: هیچ اطلاعاتی به اشتراک گذاشته نمی‌شود.

* سخنران

(۲) C: اشتراک گذاری اطلاعات ظرفیت.
(۳) D: اشتراک گذاری اطلاعات تقاضا.
(۴) I: اشتراک گذاری اطلاعات انبار.
(۵) D&C: اشتراک گذاری اطلاعات تقاضا و ظرفیت.
(۶) D&I: اشتراک گذاری اطلاعات تقاضا و انبار.
(۷) C&I: اشتراک گذاری اطلاعات ظرفیت و انبار.
(۸) F: اشتراک گذاری کامل اطلاعات ظرفیت، تقاضا و انبار.

در بخش بعد با در نظر گرفتن سناریوهای مذکور به‌عنوان بازیکنان یک بازی، عملکرد سناریوهای مختلف اشتراک اطلاعات را ارزیابی می‌نماییم و در ادامه با حل یک مثال عددی، روش پیشنهادی را به‌صورت کاربردی بیان می‌کنیم.

۲. ارزیابی سناریوها به‌کمک نظریه بازی

فرض کنیم مجموعه‌ای شامل n گزینه و k شاخص برای هر گزینه به صورت $(y_{۱j}, \dots, y_{kj})$ است. در این‌صورت کارایی واحد o را می‌توان به‌کمک مدل زیر به‌دست آورد

$$z_o = \sum_{r=۱}^{k} u_r y_{ro},$$

که در آن $r = ۱, \dots, k$ و $o = ۱, \dots, n$ است. حال با نوشتن مدل زیر می‌توان امتیاز کارایی متقاطع واحدها را نیز محاسبه نمود

$$\begin{aligned} \max z_{oo} &= \sum_{r=۱}^{k} u_{ro} y_{ro} \\ \text{s.t. } z_{oj} &= \sum_{r=۱}^{k} u_{ro} y_{rj} \le ۱, j = ۱, \dots, n, \\ u_{ro} &\ge ۰. \end{aligned} \tag{۱}$$

z_{oo} ارزیابی واحد o به‌کمک وزن‌های خودش است و z_{oj} کارایی متقاطع واحد j با استفاده از وزن‌های واحد oام است. یعنی DMU_j با استفاده از وزن‌های DMU_o ارزیابی می‌شود. به‌کمک مدل (۱) می‌توان مقادیر z_{oj} را محاسبه و در یک CEM مانند جدول ۱ مرتب نمود. میزان کارایی خودارزیابی هر DMU در قطر اصلی این ماتریس قرار دارد. در هر سطر، سایر DMUها به‌کمک وزن‌های DMU_o سنجیده می‌شوند و در هر ستون، DMU_o با استفاده از وزن‌های سایر DMUها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

جهت مقایسه و رتبه‌بندی واحدها از میانگین ستونی استفاده می‌شود. $\bar{z}_o = \sum_{j=۱}^{n} \frac{z_{jo}}{n}$ میانگین ارزیابی همه DMUها از DMU_o است.

جدول ۱. ماتریس کارایی متقاطع.

n	...	۳	۲	۱	DMU
$z_{۱n}$	⋯	$z_{۱۳}$	$z_{۱۲}$	$z_{۱۱}$	۱
$z_{۲n}$	⋯	$z_{۲۳}$	$z_{۲۲}$	$z_{۲۱}$	۲
$z_{۳n}$	⋯	$z_{۳۳}$	$z_{۳۲}$	$z_{۳۱}$	۳
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
z_{nn}	⋯	$z_{n۳}$	$z_{n۲}$	$z_{n۱}$	n
$\bar{z}_n$	⋯	$\bar{z}_{۳}$	$\bar{z}_{۲}$	$\bar{z}_{۱}$	میانگین

همان‌طورکه در بخش قبل نیز اشاره گردید، ممکن است امتیازهای کارایی متقاطع محاسبه شده برای واحدها غیریکتا باشند. دویل و گرین برای برطرف نمودن این مشکل دو مدل خوشبینانه و بدبینانه را پیشنهاد دادند. برای مجموعه مفروض با k شاخص، می‌توان مدل خوشبینانه دویل و گرین را به‌صورت زیر نوشت.

$$\max \sum_{r=۱}^{k}(u_{ro} \sum_{j=۱,j\neq o}^{n} y_{rj}) \quad (۲)$$

$$\text{s.t. } z_{oj} = \sum_{r=۱}^{k} u_{ro}y_{rj} \leq ۱, j = ۱,\ldots,n, j \neq o,$$

$$\sum_{r=۱}^{k} u_{ro}y_{ro} - z_{oo} = ۰,$$

$$u_{ro} \geq ۰.$$

با جای‌گذاری min به جای max در تابع هدف مدل فوق، مدل بدبینانه دویل و گرین حاصل می‌گردد.

یک زنجیره تامین با سه فروشنده، یک توزیع کننده، یک کارخانه و دو انبار s و S را در نظر می‌گیریم. اطلاعات مربوط به این زنجیره در جدول ۲ آمده است. با در نظر گرفتن هزینه‌های کل به عنوان ۳ شاخص مجزا، در کل ۶ شاخص خواهیم داشت. مقدار این شاخص‌ها برای هر سناریو در جدول ۳ نشان داده شده است. با در نظر گرفتن

جدول ۲. اطلاعات زنجیره تامین.

انبار	فروشنده ۱	فروشنده ۲	فروشنده ۳	توزیع کننده	کارخانه
سطح اولیه انبار	۴۰	۴۰	۴۰	۱۳۰	۲۰۰
سیاست انبار s	۲۱	۲۴	۲۱	۶۱	۸۳
سیاست انبار S	۳۹	۴۳	۳۹	۱۲۹	۱۵۳

جدول ۳. نتایج شبیه‌سازی شاخص‌ها.

		سناریوها							
ردیف	شاخص‌ها	N	C	D	I	D&C	D&I	C&I	F
۱	هزینه‌های کمبود	۲۱۹/۷۸	۶۶/۱۵	۲۹/۴۴	۱۰۹/۸۴	۲۶/۰۸۸	۵۴/۰۵	۹۵/۸	۲۴/۷۹
۲	هزینه‌های نگهداری	۱۰۳/۰۶	۲۹۳/۶۳	۲۳۳/۳۶	۱۸۹/۹۴	۴۰۱/۲۵	۲۶۲/۱۲	۳۷۱/۱۳	۴۷۹/۸۸
۳	هزینه سفارش	۱۳۰	۱۸۰	۱۳۰	۱۳۰	۱۸۰	۱۳۰	۱۸۰	۱۸۰
۴	نرخ تکمیل	۶۵/۲۲	۷۹/۲۶	۷۵/۲۵	۷۲/۱۶	۷۹/۱۳	۷۷/۰۴	۷۲/۳۶	۷۹/۳۵
۵	سطح خدمات مشتری	۶۱/۸۳	۷۲/۶۲	۷۷/۴۴	۶۸/۸۴	۷۷/۲۶	۷۴/۶۶	۷۶/۴۲	۸۱/۳
۶	زمان چرخه سفارش (روز)	۱/۳۵۹۳	۱/۱۲۰۵	۱/۰۵۶۸	۱/۱۹۶۱	۱/۰۴۷۵	۱/۰۹۴۳	۱/۱۷۶۲	۱/۰۴۵۱

۸ سناریو به عنوان ۸ واحد تصمیم گیرنده، برای استفاده از مدل‌های DEA جهت ارزیابی و رتبه‌بندی سناریوها، لازم است ابتدا ورودی و خروجی تعیین گردد. از میان ۶ شاخص موجود، ۴ شاخص حداقل کننده (هزینه‌های نگهداری، هزینه کمبود، هزینه سفارش و زمان چرخه سفارش) و ۲ شاخص حداکثرکننده (نرخ تکمیل و سطح خدمات مشتری) هستند.

مدل‌های DEA سعی دارد با حداقل ورودی، بیشترین خروجی را تولید کند. اما همیشه استفاده از منابع ورودی منجر به تولید خروجی‌های مطلوب نمی‌شود. مواردی وجود دارد که علاوه بر خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوب نیز تولید می‌شود. به‌عنوان مثال، آلودگی هوا یک خروجی نامطلوب در تولیدات صنعتی است و واضح است که هدف هر تولیدی، افزایش تولید با حداقل خروجی نامطلوب است. تاکنون روش‌های بسیاری در این زمینه توسط محققین ارائه گردیده است که می‌توان به [۳، ۴، ۵] و [۶] اشاره نمود.

مینگ و همکاران [۱۰]، به‌منظور ارزیابی و رتبه‌بندی سناریوهای مذکور در جدول ۳، شاخص‌های حداقل کننده را به‌عنوان خروجی نامطلوب در نظر گرفتند و سپس با یکی از روش‌های حل خروجی نامطلوب که در آن داده‌های خروجی‌های نامطلوب به صورت عکس در نظر گرفته می‌شود، کارایی CCR را برای واحدها (سناریوها) محاسبه نمودند. پس از آن به‌کمک مدل (۱)، کارایی CCR واحدها یعنی همان z_{oo} را محاسبه کردند و در ادامه به‌کمک روش دویل و گرین، مدل (۲)، کارایی متقاطع واحدها را محاسبه نمودند.

از آن‌جا که مقادیر کارایی متقاطع محاسبه شده توسط روش دویل و گرین بهینه پاراتو نیست، در ادامه و به‌کمک تکنیک نظریه بازی، امتیاز کارایی متقاطع‌های حاصل را بهبود می‌بخشیم.

برای این کار ابتدا ۸ سناریوی مورد نظر را به‌عنوان ۸ بازیکن در یک بازی در نظر می‌گیریم. سپس ماتریس کارایی متقاطع این ۸ DMU را مانند جدول ۱ تشکیل می‌دهیم. درگام بعدی ماتریس حاصل را نرمالایز می‌نماییم. به این صورت که هر عدد جدول را به جمع سطر مربوط به آن تقسیم می‌کنیم. حال اگر کارایی متقاطع‌های نرمالایز شده را z'_{ij} بنامیم، به‌کمک تابع $D(j)$ می‌توان کمترین مقدار عایدی را که بازیکن j می‌تواند در بازی بپذیرد، حساب کرد.

$$
\begin{aligned}
D(j) &= \min \sum_{d=1}^{n} w_d^j z'_{dj} \\
\text{s.t.} \ & \sum_{d=1}^{n} w_d = 1, \\
& w_d \geq 0 \quad d = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

سپس مقادیر شیپلی از رابطه $\phi_i(D) = \sum_{S|i\in S\subset N} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\{D(S) - D(S\{i\})\}$ برای هر بازیکن i محاسبه می‌گردد که در آن s تعداد اعضای ائتلاف S است.

این مقادیر شیپلی را به صورت بردار $B = (B_1, \ldots, B_n) \in R^n$ در نظر می‌گیریم و به‌کمک برنامه خطی زیر بردار $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in R^n$ را محاسبه می‌نماییم.

$$
\begin{aligned}
& \min p \\
\text{s.t.} \ & \omega z'_j + s_j^+ - s_j^- = B_j, \\
& \omega_1 + \cdots + \omega_n = 1, \\
& s_j^+ \leq p, s_j^- \leq p, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& s_j^+ \geq 0, s_j^- \geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \\
& \omega_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

پس از به‌دست آمدن ω^*ها از فرمول فوق، کارایی متقاطع‌های واحدها از رابطه $z_j^{cross} = \sum_{d=1}^{n} \omega_d^* z_{dj}, \ (j = 1, \ldots, n)$ محاسبه می‌شود.

۳. مثال عددی

با در نظر گرفتن ۸ سناریوی مذکور در بخش قبلی به‌عنوان بازیکنان بازی و طی کردن روش پیشنهادی، کارایی متقاطع‌های هر یک از سناریوها محاسبه می‌شود که در جدول ۴ آمده است.

با توجه به داده‌های جدول، مشاهده می‌شود که به‌کمک روش پیشنهادی تمامی واحدها امتیاز کارایی متقاطع بالاتری نسبت به روش مینگ و همکاران کسب می‌کنند. این بدان معناست که امتیاز کارایی متقاطع‌های حاصل از روش آن‌ها، پاراتو نیستند و توسط بردار کارایی متقاطع‌های حاصل از روش پیشنهادی، مغلوب می‌گردد. از این‌رو استفاده از روش مینگ و همکاران در رتبه‌بندی سناریوها چندان مفید نیست. علاوه بر آن رتبه‌بندی واحدها

نیز تغییر می‌کند. به‌عنوان مثال سناریوی $C\&I$ به‌کمک روش مینگ و همکاران دارای رتبه ۸ هست در حالی‌که با روش پیشنهادی، رتبه ۴ را می‌پذیرد.

جدول ۴. رتبه‌بندی سناریوها.

سناریو	کارایی متقاطع به روش مینگ و همکاران	رتبه بندی	کارایی متقاطع به روش پیشنهادی	رتبه بندی
N	۰/۷۶۹۹	۵	۰/۹۲۷۵	۵
C	۰/۶۹۳۰	۷	۰/۹۲۵۲	۶
D	۰/۹۱۰۵	۱	۱	۱
I	۰/۷۵۶۵	۶	۰/۹۱۸۷	۷
D&C	۰/۸۲۲۰	۳	۰/۹۶۰۹	۲
D&I	۰/۸۰۹۳	۴	۰/۹۵۷۶	۳
C&I	۰/۶۵۲۲	۸	۰/۹۵۵۱	۴
F	۰/۸۳۲۶	۲	۱	۱

مراجع

1. A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, European J. Oper. Res. **2** (6) (1978) 429–444.
2. J. Doyle and R. Green, *Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses*, J. Oper. Res. Soc. **45** (5) (1994) 567–578.
3. R. Faere, S. Grosskopf, C. A. K. Lovell and C. Pasurka, *Multilateral productivity comparisons when some outputs are undesirable: a nonparametric approach,* Rev. Econo. Statist. **71** (1) (1989) 90–98.
4. H. Yang and M. Pollitt, *Distinguishing Weak and Strong Disposability among Undesireable Outputs in DEA: The Example of the Environmental Efficiency of Chinese Coal-Fired Power Plants*, Electricity Policy Research, 2007.
5. G. R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, N. Shoja, G. Tohidi and S. Razavyan, *Undesirable inputs and outputs in DEA models*, Appl. Math. Comput. **169** (2) (2005) 917–925.
6. T. Kuosmanen, *Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs*, Amer. J. Agricultural Economics **87** (4) (2005) 1077–1082.
7. L. Liang, J. Wu, W. D. Cook and J. Zhu, *The DEA Game Cross-Efficiency Model and Its Nash Equilibrium*, Oper. Res. **56** (5) (2008) 1278–1288.
8. T. R. Sexton, R. H. Silkman and A. J. Hogan, *Data envelopment analysis: Critique and extensions* In: R. H. Silkman, (ed.) Measuring Efficiency: An Assessment of Data Envelopment Analysis, Vol. 3, pp. 73–105. Jossey-Bass, San Francisco, 1986.
9. J. Wu, L. Liang and F. Yang, *Determination of weights for the ultimate cross efficiency using Shapley value in cooperative game*, Expert Sys. Appl. **36** (1) (2009) 872–876.
10. M. M. Yu, S. C. Ting and M. C. Chen, *Evaluating the cross-efficiency of information sharing in supply chains*, Expert Sys. Appl. **37** (4) (2010) 2891–2897.

پست الکترونیکی: f.ghandi92@gmail.com
پست الکترونیکی: m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir

ارزیابی کارایی متقاطع بی‌طرف در چارچوب تحلیل متامرزی

مصطفی داوطلب علیائی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و مریم نجفوند دریکوندی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری (DMU) با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه می‌باشد. مدل‌های سنتی DEA مقدار عملکرد هر واحد را صرفاً نسبت به خود واحد محاسبه می‌کند و در نتیجه ممکن است تعداد واحدهایی که به‌عنوان واحد کارا شناخته می‌شوند زیاد باشند، پس نمی‌توان بین واحدهای کارا تمایز قائل شد. بدین منظور روش ارزیابی کارایی متقاطع در تحلیل پوششی داده‌ها معرفی شد. در این روش هر واحد هم با خود و هم با سایر واحدها سنجیده می‌شود تا مقدار کارایی به‌صورت منطقی‌تر محاسبه شود و رتبه‌بندی میان واحدها نیز قابل انجام باشد. علاوه بر این به‌دلیل امکان وجود اختلاف تکنولوژی بین واحدهای تصمیم‌گیری کارایی متقاطع در چارچوب تحلیل فرامرز معرفی شد، تا مقدار کارایی با توجه به مرز مرتبط هر واحد محاسبه شود. اما در تعیین کارایی متقاطع با این روش ممکن است جواب بهینه چندگانه به وجود آید، در نتیجه به‌منظور رفع مشکل غیر یکتا بودن جواب‌های بهینه اهداف ثانویه‌ی بدبینانه و خوشبینانه معرفی شده است. اما هیچ تضمینی وجود ندارد که دو مدل مختلف خوشبینانه و بدبینانه مختلف نتایج یکسان ارائه دهد، که این امر باعث می‌شود تصمیم‌گیرنده به انتخاب دشوار فرمول بدبینانه و خوشبینانه بپردازد. بنابراین در این مقاله اهداف ثانویه با دیدگاه بی‌طرف برای اندازه‌گیری کارایی متقاطع منطقی‌تر با در نظر گرفتن اختلاف تکنولوژی بین واحدها و ارائه یک نتیجه یکتا پیشنهاد می‌شود. ویژگی مطلوب مدل پیشنهادی این است که مجموعه‌ای از وزن‌های ورودی و خروجی با تعداد صفر کمتر برای واحدها تعیین می‌کند. در نهایت برای تایید روش پیشنهادی نتایج مدل‌های مختلف را در قالب یک مثال مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی متقاطع، تحلیل فرامرز.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 90Bxx, 90B50, 90C05.

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان ابزار قدرتمندی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری توسط چارنز و کوپر [۱] معرفی شد. DEA به‌عنوان یک رویکرد غیر پارامتری، کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیری را ارزیابی می‌کند. در مدل‌های سنتی DEA دو نظریه‌ی ناکارایی بدیهی وجود دارد به این‌صورت که ارزیابی DMUها در یک محیط متجانس و با وزن‌های مطلوب [۵] انجام می‌گیرد.

فرآیند ارزیابی در DEA معمولاً در یک محیط متجانس انجام می‌گیرد، یعنی فرض می‌کنیم همه واحدها دارای یک تکنولوژی تولید مشترک باشند. اما ادونل [۶] بیان کرد که واحدهای تصمیم‌گیری ممکن است دارای سطوح مختلفی از تکنولوژی تولید باشند. والهر [۸] خاطر نشان کرد که DMUها با سطوح مختلف تکنولوژی نمی‌توانند به طور مستقیم مقایسه شوند. بنابراین چارچوب تحلیل فرامرز به روش DEA برای رسیدگی به این موضوع معرفی شد. در مدل‌های تحلیل فرامرز DMUها بر اساس تکنولوژی تولید خود به چندین گروه تقسیم و سپس کارایی هر واحد نسبت به مرز گروه خود محاسبه می‌شود. اگرچه می‌توان از تحلیل فرامرز برای اندازه‌گیری کارایی واحدها با تفاوت تکنولوژی در DEA استفاده کرد، اما در این روش، وزن‌های مطلوب ورودی‌ها و خروجی‌های مربوط به خود DMU را در نظر می‌گیریم و به این ترتیب کارایی خودارزیابی DMU به‌دست می‌آید. به همین دلیل ممکن است تعداد واحدهای کارا زیاد شود و نمی‌توانیم بین آن‌ها تمایزی قائل شویم [۴]. برای حل این مشکل، روش کارایی متقاطع در فرامرز توسط چن و یانگ [۲] معرفی شده است. اما در روش کارایی متقاطع

* سخنران

ممکن است وزن‌های بهین تعیین شده برای هر واحد منحصر به فرد نباشند. غیر یکتا بودن وزن‌های بهینه به‌عنوان یک نقص برای روش کارایی متقاطع محسوب می‌شود زیرا باعث می‌شود انتخاب وزن‌ها به‌صورت دلخواه انجام شود. چن و یانگ [۲] برای حل چندگانگی وزن‌ها اهداف ثانویه را در حالت خوشبینانه و بدبینانه مورد بررسی قرار دادند. این دو مدل با تضمین شرط ثابت ماندن کارایی واحد تحت ارزیابی، کارایی سایر واحدها را تا حد امکان ماکزیمم یا مینیمم می‌کنند. اما ممکن است نتایج حاصل از انتخاب نوع مدل اهداف ثانویه با هم متفاوت باشد و بنابراین انتخاب مدل نیز نتایج و رتبه‌بندی‌های متفاوت به‌دست می‌دهد. علاوه بر این، در این حالت ممکن است تعداد وزن‌های صفر زیادی به مؤلفه‌های ورودی و خروجی تحمیل شود. بنابراین برای رفع این مشکل در این مقاله یک مدل ثانویه‌ی بی‌طرف ارائه می‌دهیم تا هر واحد به‌صورت منطقی‌تر ارزیابی شود و علاوه بر این در این مدل تعداد وزن‌های صفر را کاهش می‌دهیم. ابتدا روش‌های کارایی متقاطع و تحلیل فرامرز را در بخش ۲ معرفی می‌کنیم. در بخش ۳ روش کارایی متقاطع در چارچوب فرامرز را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲. مروری بر کارایی متقاطع و روش فرامرز

- کارایی متقاطع: فرض کنیم n واحد تصمیم‌گیری برای ارزیابی وجود دارد و هر DMU_j $(j = ۱,\dots,n)$ از m ورودی x_{ij} $(i = ۱,\dots,m)$، برای تولید s خروجی y_{rj} $(r = ۱,\dots,s)$، استفاده می‌کند. چارنز و همکاران [۱] کارایی هر واحد تصمیم‌گیری را به‌صورت مدل ورودی محور زیر معرفی کرده‌اند.

$$
\begin{aligned}
\theta_{dd} = \max \ & \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rd} \\
s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{id} = ۱; \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{ij} \le ۰, \quad j = ۱,\dots,n; \\
& \forall v_{id}, u_{rd} \ge ۰;
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در آن θ_{dd} کارایی هر واحد و v_{id} و u_{rd} به‌ترتیب وزن‌های مربوط به مولفه‌های ورودی و خروجی است. از آن‌جا که مدل (۱) به هر DMU اجازه می‌دهد تا کارایی خود را با وزن‌های مطلوب اندازه‌گیری کند، نتیجه کارایی آن به‌عنوان کارایی خودارزیابی در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم که (v^*_{id}, u^*_{rd}) جواب‌های بهینه مدل (۱) باشند. سکستون و همکاران [۷] برای محاسبه کارایی هم‌ارزیابی DMU_j با وزن‌های بهینه DMU_d فرمول زیر را ارائه دادند.

$$
\theta_{dj} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{yj}}{\sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{ij}}, \quad (j = ۱,\dots,n;\ j \ne d). \tag{۲}
$$

خودارزیابی و هم‌ارزیابی در مجموع ماتریس کارایی متقاطع را تشکیل می‌دهند. مدل (۱) ممکن است دارای جواب بهینه چندگانه باشد. برای رفع این مشکل مدل‌های ثانویه ارائه شده است. مدل‌های ثانویه می‌توانند در حالت خوشبینانه، بدبینانه یا بی‌طرف باشند [۳].

- روش تحلیل فرامرز: ادونل و همکاران [۶] روش تحلیل فرامرز را برای بررسی شکاف تکنولوژی بین DMUهای مختلف ارائه دادند. طبق مطالعه آن‌ها، مجموعه تکنولوژی n واحد تصمیم‌گیری به‌صورت $T = \{(x,y)|$ $x\}$ می‌تواند y را تولید کند. و مرز T به‌عنوان فرامرز DMUها تعریف می‌شود. با فرض این‌که n واحد تصمیم‌گیری بر اساس سطح تکنولوژی آن‌ها می‌توانند در G گروه تقسیم شوند که گروه‌های مختلف دارای مجموعه‌های مختلف تکنولوژی هستند. بنابراین مجموعه امکان تولید هر گروه

به‌صورت $\{x^g$ می‌تواند y^g را تولید کند. $|(x^g, y^g)\}$ $(g = ۱, \ldots, G)$ T^g تعریف می‌شود. مرز T^g مرز گروهی مربوط به گروه g می‌باشد، پس $T = T^۱ \cup T^۲ \cup \ldots T^G$.

کارایی DMU_d نسبت به فرامرز و گروه مرز به‌ترتیب به‌صورت کارایی فرامرز (ME) و کارایی گروه مرز (GE) نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که هنگام استفاده از مدل (۱) برای محاسبه GE تعداد DMUها از n به تعداد DMUها در گروه ارزیابی شده کاهش می‌یابد. نسبت شکاف تکنولوژی (MTR) به‌صورت $MTR = \frac{ME}{GE} \leq ۱$ تعریف می‌شود. هرچه MTR به ۱ نزدیک‌تر باشد، شکاف تکنولوژی بین فرامرز و گروه مرز کوچک‌تر است.

۳. روش کارایی متقاطع بی‌طرف در چارچوب تحلیل فرامرز

در این بخش روش کارایی متقاطع در فرامرز معرفی شده توسط چن و یانگ [۲] معرفی می‌شود که می‌توان از آن برای محاسبه و تجزیه کارایی متقاطع دقیق‌تری در مورد واحدها استفاده کرد. پس از آن مدل بی طرف را برای رفع مشکلات اهداف ثانویه معرفی می‌کنیم.

بر اساس روش تحلیل فرامرز $(SMFA)$ هر DMU مجاز به استفاده از وزن‌های مطلوبش می‌باشد که ممکن است منجر به مازاد کارایی شود [۹]. بنابراین در این روش کارایی خودارزیابی نسبت به فرامرز با CME و کارایی خود ارزیابی نسبت به گروه مرز با کارایی گروه مرز CGE نشان داده می‌شود.

برای بررسی علمی رابطه بین مرزهای مختلف در محیط کارایی متقاطع روش جدید بر اساس $CMFA$ بعد از به‌دست آوردن CME هر واحد تصمیم‌گیری یک مدل خود ارزیابی به‌صورت زیر معرفی شد [۲].

$$
\begin{aligned}
\theta_{dd}^{CGE} = \max \quad & \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rd} \\
s.t. \quad & \sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{id} = ۱; \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{ij} \leq ۰, \quad j = ۱, \ldots, k; \\
& \sum_{r=۱}^{s} u_{rd} y_{rj} - \theta_{dj}^{CME*} * \sum_{i=۱}^{m} v_{id} x_{ij} \geq ۰, \quad j = ۱, \ldots, k; \\
& \forall\, v_{id},\ u_{rd} \geq ۰.
\end{aligned}
\tag{۳}
$$

مدل (۳) همانند مدل‌های مضربی DEA، ممکن است دارای جواب چندگانه باشد که منجر به ماتریس کارایی متقاطع با تحلیل فرامرز متفاوتی خواهد شد. برای برطرف کردن این مشکل چن و یانگ [۲] اهداف ثانویه را بر اساس مدل خوشبینانه و بدبینانه ارائه دادند. مدل‌های خوشبینانه بهترین وزن‌ها را در بدترین حالت سایر واحدها و مدل‌های بدبینانه بدترین وزن‌ها را در بهترین حالت سایر واحدها، به واحد تحت ارزیابی اختصاص می‌دهند. اما استفاده از مدل‌های خوشبینانه یا بدبینانه ممکن است اندازه کارایی و رتبه‌بندی‌های متفاوت را به هر واحد اختصاص دهد. بنابراین انتخاب نوع روش برای انتخاب بهترین وزن به سادگی امکان‌پذیر نمی‌باشد. هم‌چنین در این دو نوع مدل ممکن است وزن‌های صفر به تعداد زیادی مؤلفه ورودی و یا خروجی اختصاص داده شود که از نظر علمی مطلوب نیست. بنابراین برای رفع این مشکل، مدل بی‌طرف را در تکنولوژی فرامرز معرفی می‌کنیم. مدل پیشنهادی نه تنها کارایی متقاطع هر واحد را به‌صورت منطقی‌تر محاسبه می‌کند، بلکه تعداد وزن‌های صفر

به‌صورت قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد. در این‌صورت مدل ثانویه بی‌طرف را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&\max \quad \delta \\
&s.t. \quad \sum_{i=1}^{m} v_{id}x_{id} = 1; \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_{rd}y_{rd} = \theta_{dd}^{CGE*}; \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_{rd}y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_{id}x_{ij} \le 0, \quad j = 1,\dots,k,\ j \ne d; \\
&\qquad \sum_{r=1}^{s} u_{rd}y_{rj} - \theta_{dj}^{CME} \times \sum_{i=1}^{m} v_{id}x_{ij} \ge 0, \quad j = 1,\dots,k; \\
&\qquad u_{rd}y_{rd} - \delta \ge 0,\ r = 1,\dots,s; \\
&\qquad \forall\ u_{id},\ v_{id},\ \delta \ge 0,\ i = 1,\dots,m.
\end{aligned} \tag{۴}
$$

مدل (۴) باید به‌ازای هر واحد یعنی n مرتبه حل شود. بعد از به‌دست آوردن وزن‌های ورودی و خروجی هر واحد با کمک فرمول (۲) ماتریس کارایی متقاطع را تشکیل می‌دهیم و سپس اندازه کارایی هر واحد از فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$\theta_d^* = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_{jd}. \tag{۵}$$

۴. مثال عددی

یک مثال عددی برای نشان دادن روش تحلیلی $CMFA$ پیشنهادی استفاده شده است، که در آن ۶ واحد با دو ورودی و یک خروجی، همان‌طور که در جدول ۱ نشان داده شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. واحدها در دو گروه با تکنولوژی‌های متفاوت قرار دارند.

جدول ۱. ورودی‌ها/خروجی داده‌های کارایی از مثال عددی.

گروه	DMU	ورودی‌ها		خروجی	θ_{dd}^{CCR}	θ_{dd}^{CGE}
		x_1	x_2	y_1		
۱	۱	۱۲	۳۱	۱۷	۱/۰۰	۱/۰۰
۱	۲	۱۷	۲۹	۱۵	۰/۸۲	۰/۸۳
۱	۳	۱۱	۳۶	۱۶	۱/۰۰	۱/۰۰
۲	۴	۱۵	۳۸	۱۳	۰/۶۲	۰/۹۱
۲	۵	۱۷	۱۸	۱۴	۱/۰۰	۱/۰۰
۲	۶	۱۶	۲۶	۱۴	۰/۸۴	۱/۰۰

در ستون‌های ششم و هفتم جدول ۱ مقدار کارایی خودارزیابی نسبت به فرامرز و کارایی خود ارزیابی نسبت به گروه مرز بیان شده‌اند.

برای نشان دادن کاربرد روش پیشنهادی در جدول ۲ وزن‌ها با استفاده از مدل بدبینانه [۲] و مدل پیشنهادی (۴) مشخص و مقایسه شده‌اند. همان‌طور که در جدول ۲ مشاهده می‌کنید مدل بدبینانه [۲] برای ۳ مؤلفه ورودی وزن صفر اختصاص داده است، یعنی ورودی اول DMU_4 و ورودی دوم DMU_5 و DMU_6 در اندازه کارایی مربوطه محاسبه نمی‌شوند و صرفاً بر اساس سایر ورودی‌ها و خروجی‌ها اندازه‌گیری کارایی را انجام می‌دهیم. اما

زمانی که از مدل بی‌طرف (۴) استفاده می‌کنیم فقط یک وزن صفر داریم. مزیت روش پیشنهادی به خوبی در مقایسه اندازه کارایی‌های دو روش نیز مشهود است. رتبه‌بندی در روش پیشنهادی (ستون ۹) منحصر به فرد است اما با توجه به ستون ۵ در دیدگاه بدبینانه رتبه تکراری نیز وجود دارد. این نتایج در حالت خوشبینانه نیز قابل مقایسه هستند.

جدول ۲. جدول مقایسه نتایج مدل‌های بی‌طرف و بدبینانه.

	مدل بدبینانه				مدل(۴)			
DMU	$V_۱$	$V_۲$	$U_۱$	θ	$V_۱$	$V_۲$	$U_۲$	θ
$DMU_۱$	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۶	۱/۰۰(۱)	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۹۵(۲)
$DMU_۲$	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۷۶(۳)	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۸۸(۴)
$DMU_۳$	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۰۶	۰/۹۱(۲)	۰/۰۲	۰/۰۲	۰/۶	۰/۹۱(۳)
$DMU_۴$	۰/۰۰	۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۴۶(۵)	۰/۰۱	۰/۰۳	۰/۰۷	۰/۹۶(۱)
$DMU_۵$	۰/۰۳	۰/۰۰	۰/۰۴	۰/۴۹(۴)	۰/۰۶	۰/۰۰	۰/۰۷	۰/۷۵(۶)
$DMU_۶$	۰/۰۳	۰/۰۰	۰/۰۴	۰/۴۹(۴)	۰/۰۵	۰/۰۱	۰/۰۷	۰/۸۴(۵)

مراجع

1. A. Charnes, W. W. Cooper and E. Rhodes, *Measuring the efficiency of decision making units*, European J. Oper. Res. **2** (6) (1978) 429–444.
2. L. Chen, Y. Huang, M. J. Li and Y. M. Wang, *Meta-frontier analysis using cross-efficiency method for performance evaluation*, European J. Oper. Res. **280** (1) (2020) 219–229.
3. J. Doyle and R. Green, *Efficiency and cross-efficiency in DEA: Derivations, meanings and uses*, J. Oper. Res. Soc. **45** (1994) 567–578.
4. F. Li, Q. Zhu and L. Liang, *Allocating a fixed cost based on a DEA-game cross efficiency approach*, Expert Syst. Appl. **96** (2018) 196–207.
5. H. H. Liu, Y. Y. Song and G. L. Yang, *Cross-efficiency evaluation in data envelopment analysis based on prospect theory*, European J. Oper. Res. **273** (1) (2019) 364–375.
6. C. J. O'Donnell, D. S. P. Rao and G. E. Battese, *Metafrontier frameworks for the study of firm-level efficiencies and technology ratios*, Empir. Econ. **34** (2008) 231–255.
7. T. R. Sexton, R. H. Silkman and A. J. Hogan, *Data envelopment analysis: Cri- tique and extensions*, New Directions for Program Evaluation **1986** (32) (1986) 73–105.
8. B. Walheer, *Aggregation of metafrontier technology gap ratios: The case of European sectors in 1995-2015*, European J. Oper. Res. **269** (3) (2018) 1013–1026.
9. Y. M. Wang and K. S. Chin, *A neutral DEA model for cross-efficiency evaluation and its extension*, Expert Syst. Appl. **37** (5) (2010) 3666–3675.

پست الکترونیکی: m.davtalab-olyaie@kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: maryam.najafvand1363@gmail.com

سخنرانی‌ها

تاریخ، آموزش و فلسفه ریاضی

اثر چرتکه‌های جدید بر یادگیری ریاضی: از رویا تا واقعیت

محمدرضا توکلی‌مقدم*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
و زهرا گویا
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. بیش از یک دهه است که بازار آموزشیِ ایران، سرشار از تبلیغات رنگارنگ برای چرتکه‌هایی شده است که ابتدا از مالزی وارد شد و پس از جلب نظر مشتریان از طریق تبلیغات وسیع، به سرعت جای خود را در جامعه ایران باز نمود. بعد از آن، مؤسسه‌های آموزشی یکی پس از دیگری، به رقابت با یکدیگر پرداختند تا مشتریان بیشتری را جلب کنند. مسئله چرتکه اگر در حد یک کالای تجاری باقی می‌ماند و تداخلی با آموزش ریاضی مدرسه‌ای و فرایند یادگیری ریاضی پیدا نمی‌کرد، دلیلی برای بررسی آن به‌عنوان یک موضوع پژوهشی نبود. ولی توجه به پدیده «چرتکه»، با شیبی تند، ابعاد تازه‌ای یافت و همکاریِ بعضی از بخش‌های آموزش و پرورش رسمی، خانه‌های ریاضیات، رسانه ملی، پای پژوهشگران دانشگاهی را هم به این حوزه جلب نمود. بدین سبب هدف این مقاله، طرح این موضوع برای اعضای جامعه ریاضی در ایران و اعلام نیاز به مطالعه این پدیده از ابعاد گوناگون است.

واژه‌های کلیدی: چرتکه، نیم‌کره‌های مغز، ریاضی مدرسه‌ای، یادگیری ریاضی، سرعت محاسباتی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97N99.

۱. مقدمه

در فرهنگ ایرانی از دیرباز، چرتکه در مبنای ده‌دهی/ اعشاری، متداول‌ترین ابزار محاسباتی و خرید و فروش بوده و یکی از ابداعات منحصربه‌فردی است که هم ارزش ابزاری و هم یادگیری دارد که با استفاده از آن، می‌توان مفهوم عدد، ارزش مکانی و چهار عمل اصلی را به یادگیرندگان از کودکی تا بزرگ‌سالی، آموزش داد. این در حالی است که در دوران جدید و با وجود دسترسی وسیع دانش‌آموزان به تکنولوژیِ با کیفیت و ارزان، در بعضی کشورها از جمله ایران، توجه‌ای چشم‌گیر بر چرتکه‌هایی در مبناهای ۵ و ۸ و نظایر آن با تمرکز بر افزایش «دقت» و «سرعت» محاسباتی و تقویت دو نیمکره مغز شده است. این تبلیغ‌ها با متقاعد نمودن خانواده‌ها که چرتکه، مسیر «نابغه»گی فرزندانشان را تسهیل می‌کند، تأثیرگذاری زیادی در سطح عمومی در ایران داشته و این بار، بخشی از جامعه خواستار توسعه این آموزش‌ها شده‌اند. از طرف دیگر پای این کودکان به بعضی برنامه‌های تلویزیونی پر مخاطب باز شده و اغلب، در رقابت با گروه‌های هنری و ورزشی که سخت زیر ذره‌بین داوران هستند، پیروز می‌شوند. داورانی که خود اعلام می‌کنند در ریاضی و محاسبات، ضعیف و ناتوان هستند و به آن‌ها رای مثبت می‌دهند. این نوع تبلیغات، نشان می‌دهد که جامعه ریاضی و جامعه آموزشی، لازم است نسبت به این اتفاقات و خطر فروکاسته‌شدن ریاضی تنها به مهارت‌های محاسباتی خاص، ابراز نگرانی کنند. این مقاله، با اشاره به پیشینه پژوهش‌های انجام‌شده در ایران، نتایج یک مطالعه مقدماتی را در این مورد، ارائه می‌کند.

۲. پیشینه پژوهش

انجام پژوهش در مورد نقش چرتکه‌های غیرده‌دهی در یادگیری ریاضی کودکان در ایران، روندی رو به رشد دارد و تمرکز اکثرشان، بر نقش این چرتکه‌ها در «درمان اختلالات یادگیری ریاضی» است که با رویکرد کمّی و طراحی تجربی و بدون رعایت کمترین دقت روشی و یکنواختی شدید، انجام شده‌اند. برای نمونه، از ۱۴ پژوهش شناسایی شده با کلیدواژه‌های این مقاله، ۱۲ مورد راجع به «تأثیر» مثبت «آموزش چرتکه» بر «بهبود عملکرد ریاضیِ دانش‌آموزان

* سخنران

با اختلال یادگیری» از طریق مقایسه دو گروه آزمایش و گواه، اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون برای سنجش میزان «تأثیر» و استفاده از یک آزمون آماریِ استنباطی بود که به بعضی از آن‌ها، اشاره می‌شود.

نتیجه پژوهشی با عنوان «تأثیر راهبرد آموزشی محاسبه ذهنی با چرتکه بر بهبود عملکرد دانش‌آموزان با اختلال یادگیری خاص با مشکل ریاضی» [۴]، نشان داده که «آموزش چرتکه، بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان تأثیر مثبت داشته است». همچنین در پژوهش «اثربخشی آموزش یوسی‌مس (چرتکه) بر عملکرد تحصیلی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی دارای اختلال یادگیری ریاضی»، نشان داده شد که دانش‌آموزان گروه آزمایش، عملکرد بهتری از گروه کنترل داشته‌اند [۹]. در تحقیق دیگری [۱۰]، «تأثیر آموزش محاسبات ذهنی با استفاده از چرتکه در کاهش ناتوانی یادگیری درس ریاضی دانش‌آموزان پایه سوم ابتدایی» در شهرستان خوی مطالعه شد که در آن، گروه آزمایش به تعداد ۲۴ جلسه ۴۰ دقیقه‌ای با استفاده از چرتکه و گروه کنترل به شیوه سنتی آموزش دیدند و نتایج به نفع تأثیر مثبت چرتکه در کاهش ناتوانی یادگیری درس ریاضی دانش‌آموزان و بهبود مهارت‌های شمارشی آنان اعلام شد [۱۰]. علاوه بر این، پژوهش «اثربخشی آموزش چرتکه در دقت، خلاقیت و ریاضی کودکان دبستان»، نشان داد که آموزش چرتکه، سبب پیشرفت ریاضی شده و در دقت کودکان اثر مثبت داشته، اما تأثیر معناداری بر خلاقیت نداشته است [۵]. از سوی دیگر، بررسی «تأثیر آموزش ذهنی چرتکه‌ای بر مهارت حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان مقطع ابتدایی» به این نتیجه رسید که دانش‌آموزانی که تحت آموزش چرتکه بودند، از نظر سرعت در حل مسئله ریاضی، دقت و تمرکز و محاسبه عددی، موفق‌تر بودند [۱]. در همین راستا، «تأثیر آموزش چرتکه برعملکرد ریاضی و انگیزش ریاضی در دانش‌آموزان دختر شهرستان اهواز»مورد مطالعه قرار گرفت و به این نتیجه رسید که آموزش چرتکه، تأثیر معناداری بر عملکرد ریاضی دانش‌آموزان نداشت و حتی در مواردی، ضعف گروه چرتکه‌ای مشاهده شد، اگرچه تأثیر مثبت ولی از نظر آماری غیرمعناداری، بر انگیزش ریاضی دانش‌آموزان داشته است [۸].

«تأثیر آموزش ریاضی به روش UCMAS بر توسعه ذهنی کودکان ۵ تا ۱۲ سال شهر تبریز»، به این نتیجه رسید که آموزش UCMAS، بر توانایی حل مسئله ریاضی، حافظه عددی و هوش منطقی‌ریاضی دانش‌آموزان، تأثیر دارد [۲]. از این گذشته، در «بررسی تأثیر آموزش محاسبات ذهنی توسط چرتکه بر خلاقیت و هوش هیجانی دانش‌آموزان با طبقه‌بندی به روش شبکه‌های عصبی» که دو گروه آموزشی شامل ۴۱ نفر از اعضای یک مؤسسه چرتکه در آذربایجان شرقی در آن شرکت کردند [۳]، نشان داد که آموزش با استفاده از آن نوع چرتکه، بر افزایش میزان برخی از مؤلفه‌های فراشناختی، خلاقیت و هوش هیجانی، تأثیر داشته است. با همین قالب، «بررسی رابطه بین استفاده از چرتکه و بهبود شاخص توجه متمرکز کودکان دو گروه سنی هشت و نه ساله شهر کرمان در سال ۹۴-۹۳» انجام شد و تأثیر معناداری در افزایش تمرکز کودکان، مشاهده شد [۷]. از منظر دیگری، «تأثیر استفاده از حساب ذهنی و چرتکه‌ای UCMAS بر یادگیری و تمرکز و اعتماد به نفس دانش‌آموزان مقطع ابتدایی» ارزیابی و مثبت بودن تأثیر گزارش شد [۶].

۳. گزارش یک مطالعه مقدماتی

به منظور شناخت عمیق‌تر تأثیر چرتکه بر یادگیری ریاضیِ دانش‌آموزان، پژوهشی طراحی شد و نویسنده اول مقاله که معلم ریاضی پایه هفتم است، از دانش‌آموزانی که برای کار با چرتکه آموزش دیده بودند، درخواست نمود تا در صورت تمایل، در آن شرکت کنند. روش این تحقیق کیفی است و در این مقاله، نتایج اولیه بخش مقدماتی آن، گزارش می‌شود. پس از این دعوت، سه دانش‌آموز که در سال‌های قبل، در کلاس‌های آموزش چرتکه یکی از مؤسسه‌های مشهور شرکت کرده بودند، داوطلب شرکت در این مطالعه شدند و از خانواده‌هایشان هم رضایت گرفته شد. ابزار جمع‌آوری داده‌ها مصاحبه نیمه‌ساختاری (پیوست الف) و یادداشت‌های میدانی بود. این مصاحبه‌ها به دلیل شرایط همه‌گیری کرونا، به طور مجازی و از طریق تماس تصویری انجام شد. مصاحبه‌ها به درخواست شرکت‌کنندگان، ضبط نشدند تا در آن‌ها، اضطراب ایجاد نشود و در عوض، علاوه بر پاسخ‌های شرکت‌کنندگان، مصاحبه‌کننده موارد مورد توجه دیگر را نیز، یادداشت نمود.

۴. یافته‌ها

در این بخش، نتایج اولیه تجزیه و تحلیل مصاحبه‌ها، در سه مقوله، ارائه می‌شود.

۱.۴. **مقوله اول: تأثیر آموزش چرتکه.** برای هر سه شرکت‌کننده، کلاس‌های چرتکه شبیه «کلاس‌های زبان» بوده و «جذابیت‌هایی از جنس کلاس‌های فوق‌برنامه و غیرمدرسه‌ای» داشته است. همچنین، انتظار شرکت‌کنندگان در این کلاس‌ها، «انجام سریع محاسبات»، «افزایش تمرکز»، «کاهش اضطراب در امتحان‌ها» و «تقویت حافظه» بود. با این حال، این انتظار برآورده نشده بود، ولی آموزش چرتکه، آن‌ها را «صبورتر» کرده و «تحمل‌شان» را بیشتر کرد.

۲.۴. **مقوله دوم: چگونگی آموزش چرتکه.** یکی از مصاحبه‌شونده‌ها در این کلاس‌ها، «ابتدا نوشتن اعداد» به «زبان انگلیسی» و به «شیوه نگارش خاصی» را آموخته بود که با «نوشتن مرسوم متفاوت بودند» و «دلیل این تفاوت، سهولت در نوشتن سریع» بود و به آن‌ها، «اعداد چرتکه‌ای» می‌گفت. در کلاس‌های آموزش چرتکه، به دانش‌آموزان «تمرین‌های نوشتن سریع می‌دادند» و کتاب‌های «شنیداری، نوشتاری و فلش‌کارت‌های متنوعی» هم داشتند. هم‌چنین، «برای انجام تمرین‌ها محدودیت زمانی ایجاد می‌کردند تا سرعت بچه‌ها بیشتر شود»، وی در توضیح نحوه آموزش بیان کرد که «هنگام کار با چرتکه، فقط با سه انگشت کار می‌کردیم که هرکدام، وظیفه‌ای مشخص داشتند. میله‌ای که یکان را نشان می‌دهد یک میله در وسط چرتکه است و راست‌ترین میله نیست». علاوه بر این در آموزش چرتکه، از عبارتی به نام «اعداد دوست» استفاده می‌شود که به معنای اعدادی است که مجموع آن‌ها، ۱۰ می‌شود. این در حالی است که «تعداد زیاد فرمول‌هایی» که باید به خاطر سپرده شوند، آن‌ها را خسته کرده بود، زیرا که «باید با تکرار زیاد» بر آن‌ها مسلط می‌شدند. یکی از آن‌ها با نشان دادن چرتکه‌اش، چند محاسبه جمع و تفریقِ یک‌رقمی را انجام داد، اما عملیات با رقم‌های بالاتر را نمی‌توانست انجام دهد. «حفظ فرمول‌ها» برای دیگری نیز «خیلی سخت بوده» و «ترم‌های بالاتر»، «فرمول‌ها سخت‌تر می‌شدند»، تا جایی که مجبور بوده «روزی دو سه ساعت تمرین» کند و این فشار، سبب می‌شده که گاهی «از شدت خستگی و سختی»، به «گریه» بیفتد.

۳.۴. **مقوله سوم: آموزش چرتکه و یادگیری ریاضی.** از نظر دانش‌آموزان، «چرتکه ربطی به ریاضی ندارد» و بیشتر، «بازی با اعداد» است. در حقیقت، «تنها ارتباط چرتکه با ریاضی، استفاده از اعداد» است. از نظر آنان، کارایی اصلی چرتکه، افزایش «سرعت» و «روان‌تر» شدن در انجام «محاسبات» است که به ایشان، «حس خوشایندی» داده بود. «این محاسبات ربطی به ریاضی ندارد» و تنها جایی که به کمکشان آمده، انجام «جمع و تفریق‌های طولانی» بوده است. افزون بر این که بین آموزش چرتکه و درس‌ها و کتاب‌های درسی ریاضی در مدرسه نه «شباهتی» و نه «تناقضی» می‌دیدند.

۵. سخن پایانی

در دهه اخیر، تعداد مؤسسه‌های آموزش چرتکه در ایران، به شکل بی‌سابقه‌ای افزایش یافته است. بررسیِ چگونگیِ شکل‌گیری این مؤسسه‌ها و رواج آموزش چرتکه‌های گوناگون وارداتی از مالزی، ژاپن و چین اغلب توسط افرادی انجام شده که ارتباطی با ریاضی نداشته‌اند، ولی تا جایی توسعه یافته که بسیاری از علاقه‌مندان به ارتقای یادگیری ریاضیِ کودکان را قانع به سرمایه‌گذاری و حمایت کردن از آن‌ها کرده است. در این مسیر و از طریق تبلیغات شهری و رسانه‌ای، بسیاری از اداره‌های آموزش‌وپرورش، با تأسیس این مؤسسه‌ها موافقت موقت کردند، بعضی «خانه‌های ریاضیات» مجری انحصاری این آموزش‌ها شدند و استقبال خانواده‌ها، ضامن تداوم این آموزش‌ها شد. از چند سال قبل نیز به تدریج، پای جامعه ریاضی دانشگاهی به این آموزش کشیده شد و تعداد دانشگاهیانی که به‌عنوان عضو هیئت مدیره، عضو هیئت مؤسس یا عضو تیم طرح‌های آموزشی و پژوهشی در ارتباط با «آموزش چرتکه» فعالیت می‌کنند، بیشتر و بیشتر می‌شود. هدف این پژوهش، هشدار به جامعه ریاضی نسبت به مداخله این نوع آموزش‌ها در ارتقای یادگیری ریاضی مدرسه‌ای و دانشگاهی است.

پیوست الف: مصاحبه نیمه‌ساختاریافته

۱. به کسی که با این آموزش آشنا نیست و دوست دارد راجع به آن بداند، «چرتکه و محاسبات سریع» را توضیح دهید.
۲. چه مدت در این دوره‌ها شرکت کردید؟
۳. مهم‌ترین چیزهایی که در این کلاس‌ها یاد گرفتید، چیست؟
۴. در انجام چه کارهایی، از چرتکه استفاده می‌کنید؟
۵. کار با چرتکه، چقدر به افزایش تمرکز و تقویت حافظه شما کمک کرد؟
۶. یادگرفتن کار با این چرتکه‌ها، سخت بود یا راحت؟ کمی توضیح بدهید.
۷. آموزش چرتکه، چقدر به یادگیری ریاضی‌تان کمک کرد؟

مراجع

۱. م. بزازی‌لمراسکی، ر. جهانیان و پ. ایران نژاد، تأثیر آموزش ذهنی چرتکه‌ای بر مهارت حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان مقطع ابتدایی، فصلنامه فناوری اطلاعات و ارتباطات در علوم تربیتی، **۱** (۱۳۹۵) ۲۲ – ۵.

۲. ف. پاک‌اسکوئی و ج. یاری، تأثیر آموزش ریاضی به روش UCMAS بر توسعه ذهنی کودکان ۵ تا ۱۲ سال شهر تبریز، نشریه علمی-پژوهشی آموزش و ارزشیابی، سال نهم، **۳۳** (۱۳۹۵) ۱۲۱ – ۱۰۵.

۳. س. حاجی‌زاده، ح. صبوری‌مقدم و س. بدل‌خانی، سجاد، بررسی تأثیر آموزش محاسبات ذهنی توسط چرتکه بر خلاقیت و هوش هیجانی دانش‌آموزان با طبقه‌بندی به روش شبکه‌های عصبی، ششمین کنفرانس بین المللی روان‌شناسی و علوم اجتماعی، تهران (۱۳۹۵).

۴. پ. رشیدی، ا. فتحی آذر و م. میرنسب، تاثیر راهبرد آموزشی محاسبه ذهنی با چرتکه بر بهبود عملکرد دانش‌آموزان با اختلال یادگیری خاص با مشکل ریاضی، چهارمین همایش ملی روانشناسی مدرسه، تهران (۱۳۹۶).

۵. ز. سعیدواحد، اثربخشی آموزش چرتکه در دقت، خلاقیت و ریاضی کودکان دبستان، پایان‌نامه منتشرنشده کارشناسی ارشد. دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران مرکز (۱۳۹۴).

۶. س. شاه حسینی، تأثیر استفاده از حساب ذهنی و چرتکه‌ای *UCMAS* بر یادگیری و تمرکز و اعتمادبه‌نفس دانش‌آموزان مقطع ابتدایی، دومین کنفرانس ملی رویکردهای نوین در آموزش و پژوهش، محمود آباد (۱۳۹۶).

۷. م. شجاعی‌باغینی و ا. سلطانی، بررسی رابطه بین استفاده از چرتکه و بهبود شاخص توجه متمرکز کودکان دو گروه سنی هشت و نه ساله شهر کرمان در سال ۹۴-۹۳، دومین کنفرانس بین‌المللی علوم انسانی با رویکرد بومی-اسلامی و تأکید بر پژوهش‌های نوین، بوشهر (۱۳۹۵).

۸. پ. علیزاده‌شوشتری‌زاد، س. علیزاده شوشتری‌زاد و م. شهنی‌ییلاق، تأثیر آموزش چرتکه برعملکرد ریاضی و انگیزش ریاضی در دانش‌آموزان دختر شهرستان اهواز، کنفرانس ملی روان‌شناسی، علوم تربیتی و اجتماعی، بابل (۱۳۹۴).

۹. ف. قربانیان و م. بهرامی‌پور، اثربخشی آموزش یوسی‌مس (چرتکه) بر عملکرد تحصیلی دانش آموزان پایه پنجم ابتدایی دارای اختلال یادگیری ریاضی، ماهنامه آفاق علوم انسانی، **۱۱** (۱۳۹۷) ۸۷ – ۷۷.

۱۰. ا. کلب‌خوانی و م. سامری، تأثیر آموزش محاسبات ذهنی با استفاده از چرتکه در کاهش ناتوانی یادگیری درس ریاضی دانش‌آموزان پایه سوم ابتدایی، نشریه توانمندسازی کودکان استثنایی، (۱۳۹۹)(۳۳) **۱** ۱۱۶ – ۱۰۱.

پست الکترونیکی: mr.tavakoli.96@gmail.com
پست الکترونیکی: z.gooya@sbu.ac.ir

فراتحلیلی بر تحقیقات انجام شده بر متون کتاب‌های درسی ریاضی ایران از سال ۸۷ تا ۹۸

فرح‌ناز فخرالدین آرانی*
دانشگاه غیردولتی-غیرانتفاعی رفاه، تهران، ایران
و بهناز ساویزی
دانشگاه غیردولتی-غیرانتفاعی رفاه، تهران، ایران

چکیده. با توجه به اهمیت آموزش ریاضیات مدرسه‌ای، تنظیم محتوای این کتاب‌ها نقش برجسته و مؤثری را ایفا می‌کنند. بنابراین، کتاب‌های درسی ریاضی باید به‌گونه‌ای باشند که یکدیگر را تقویت نموده و یادگیری دانش‌آموزان را افزایش دهند. در سال‌های اخیر کتاب‌های درسی جدیدی تالیف شده است و تعداد نسبتاً زیادی تحقیقات تحلیل محتوای کتب درسی صورت پذیرفته است. در این پژوهش، به روش فراتحلیل کیفی از نوع فراتخلیص، ۱۰۵ اثر مرتبط از سال ۸۷ تا ۹۸، انتخاب و بررسی شدند. نتایج نشان می‌دهد که در حوزه فرآیند آموزش ریاضی، «حل مسئله» و در حوزه دانشی، موضوع «حساب و جبر» بیشتر مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. همچنین کتب درسی ریاضی «ابتدایی» نظام‌جدید بیشتر مورد تحلیل قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: فراتحلیل، تحلیل‌محتوا، کتاب درسی ریاضی مدرسه‌ای، جنبه‌های دانشی و فرایندی آموزش ریاضی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97U20, 97U10, 97U99.

۱. پیش‌گفتار

تاریخچه کتاب‌های درسی در ایران به دوران تأسیس دارالفنون بازمی‌گردد [۳]. مانی رضایی سابقه تألیف و تغییرات کتاب‌های درسی را به شش دوره تاریخی تقسیم‌بندی می‌نماید. آخرین بخش این تقسیم‌بندی از سال ۱۳۸۷ تا زمان تألیف مقاله در نظر گرفته شده است [۱]. یکی از نقاط عطف زمانی در برنامه درسی و متعاقب آن تغییرات کتاب‌های درسی، مربوط به تدوین اسناد بالادستی آموزش‌وپرورش از جمله «سند تحول بنیادین آموزش‌وپرورش» و «سند برنامه‌ی درسی ملی» در دهه ۱۳۸۰ می‌باشد. اولین نگاشت سند برنامه‌ی درسی ملی در بهمن ۱۳۸۷ آماده و در آذرماه ۱۳۸۸ مورد تصویب نهایی قرار گرفت [۲]. از سویی نتایج آزمون‌های بین‌المللی تیمز و پرلز، تلنگر و انگیزه‌ای برای ایجاد تغییرات در برنامه و کتاب‌های درسی به حساب می‌آیند. ایران از سال ۱۹۹۵ میلادی هر چهار سال در این آزمون‌ها شرکت کرده است و هر بار هم نتایج آزمون‌ها پایین‌تر از متوسط جهانی ارزیابی شده‌اند. مجموعه این عوامل سر منشأهای اصلی برای تغییرات کتاب‌های درسی طی حدوداً ده سال اخیر بوده‌اند و به همین دلیل در این پژوهش، مقطع زمانی «ده ساله» برای مرور و بازبینی تحقیقات انجام‌شده روی کتاب‌های درسی ریاضی در نظر گرفته شد تا به چهار پرسش اصلی تحقیق پاسخ داده شود: ۱) در پژوهش‌های ده سال اخیر انجام‌شده در ایران، در مورد کتاب‌های درسی ریاضی در مقاطع تحصیلی، کدامیک از جنبه‌های فرایندی آموزش ریاضی بیشتر مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته‌اند؟ ۲) در پژوهش‌های ده سال اخیر انجام‌شده در ایران، چه موضوعات دانشی در کتاب‌های درسی ریاضی، بیشتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند؟ ۳) در پژوهش‌های ده سال اخیر انجام شده، در مورد کتاب‌های درسی ریاضی چه مؤلفه‌های دیگری به‌جز جنبه‌های آموزشی ریاضی و موضوعات محتوایی ریاضی مورد بررسی قرار گرفته است؟ ۴) پژوهشگران آموزش ریاضی، کتاب‌های درسی ریاضی کدام مقاطع تحصیلی را بیشتر مورد تجزیه‌وتحلیل قرار داده‌اند؟

* سخنران

۲. فراتحلیل کیفی

فراتحلیل کیفی یک مطالعه ثانویه از تعدادی مطالعه اولیه و اصلی است که اغلب با دو منظور انجام می‌شود: الف) برای ارائه تصویری مشروح ولی یکپارچه از یافته‌های مطالعات از پیش انجام‌شده، ب) ارزیابی تأثیرات روش‌شناسی‌های مختلف بر یافته‌های مطالعات اولیه [۶] . تیمولاک (۲۰۰۹) رویکردهای متنوعی از فراتحلیل کیفی را معرفی می‌کند: برخی از ایده‌ی «طبقه‌بندی» پونترتو (۲۰۰۵) استفاده می‌کنند که بیشتر ویژگی‌های پسا-اثبات‌گرایانه داشته و به خلاصه‌سازی یافته‌های مطالعات اولیه می‌پردازد [۴]. گروه دیگر اغلب رویکردی تفسیری-سازنده‌گرایی دارند که به تفسیر یافته‌های مطالعات پیشین پرداخته و درکی فراگیرتر و ویژه‌تر از قبل را ارائه می‌دهند [۴]. تیمولاک (۲۰۰۹) چهار نوع فراتحلیل کیفی را معرفی می‌کند: فراقوم نگاری، فرامطالعه، فراتخلیص و نظریه مبنایی اساسی [۶]. ساندلوفسکی و بارسلو (۲۰۰۳) اصطلاح فراتخلیص[۱] را برای تمایز رویکرد خود از رویکرد فراسنتز به‌کار گرفتند [۵]. روش آن‌ها صرفاً توصیفی بوده و خلاصه‌ای از مطالعات اولیه را فراهم می‌کند. روش آن‌ها سه مرحله دارد. در مرحله اول بنابر پرسش‌های اولیه تحقیق، یافته‌ها استخراج می‌شوند. سپس یافته‌ها به جملات و عبارات فرهشتی، تجرید می‌شوند. در نهایت دو نوع اندازه اثر محاسبه می‌شود: یکی بسامد اثر و دیگری شدت اثر. بسامد اثر، میزان یا درصد یک عبارت فرهشتی را در کل مطالعات نشان می‌دهد و شدت اثر، میزان توزیع کل یافته‌ها و عبارات فرهشتی فراتحلیل را در یک مطالعه بیان می‌کند [۴].

۳. روش تحقیق

روش این تحقیق توصیفی از نوع فراتحلیل کیفی-فراتخلیص است که شامل مراحل زیر است: الف) استخراج یافته‌ها از مطالعات اولیه ب) دسته‌بندی پ) مجردسازی یافته‌ها ت) تهیه چک‌لیست ث) محاسبه اندازه اثر (به تقلید از اصطلاح اندازه اثر در مطالعات کمی) و محاسبات درصد فراوانی‌ها و تهیه جداول و نمودارها. جامعه آماری پژوهش حاضر شامل کلیه پایان‌نامه‌ها و مقالات علمی-پژوهشی موجود درباره تحلیل کتاب‌های درسی ریاضی سه مقطع ابتدایی، راهنمایی و دبیرستان و در بازه زمانی سال‌های ۸۷ تا ۹۸ می‌باشد. بر اساس پروتکل‌های جستجو از منابعی که تهیه شد، در مجموع، ۱۰۵ پژوهش به صورت پایان‌نامه و مقاله علمی-پژوهشی (شامل ۴۰ گزارش در مقطع ابتدایی و ۶۵ گزارش در مقطع دبیرستان) از بین تعداد زیادی پژوهش از پایگاه‌های علمی معتبر مرتبط با تحلیل کتاب‌های ریاضی مدارس کشور در بازه زمانی ده ساله گردآوری و انتخاب گردید. بعد از دسته‌بندی و کدگذاری یک چک‌لیست شامل ۱۲ بند شامل: موضوع اثر، نوع پژوهش، مقطع تحصیلی، سال پژوهش، قلمروی رشته آموزشی، الگوی تحلیل محتوا، رویکرد تحقیق، ابزار و روش‌های جمع‌آوری داده‌ها، نظریه تحلیلی، تکنیک تحلیل داده‌ها، جنبه‌های فرآیندی و جنبه‌های دانشی تهیه شد. نظریه تحلیلی شامل: ۱) روان‌شناسی تربیتی (حیطه شناختی، خلاقیت، هوش گاردنر، ربع‌های مغزی هرمان) ۲) برنامه درسی (برنامه سند ملی، رویکردهای قومی-فرهنگی، مطالعات تطبیقی) ۳) نظریه‌های آموزش ریاضی (دانش مفهومی-رویه‌ای، نظریه زمینه‌مدار، سطوح کوچمن) ۴) جنبه‌های دیگر است. جنبه‌های فرآیندی شامل: حل مسئله و مدل‌سازی، ارتباطات، پیوندها و گفتمان، استدلال و بازنمایی و جنبه‌های دانشی مشتمل بر: عدد و عملیات، هندسه، اندازه‌گیری، حساب و جبر، تجزیه‌وتحلیل داده‌ها و احتمال است.

به‌منظور بررسی روایی تحقیق، اقدامات زیر انجام شد: ۱) در فواصل زمانی مختلف و منظم، پایگاه‌های داده مربوط به ثبت گزارشات تحلیل محتوای کتاب‌های درسی مورد بازبینی قرار گرفت. ۲) جستجوها با کلیدواژه‌های مرتبط با موضوع، توسط دو نفر انجام شد. ۳) در مورد دسته‌بندی مقولات گنجانده‌شده در چک‌لیست با فرد متخصصی مشورت شد. به‌منظور پایایی تحقیق، ۲۰ درصد از کل گزارش تحقیق‌های نهایی (۲۱ گزارش تحقیق) به‌طور تصادفی انتخاب شده و در اختیار فرد متخصص دیگری قرار گرفت تا بار دیگر از لحاظ استخراج داده‌ها، کدگذاری و طبقه‌بندی طبق چک‌لیست، مورد بررسی قرار گیرند.

[۱] عبارت «فراتخلیص» به عنوان ترجمه واژه meta-summary اولین بار در این تحقیق به‌کار برده شده است. شاید ترجمه‌های فارسی بهتری برای این عبارت بتوان برگزید.

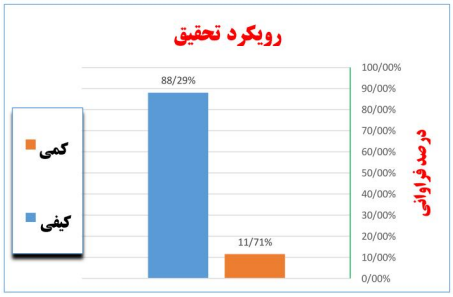
۴. دست‌آوردهای پژوهش

این داده‌ها نشان می‌دهد که تعداد پژوهش‌های انجام‌شده در سال ۱۳۹۷، (۲۹ پژوهش) حدود ۲۸٪ کل پژوهش‌های ده سال گذشته را پیرامون تحلیل کتاب درسی ریاضی، به خود اختصاص داده است (شکل۱).

یافته‌ها نشان می‌دهد که اکثر پژوهشگران (۸۸٪) برای تجزیه‌وتحلیل داده‌ها از تحلیل کیفی (شکل۲) برای ارائه استدلالات عینی و تبیین مفروضات خود استفاده کرده‌اند.

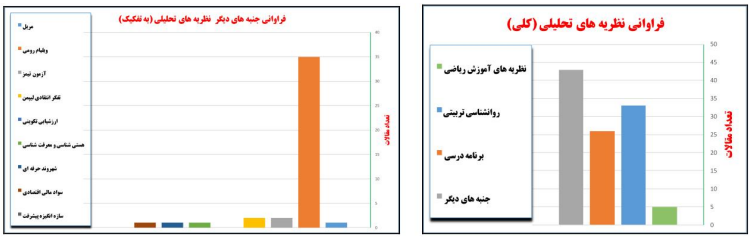


شکل ۱



شکل ۲

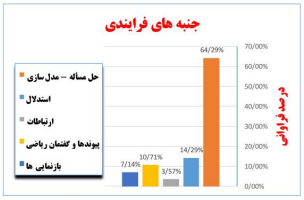
تحلیل و بررسی کتاب‌های درسی از نظر «جنبه‌های دیگر» به‌دلیل آن‌که تنوع زیادی دارد آمار بالایی حدود ۴۰٪ را به خود اختصاص داده است. (شکل ۳). گرچه در این گروه، اکثریت محققان برای تحلیل کتب درسی از روش ویلیام رومی (۸۱/۵٪) که یک روش برای بررسی میزان فعال بودن متن کتاب‌های ریاضی مدارس است استفاده کرده‌اند.



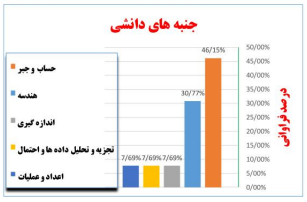
شکل ۳

از یافته‌های پژوهش، آن است که در بین جنبه‌های فرایندی بیشتر به «حل مسئله» پرداخته (۶۴/۲۹٪) و مابقی آن‌ها مورد تحلیل چندانی قرار نگرفته است (شکل ۴). از بین ۵ موضوع دانشی، پژوهشگران بیشتر

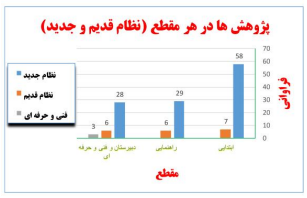
موضوع «حساب و جبر» را تحلیل کرده‌اند و اساساً موضوع «اعداد و عملیات» مورد بررسی قرار نگرفته است (شکل ۵). به‌عبارتی دیگر، کمتر از ۳۸٪ از پژوهش‌ها، جنبه‌های دانشی و فرایندی بوده است. همچنین اکثر محققین، کتاب‌های درسی ریاضی مقطع ابتدایی نظام جدید (۵۸٪) را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند (شکل ۶).



شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶

بیشترین مقدار اندازه اثر برای حوزه فرایندی، هم در بین کل پژوهش‌ها (۱۰۵ پژوهش) و هم در بین پژوهش‌های حوزه فرایندی، مربوط به «حل مسئله»، به ترتیب با مقادیر ۱۶/۲٪ و ۶۵/۴٪ و کمترین مقدار آن، در بین کل پژوهش‌ها مربوط به «پیوندها و گفتمان ریاضی» با مقدار ۱/۰٪ و در بین پژوهش‌های حوزه فرایندی، مربوط به «ارتباطات» با مقدار ۳/۸٪ است. همچنین بیشترین مقدار اندازه اثر برای حوزه دانشی، هم در بین کل پژوهش‌ها (۱۰۵ پژوهش) و هم در بین پژوهش‌های حوزه دانشی، مربوط به «حساب و جبر» و به ترتیب با مقادیر ۶/۷٪ و ۵۰/۰٪ و کمترین مقدار آن، هم در بین کل پژوهش‌ها (۱۰۵ پژوهش) و هم در بین پژوهش‌های حوزه دانشی مربوط به «اعداد و عملیات» و به ترتیب با مقادیر ۱/۰٪ و ۷/۱٪ است.

۵. نتایج پژوهش

چنانچه گفته شد در این مطالعه، هدف، توصیف موضوعات و مواردی است که در تحقیقات تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی در همه‌ی مقاطع تحصیلی به آن‌ها پرداخته شده است. مطابق با چک‌لیست دوازده‌بندی، مهم‌ترین نتایج بدین شرح به‌دست آمد: بیشترین تحقیقات تحلیل کتاب‌های درسی ریاضی در مقطع دبستان انجام شده است. مطالعات کتاب‌های درسی در قلمروهای رشته «آموزش ریاضی» و «برنامه‌ریزی درسی» به ترتیب با درصد فراوانی ۳۰٪ و ۲۳٪ بیشترین سهم را در بین دیگر قلمروها داشته‌اند. در این مطالعه عنوان تحقیق کمّی (به عنوان یک پارادیم) به تحقیقاتی اطلاق شده که دارای فرضیه‌ای برای اثبات یا رد بوده‌اند و صرف به‌کارگیری آمار توصیفی به عنوان تحقیقات کمّی در نظر گرفته نشده است. با این فرض، اغلب (۸۸٪) تحقیقات، غیرکمی و از نوع کیفی بوده‌اند.

در بند نظریه‌های تحلیلی چهار مقوله کلی برای موضوعات مورد تحقیق در نظر گرفته شد که هرکدام شامل چندین زیرمقوله می‌باشند. مقولات اصلی شامل این موارد است : ۱- روان‌شناسی تربیتی ۲- برنامه درسی ۳- نظریه‌های آموزش ریاضی ۴- جنبه‌های دیگر که شامل تحقیقاتی است که در سه مقوله بالا نگنجیده‌اند. روش ویلیام رومی به‌طور خاص در مقوله «جنبه‌های دیگر» در نظر گرفته شد. به دلیل تفاوت زیاد فراوانی این داده با دیگر داده‌ها، روش ویلیام رومی به‌عنوان یک داده پرت در نظر گرفته شده و در مقوله برنامه‌ی درسی (در بخش محتوا) گنجانده نشد؛ زیرا وزن نتایج واقعی در این مقوله را برهم می‌زد. روان‌شناسی تربیتی، برنامه‌ی درسی و نظریه‌های آموزش ریاضی به ترتیب دارای بیشترین فراوانی‌ها بودند. در مقوله روان‌شناسی تربیتی، حیطه‌های شناختی مانند طبقه‌بندی بلوم و در مقوله برنامه‌درسی، حیطه ارتباطات عمودی بیشترین سهم را داشتند. به لحاظ جنبه‌های فرآیندی، «حل مسئله و مدل‌سازی» بالاترین و «ارتباطات» پایین‌ترین و به لحاظ جنبه‌های دانشی، موضوع «حساب و جبر» بالاترین و «عدد و عملیات» پایین‌ترین فراوانی را داشتند.

طی ده سال اخیر، آن‌چه به عنوان کتاب‌های جدیدالتّألیف شناخته می‌شود بیش از کتاب‌های نظام قدیم مورد تحلیل قرار گرفته است و در کل کتاب‌های ریاضی رشته‌های فنی‌وحرفه‌ای کمترین میزان تحقیقات را به خود اختصاص داده‌اند.

آن‌چه از نتایج این تحقیق برمی‌آید این است که بین روش‌ها و حیطه‌های مورد تحقیق برای کتاب‌های درسی، تعادل چندانی وجود ندارد به‌طوری که برخی روش‌ها مانند ویلیام رومی و برخی از حیطه‌ها مانند «حل مسئله و مدل‌سازی» یا موضوع دانشی «حساب و جبر» با تفاوت زیاد بیشتر از دیگر روش‌ها یا حیطه‌ها مورد تحقیق قرار گرفته‌اند.

نتایج این تحقیق می‌تواند به عنوان بازتابی از آن‌چه تاکنون در این زمینه اتفاق افتاده است مورد استفاده پژوهشگران آینده قرار گیرد تا در زمینه‌های کمتر تحقیق شده به تحلیل کتاب‌های درسی بپردازند. همچنین برنامه‌ریزان می‌توانند از اجماع و همسویی برخی از نتایج در این تحقیق برای اصلاح کتاب‌های درسی بهره‌مند شوند.

یافته‌هایی همسو از این مطالعه (علاوه بر پرسش‌های تحقیق اولیه) برای نمونه، ضریب درگیری دانش‌آموز در متن کتاب‌های درسی است. در این مطالعه معلوم شد که حدود ۵۵/۵٪ از تحقیقات، کتاب‌های ریاضی ابتدایی و حدود ۳۳/۵٪ از تحقیقات کتاب‌های ریاضی متوسطه اول و دوم را بیش از حد فعال ارزیابی کرده‌اند. یافته حائز اهمیت دیگر این است که حدود ۹۲٪ از تحقیقات مرتبط صورت گرفته میزان توجه به حل مسئله و مدل‌سازی را «کم» یا «بسیار کم» ارزیابی کرده‌اند. این نتایج می‌تواند مورد توجه مؤلفان کتاب درسی قرار گیرد.

تحقیقات آینده می‌تواند معطوف به بررسی همزمانی یا همبستگی برخی نتایج این تحقیق مانند تاکید زیاد بر حل‌مسأله، با رویکردهای جهانی مانند اعلام حل مسئله به عنوان هسته مرکزی آموزش ریاضی در بیانیه‌ها یا مجامع بین‌المللی بپردازد و بررسی نماید آیا موضوعات مورد تحقیق در این رابطه بیشتر مبتنی بر نیازهای داخلی بوده یا تحت تأثیر دیدگاه‌های جهانی قرار گرفته است.

ما انتظار داریم که در سال‌های آتی، تحقیقات بیشتری در مورد تجزیه و تحلیل کتاب‌های درسی ریاضی و موضوعاتی که کمتر به آن‌ها پرداخته شده انجام شود. با انجام این تحقیقات به برنامه‌ریزان آموزشی و مؤلفان کمک خواهد شد تا آن‌ها کتاب‌های درسی ریاضی دانش‌آموزان را طوری توسعه و ارتقاء دهند که کارایی بیشتری داشته باشند.

پیشنهاد می‌شود تحقیق مشابهی در مورد کتاب‌های درسی ریاضی نظام ۶-۳-۳ برای یک بازه زمانی طولانی‌تر نیز انجام شود تا همسویی نتایج، بیشتر و دقیق‌تر مورد بررسی قرار گیرد و در صورت لزوم نسبت به اصلاح یا تکمیل کتاب‌های درسی ریاضی، برنامه‌ریزی‌های مناسب صورت پذیرد.

مراجع

۱. م. رضایی، سیر تاریخی تألیف کتاب‌های درسی ریاضی در ایران ، فرهنگ و اندیشه ریاضی، بهار و تابستان ۱۳۹۵، شماره ۵۸، ۵۳-۶۵.

۲. سند برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی، تهران: وزارت آموزش‌وپرورش، اسفند ۱۳۹۱.

۳. د. ا. موسی‌پور، ع. عصاره، س. م. طیبی، آ. سلاجقه، م. صفرنواده و ل. عابدی، بررسی تاریخچه وضعیت موجود نظام برنامه‌ریزی درسی در ایران، ۱۳۸۷.

4. U. Flick, *The SAGE Handbook of qualitative Data Analysis*, SAGE Publications Ltd., London, 2013.

5. M. Sandelowski and J.Barroso, *Using qualitative meta-summary to synthesize qualitative and quantitative descriptive findings*, Res. Nurs. Health. **30** (1) (2007) 99–111.

6. L. Timulak, *Meta-analysis of qualitative studies: A tool for reviewing qualitative research findings in psychotherapy*, Psychother Res. **19** (4-5) (2009) 591–600.

پست الکترونیکی: fakhrarani.2019@gmail.com

پست الکترونیکی: bsavizi@gmail.com

جایگاه مبهم برنامه و کتاب درسی ریاضی پایه نهم در پایان دوره عمومی

محمد حسام قاسمی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
و زهرا گویا
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. این مقاله، به استناد برنامه درسی ملی و با مروری اجمالی بر جایگاه ویژه برنامه و کتاب درسی ریاضی پایه نهم به عنوان سال پایانی دورهٔ عمومی در نظام جدید آموزشی ایران و مقایسه آن با کتاب ریاضی پایهٔ دهم به عنوان سال شروع یک دورهٔ تخصصی، به تناقض‌های موجود در اهداف و سازمان‌دهی آن پرداخته است. در این مقایسه، مواردی شناسایی شد که بیانگر جایگاه مبهم برنامه و کتاب درسی ریاضی پایه نهم به‌عنوان آخرین درس ریاضی در پایان دوره عمومی بود. نتیجه اولیه این مطالعه این است که اصلی‌ترین عامل این ابهام، روشن نبودن رویکرد نظری-فلسفی به برنامه‌ریزی و تألیف این کتاب است.

واژه‌های کلیدی: دورهٔ آموزش عمومی، برنامه درسی ملی، برنامه درسی ریاضی، کتاب درسی ریاضی پایهٔ نهم.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 97Bxx.

۱. مقدمه

در «برنامه درسی ملی» (۱۳۹۱)، نظام آموزشی ایران از دو دوره «آموزش عمومی» به مدت نُه سال، شش سال دوره ابتدایی و سه سال دوره اول متوسطه و سه سال «آموزش نیمه‌تخصصی» تشکیل یافته است (ص. ۴۶) پس از اجرای نظام آموزشی جدید که به ۳-۳-۶ معروف شده و به‌عنوان یک رکن اجرایی اصلی در «سند تحول بنیادین آموزش و پرورش در ایران» به حساب می‌آید، پایه نهم به عنوان آخرین پایه از دوره سه ساله متوسطه اول -آموزش عمومی- تعریف شده است. بدین سبب در تاریخ ۹۱/۱۲/۲۸، از طرف وزیر آموزش‌وپرورش خطاب به رئیس سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، طی نامه‌ای «برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران »، برای «ابلاغ و اجرا»، ارسال شد. در بخش مربوط به «فرآیند تولید برنامه‌های درسی و تربیتی حوزه‌های تربیت و یادگیری» این سند (ص. ۴۴) و قسمت «تهیه راهنمای برنامه درسی حوزه‌های تربیت ویادگیری (تعیین اهداف، استانداردهای محتوا و نتایج یادگیری)»، آمده است که «سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی مکلف است که ظرف شش ماه، اهداف دوره‌های تحصیلی را به تفکیک دوره‌های آموزش عمومی و متوسطه دوم و ساحت‌های تعلیم و تربیت با استفاده از مبانی نظری سند تحول بنیادین آموزش و پرورش تهیه و همراه با نتایج اعتباربخشی آن جهت بررسی و تصویب در شورای عالی آموزش و پرورش، ارائه کند». با این تأکید، برنامه‌ریزی‌ها شروع شد و با سرعت، برای دوره‌ها و «ساحت‌های یادگیری» از جمله ریاضی، برنامه درسی تهیه شد و با تعیین مؤلفان، کار تألیف کتاب‌ها آغاز شد. به گفته تورانی، «فشردگی زمان باعث شد از خیلی از چیزهای دیگر غفلت کنیم و ما مجدداً نمی‌خواهیم وارد یک جریان ۳-۳-۶ شویم، چرا که همین تغییرات نیز، خیلی از کارشناسان و مؤلفان ما را به خود مشغول کرد و تمام وقت مفید آن‌ها را اشغال کرد». شاید بدین سبب بود که برای نمونه، با جرح و تعدیل بخش عمده‌ای از محتوای کتاب ریاضی پایه اول دبیرستان و افزودن بخش‌هایی از هندسه ۱ قبلی در قالبی متفاوت، کتاب درسی ریاضی پایه نهم، شکل گرفت. در این شکل‌گیری، «برنامه درسی ساحت یادگیری ریاضی» راهنمای عمل واقع شده که در آن تأکید شده، «وجه مهم ریاضی، توانمندسازی انسان برای توصیف دقیق موقعیت‌های پیچیده، پیش‌بینی و کنترل وضعیت‌های ممکن مادی-طبیعی، اقتصادی، اجتماعی است. بنابراین، توانایی به‌کارگیری ریاضی در

* سخنران

حل مسائل روزمره و انتزاعی، از اهداف اساسی آموزش ریاضی می‌باشد» (برنامه درسی ملی، ۱۳۹۱، ص. ۳۳). از این گذشته، در این برنامه قید شده است که «ریاضیات از نظر ماهیت، علمی مجرد است، ولی بستر رشد و توسعه آن، مشاهده و تجزیه و تحلیل محیط پیرامونی است» و به سرعت این نتیجه حاصل شده که «در ریاضیات مدرسه‌ای، فعالیت‌های آموزشی باید برخاسته از ریاضیات محیط پیرامونی باشد و به دانش‌آموزان کمک کند تا مفاهیم و گزاره‌های ریاضی را در محیط پیرامونی خود مشاهده، تجزیه و تحلیل و درک کند و برای مفاهیم ریاضی در محیط پیرامونی تعبیرهای گوناگون به‌دست آورند»، زیرا «امکان درک شهودی آنان –که راهنمای عمل ریاضیدانان است– را تقویت می‌کند» (ص. ۳۴). علاوه بر این، «توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل روزمره و انتزاعی، از اهداف اساسی آموزش ریاضی می‌باشد» (ص. ۳۳) [۱]. در حالی که «تا پایان دوره آموزش عمومی، موضوعات محتوایی این حوزه بر اساس تلفیقی از شبکه‌های مفهومی و مهارتی، سازمان‌دهی می‌شود و در دورهٔ متوسطه دوم بر حسب رشته‌های تحصیلی، در قالب موضوع‌های محوری، با جهت‌گیری نظری یا کاربردی ارائه خواهد شد» (ص. ۳۵) [۱]. اتخاذ این رویکرد افراطی نسبت به وجود یک دوگانه در ماهیت ریاضی، تبیین نقش ریاضی را در آموزش عمومی، با مشکل مواجه کرده است.

۱.۱. **انتظارات بین‌المللی از درس ریاضی برای پایه نهم.** اهمیت برخورداری از یک نگاه متفاوت به برنامهٔ درسی ریاضی در پایه نهم در دنیا، دارای سابقه تاریخی است. راگ و کلارک (۱۹۱۸) در یک قرن پیش، در کتاب «روش‌های علمی برای بازسازی ریاضی پایهٔ نهم» ، با صراحت و نگاهی منتقدانه به برنامه موجود آن زمان، به روش و محتوای ریاضی آن تاختند و به‌طور مشخص، خواستار پایان دادن به یادگیری ریاضی به شکل طوطی‌وار و بدون کاربرد در دنیای واقعی شدند [۷]. آن‌ها بیان کردند که ریاضی پایه نهم، باید سرشار از فرصت‌های بیشتر برای توانمندسازی دانش‌آموزان، جهت رویارویی با مسائل در موقعیت‌های واقعی باشد. آنان تلاش برای «بازآرایی» و «سازمان‌دهی دوباره» ریاضی نهم را بدون تغییر دیدگاه، بی‌ثمر خوانده و خواهان «تجدید بنا» و «دوباره‌سازی» برنامه شدند. در دوره معاصر نیز، این رویکرد چنان اهمیتی یافت که هدف «برنامه بین‌المللی پیشرفت تحصیلی دانش‌آموزان» (پیزا)، سنجش «سواد ریاضی» در پایان پایه نهم یا دوره عمومی در چهار جنبه «فرآیندهای ریاضی»، «محتوای ریاضی»، «زمینه‌های معنادار» و «صلاحیت‌های شناختی» اعلام شد [۵]. در حقیقت، تمرکز اصلی مطالعه پیزا، بر میزان آمادگی دانش‌آموزان پس از دوره آموزش عمومی اجباری، برای رویارویی با چالش‌های زندگی روزمره و حل مسائل واقعی به کمک ریاضیاتی است که در مدرسه آموخته‌اند.

۲.۱. **کتاب درسی ریاضی پایه نهم.** در پیش‌گفتار کتاب ریاضی پایه نهم آمده است که تألیف آن، «بر مبنای برنامه درسی ملی و در ادامه تغییرکتاب‌های درسی پایه‌های هفتم و هشتم دوره اوّل متوسطه» انجام شده است. در توصیف رویکرد نظریِ کتاب توضیح داده شده که «زمانی تأکید کتاب‌های درسی ریاضی بیشتر بر توانایی انجام محاسبات بوده است»، در صورتی‌که «در رویکرد جدید ضمن حفظ این هدف، تأکید اصلی بر پرورش قوه تفکر و تعقل و رشد توانایی حل مسئله است» [۳]. همچنین گفته شده که فعالیت‌های این کتاب «شامل مراحلی مانند درک کردن، کشف کردن، حل مسئله، استدلال‌کردن، بررسی‌کردن، حدس و آزمایش، توضیح یک راه‌حل، مرتب کردن، قضاوت درباره یک راه‌حل و مقایسه راه‌حل‌های مختلف است» [۳].
این در حالی است که به سختی می‌توان ردّ این نگاه را در کتاب پایه نهم دنبال کرد. کتاب با «مجموعه‌ها» شروع شده و فهم مباحث مجرد را مفروض گرفته است. برای نمونه، در این فصل (ص. ۷) آمده است که «با توجه به تعریف زیرمجموعه، واضح است که هر مجموعه، زیرمجموعه خودش هست؛ یعنی اگر A مجموعه‌ای دلخواه باشد، داریم: $A \subseteq A$» (ص. ۷). این رویکرد به معرفیِ مفاهیم ریاضی در دوره عمومی، با اهداف بیان شده در سند برنامه درسی ملی، سازگاری ندارد. همچنین جمع‌بندی ارائه شده در پایان این فصل هم (ص. ۱۷)، جای تأمل زیاد دارد زیرا اساس آن بر تجرید بنا شده است و برای بیان آن، از واژه‌های محاوره‌ای استفاده شده است:

> در بسیاری از کتاب‌های ریاضی، از مجموعه به عنوان گروهی (یا دسته‌ای) از اشیا نام برده شده است. غافل از آن‌که اگر بگوییم مجموعه گروهی از اشیا است، باید بگوییم گروه چیست؟! آیا می‌توانیم گروه را تعریف کنیم؟

> در واقع چاره‌ای نیست جز آن‌که مانند سیمورلیپ شوتز (ریاضی‌دان معاصر) بگوییم: در همه شاخه‌های ریاضی، مجموعه یک مفهوم بنیادی است. به عبارت دیگر، مجموعه جزء نخستین تعریف نشده‌هاست، مانند مفاهیمی چون نقطه و خط در هندسه، که برای آن‌ها تعریف دقیقی نداریم ولی آن‌ها را با اثر خود می‌شناسیم.

تلاش برای به اصطلاح «جاندار» کردن اشیای مجرد و ساده‌سازی و نادقیق کردن مفاهیم جدی ریاضی، فهم آن‌ها را سخت‌تر می‌کند و شکل‌گیری فهم و درک دانش‌آموزان را با مانع مواجه می‌کند. برای مثال، عدم دقت در تعریف «استدلال» به معنای «دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است»، بالقوه نقش شهود و حواس را زیر سؤال می‌برد و با نگاهی تحصّلی، هر دانستنی را حاصل روابط علت–معلومی و مبتنی بر دانش قبلی می‌داند. همچنین برخوردی که با دنیای واقعی شده، بیشتر غیرواقعی است وقتی بیان شده که «حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم» [۴]. موضوع مورد مناقشه این است که انگار «کارهای روزمره»، نیازی به دلیل و توجیه ندارد و هشدار داده شده که «حتی» کارهایی هستند که نیازمند «استدلال» هستند. این رویکرد به دنیای واقعی، به جای آن‌که بین این دو الفت ایجاد کند، تصور دانش‌آموزان را از نقش ریاضی در حل مسائل واقعی، خدشه‌دار می‌کند. با همین بی‌دقتی و پراکندگی، بی‌مقدمه از استدلال به اثبات پرداخته است و تذکر داده شده که «راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم».

این نوع توجه به دقت، با مثال‌هایی که از زندگی واقعی طرح شده، مغایرت زیادی دارد و به ویژگی‌های مخاطب ۱۵ ساله ریاضی پایه نهم، توجه نشده است. مثلاً چگونه ممکن است که برای دو نوجوان در این سن، چنین مسئله‌ای «واقعی» به نظر آید که «عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتی‌متر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتی‌متر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است؟» (ص. ۳۴). یا این که «حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید» (ص. ۴۱). این نوع نگاه به ریاضی به عنوان مدل‌ساز پدیده‌های طبیعی و حل‌کننده مسائل دنیای واقعی، بیشتر انتزاعی است تا ریشه در واقعیت‌های ملموس و محسوس داشته باشد و بتواند به ارتقای سواد ریاضی، کمک کند.

۲. سخن پایانی

ماهیت نظریه‌پردازی با مدل‌سازی متفاوت است. در عالم نظر، ریاضی دنیاهای مجردی می‌سازد که روابط و بازنمایی‌هاي آن نمادین‌اند و اغلب، با دنیای واقعی بی‌ارتباط هستند. در حالی که به گفته مرشات (۲۰۰۷)، مدل‌سازی ابزاری برای تبیین دنیای واقعی از طریق ریاضی است که در آن، جهت حرکت از تجرید به واقعیت است. در صورتی‌که در مدل‌سازی، مسیر حرکت از واقعیت به تجرید است [۶].

ریاضی پایه نهم، آخرین درس ریاضی در طول نُه سال آموزش عمومی است و طبق رویکردی که در سند برنامه درسی و پیش‌گفتار این کتاب ریاضی بیان شده، انتظار این است که دانش‌آموزان، با مفاهیم و مهارت‌های پایه ریاضی و مدل‌سازی برای حل مسائل دنیای واقعی آشنا شوند و ورزیدگی جبری و محاسباتی پیدا کنند. در حالی که تقریباً تمام محتوای ریاضی سال اول دبیرستان قبلی، به پایهٔ نهم منتقل شده است. افزون بر این، گسست یا همپوشانی بی‌برنامه، بین ریاضی نهم با پایه‌های قبلی و بعدی، مشهود است. در چنین وضعیتی، تزاحم و تناقض در رویکردهای فلسفی به ریاضی و برنامه درسی ریاضی، تدریس و یادگیری آن را با معضلات زیادی همراه کرده است. در واقع پایه نهم، محل واقعی رویارویی تناقض‌های ساختاری، محتوایی و فلسفی مربوط به دوره آموزش عمومی و دوره نیمه‌تخصصی دوم متوسطه است که ماهیت‌شان با هم فرق دارد و این تفاوت در این بزنگاه، در نظر گرفته نشده است.

۳. نتیجه‌گیری

پس از گذشت نزدیک به شش سال از استقرار پایهٔ نهم در نظام آموزشی جدید ایران و دور شدن از شرایط خاص آن دوره به‌ویژه تعجیل در انجام تغییر در برنامه‌ها و کتاب‌های درسی، اصلاح و بازنگری در برنامه درسی ریاضی پایه نهم ضروری است. با توجه به این که پایه نهم، آخرین سال از دوره آموزش عمومی است و دانش‌آموزان بعد از آن، پای در مسیرهای متفاوتی می‌گذارند و بدین سبب، نیازمند برنامه‌ریزی خاص برای ایجاد سوادِ متناسب در دانش‌آموزان و از جمله سواد ریاضی، برای ایفای نقش شهروندی خویش هستند. از این منظر، بازنگری در کتاب درسی ریاضی پایه نهم لازم است کتابی که ماهیت عمومی ندارد و حتی در راستای هشت پایهٔ قبلی هم نیست. در صورتی‌که انتظار این است که درس‌های پایه نهم از جمله ریاضی، مبتنی بر مهارت‌های ایجادشده ریاضی طی هشت سال قبل باشد. کتاب ریاضی پایه نهم، مبنای فلسفی- نظری روشنی ندارد و رویکرد برنامه درسی این کتاب، از انسجام و شفافیت لازم متناسب با اهداف یک دوره عمومی، برخوردار نیست. علاوه بر این، ریاضی و به‌خصوص ریاضیِ پایان دوره عمومی، می‌تواند نقش برجسته‌ای در هدایت تحصیلیِ دانش‌آموزان برای ورود به دوره نیمه‌تخصصی نظری و انتخاب رشته در آن یا انتخاب یکی از دو شاخه دیگر دوره دوم متوسطه، داشته باشد. همه این‌ها، نیاز به بازنگری برنامه و کتاب درسیِ ریاضیِ پایه نهم را روشن‌تر می‌کند.

مراجع

۱. شورای‌عالی آموزش‌وپرورش با همکاری سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، برنامهٔ درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، دبیرخانهٔ شورای‌عالی آموزش و پرورش، وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۱.

۲. ا. رفیع‌پورگتابی، طراحی چارچوبی برای ایجاد تعادل در برنامهٔ درسی ریاضی متوسطه در ایران، رسالهٔ منتشرنشده دکتری ریاضی با گرایش آموزش ریاضی، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، ۱۳۸۹.

۳. ح. امیری، ع. ایرانمنش، خ. داودی، ک. دلشاد، ا. ریحانی، م. ر. سیّد صالحی، ه. شرقی و م. صدر، ریاضی پایهٔ نهم دورهٔ اوّل متوسطه، چاپ ششم، دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌و پرورش، ۱۳۸۹.

۴. ز. گویا، نقد و بررسی حوزه یادگیریِ ریاضی در سند برنامهٔ درسی ملی جمهوریِ اسلامی ایران، [ویراست سوم، ۱۳۸۸]، فصلنامه مطالعات برنامه درسی ایران، انجمن مطالعات برنامه درسی ایران، سال پنجم **۱۸** (۱۳۸۹) ۱۶۴ – ۱۴۷.

۵. م. محسن‌پور، ز. گویا، م. شکوهی‌یکتا، ع. کیامنش و ع. بازرگان، طراحی و ساخت آزمونی برای صلاحیت‌های شناختی سواد ریاضی دانش‌آموزان ایرانی بر مبنای مطالعات پیزا، نشریهٔ نظریه و عمل در برنامهٔ درسی، دانشگاه خوارزمی، **۴** (پاییز و زمستان ۱۳۹۳) ۳۵ –۵.

6. M. Meerschaert, *Mathematical modeling*, 3rd ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007.

7. H. O. Rugg and J. R. Clark, *Scientific Method in the Reconstruction of Ninth-Grade Mathematics*, University of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1918.

8. J. Wang and P. Goldschmidt, *Importance of middle school students' mathematics on high school students' mathematics achievement*, J. Edu. Res. **97** (1) (2003) 3–19. DOI: 10.1080/00220670309596624

پست الکترونیکی: ghasemi.math91@gmail.com
پست الکترونیکی: zahra_gooya@yahoo.com

«علوم-فناوری-مهندسی-ریاضی»: راهی برای مواجهه با بحران رشته ریاضیِ دانشگاهی در ایران

زهرا محتشم*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران
و زهرا گویا
دانشکده ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

چکیده. درکمتر از یک دهه در ایران، رشته فیزیک-ریاضی در شاخه نظری دوره دوم متوسطه، با کاهش چشم‌گیر ورودی‌ها مواجه شد و به‌دنبال آن، رشته‌های ریاضی و علوم‌پایه در آموزش عالی، ناگهان با پدیده دور از انتظارِ تکمیل نشدن ظرفیت‌های اعلام شده خود روبرو شدند. این روند از دانشگاه‌های شهرستان‌ها شروع شد و به سرعت، این رشته‌ها در دانشگاه‌های تهران نیز از این روند کاهشی، تأثیر پذیرفته است. در این موقعیت، سیاست‌گذارانِ آموزش عمومی و آموزش عالی، در تلاش هستند تا با ابداع ساز و کارهای مختلف، از این کاهش جلوگیری کنند. در این مقاله، به استناد یافته‌های پژوهشی، رویکرد تلفیقیِ چهار حوزه «علوم-فناوری- مهندسی-ریاضی» به‌عنوان راهکاری برای احیای معنادار گروه‌های ریاضیِ دانشگاه‌ها در ایران، معرفی شده است.

واژه‌های کلیدی: رشته‌های ریاضی و علوم‌پایه، آموزش عالی، رویکرد تلفیقیِ چهار حوزه «علوم-فناوری-مهندسی-ریاضی».
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

در دهه اخیر، رشته ریاضی در ایران، موقعیت و جایگاه سنتی خود را از دست داده است و به طور چشمگیری، تمایل به ادامه تحصیل در آن، کم شده است. این در حالی است که در سطح جهانی، اقبال به رشته ریاضی مانند ایران، فرازی نداشته که دچار فرود شده باشد. در حقیقت، جامعه جهانی ریاضی و جامعه ریاضی در ایران، با وجودی که همیشه توانایی جذب نخبگان را داشته‌اند، ولی در سطحی عمومی و از دو جهت متفاوت، در یک نقطه به اشتراک رسیده‌اند و آن، عدم علاقه‌مندی دانش‌آموزان به ادامه تحصیل در رشته ریاضی و رشته‌های وابسته به آن در دانشگاه است. بدین سبب در دهه اخیر، پروژه‌های وسیعی با حمایت‌های مادی و معنوی سازمان‌های بین‌المللی از جمله «سازمان ملل متحد» و «یونسکو» به عنوان کمیسیون اصلی آن، «اتحادیه بین‌المللی» و «شورای بین‌المللی علوم» انجام شده است تا راهکارهای مناسبی برای ارتقای ریاضی و علوم‌پایه در دانشگاه، ارائه گردد.

۲. پیشینه

به‌طور تاریخی، شکل‌گیری رشته‌های دانشگاهی در اواخر قرن نوزدهم، تحت‌تأثیر فلسفه تحصّلی، به‌تدریج از هم منفک شدند و در مسیرهای جدا، توسعه یافتند. یکی از مهم‌ترین این رشته‌ها، ریاضی بود که به‌عنوان یکی از «هفت هنر لیبرال» محسوب می‌شد و معمولاً در گروه‌های فلسفه قرار داشت. با این حال، تحت تأثیر همین سنت، ریاضی نیز به تنهایی، تبدیل به یک گروه مستقل در دانشگاه شد. رشته‌ای که به گفته فلیکس کلاین، دو مسئولیت اساسی داشت که یکی جذب و تربیت نخبگان و دیگری، آموزش معلمان برای تدریس ریاضی در مدرسه بود.

همچنین هیلبرت در شروع قرن بیستم، ۲۳ مسئله را برای جامعه ریاضی جهانی مطرح کرد که تلاش برای حل آن‌ها، به ایجاد شاخه‌های جدیدی در ریاضی انجامید و دنیا را در حوزه‌های مختلف، به سرعت جلو برد؛ تا جایی که ادعا شد میزان پیشرفت ریاضی در نیمه اول قرن بیستم، با توسعه ریاضی در طول تاریخ تا پایان قرن نوزدهم، قابل مقایسه است. این‌ها در حالی است که با سرعت غافلگیرکننده فناوری و با توجه به این که ریاضی، بستر و زبان آن بود، این حوزه معرفتی از منظرهای مختلف، مورد توجه تازه‌ای قرار گرفت و افراد دارای استعدادهای مختلف،

* سخنران

جذب آن شدند و تا چند دهه، رشته ریاضی دانشگاهی از جذب و تربیت نخبگان و علاقه‌مندانِ با استعداد، بهره برد. افزون بر این، اتفاق تازه‌ای که در دو دهه اخیر برای ریاضی رُخ داد، نقش آن در توسعه سایر رشته‌ها بود. در نتیجه، افرادی با علاقه‌های متنوع، می‌خواستند که با استفاده از ریاضی، در حوزه‌های خود موفق شوند و از آن میان، مهندسی و علوم‌پایه به دلیل ماهیت‌شان، برای تلفیق با ریاضی و فناوری، مستعدتر بودند. در این راستا، چند مطالعه انجام شد که نشان داد ریاضی در تفکیکِ گرایشی، به اوج پیشرفت خود رسیده و پیشرفت‌های بعدی آن، در مرزهای بین این گرایش‌ها و تلفیقشان با سایر حوزه‌ها اتفاق می‌افتد. این مسئله آن‌قدر اهمیت یافت که طرح‌های کلانی برای آموزش ریاضی و علوم در مدرسه انجام شد تا با جذب و آموزش دانش‌آموزان، بتوان نسبت به ایجاد تحول در دانشگاه اقدام نمود. این در حالی است که همچنان، رشته‌های دانشگاهیِ موجود در این چهار حوزه، بیشتر متأثر از سنت تفکیکِ رشته‌ای هستند و آموزش عالی، فاقد رویکرد روشنی برای تلفیق معنادار بین این چهار حوزه دانشگاهی است.

۳. مسئله پژوهش

در حقیقت کاهش علاقه‌مندیِ دانش‌آموزان به رشته ریاضی فیزیک در دبیرستان، سبب کاهش شدید تعداد ورودی‌ها به رشته ریاضی، در دانشگاه‌های ایران شده است. هنوز پژوهش‌های همه جانبه‌ای که ریشه‌های اصلی این بحران را در ایران شناسایی کند، انجام نشده است و دانشگاه‌ها نیز برنامه‌های آموزشی خود را همگام با پیشرفت‌های علمی جهانِ امروز و در جهت برآوردن نیازهای جامعه، اصلاح نکرده‌اند و نتوانسته‌اند مهارت‌های موردنیاز را برای جذب فرصت‌های شغلیِ زندگی فارغ‌التحصیلان ریاضی فراهم کنند. اگر توجه به این رشته‌ها تغییر ملموسی نیابد، وضعیت علمی کشور دچار آسیب‌های جدی می‌شود و در صورت ادامه روند کاهش گرایش به رشته‌های علوم‌پایه در آینده نزدیک، کشور با کمبود شدید نیروی انسانی کارآمد در صنعت نیز، مواجه خواهد شد، زیرا توسعه صنعتی و فناوری، در گرو یافته‌های پژوهشی در ریاضی و علوم‌پایه است. این بدان معناست که پیشرفت ریاضی و علوم‌پایه، اساس ارتقای علمی و توسعه صنعتی در هر کشوری است و بدین جهت، کشورهای توسعه‌یافته برای حفظ جایگاه خود و ماندن در عرصه رقابت با سایر کشورها، سرمایه‌گذاری‌های بزرگی برای پژوهش‌های آموزش ریاضی و علوم‌پایه کرده‌اند.

در حال حاضر، تغییرات سریع در علوم و فناوری، جوامع صنعتی امروز را با نیازهای جدیدی مواجه کرده است. در دنیایی که زیرساخت‌های آن مبتنی بر فناوری است، حوزه‌های «علوم-فناوری-مهندسی-ریاضی»، بیش از سایر حوزه‌ها و در ارتباط متقابل با یکدیگر، توسعه پیدا می‌کنند و در توسعه اقتصادی، نقش دارند [۵]. نخبگانی که با مهارت‌ها و دانش قرن ۲۱ام و در ارتباط با این حوزه‌ها مجهز شده‌اند، نقش مهمی در شکل‌گیری آینده کشورها در اقتصاد، فناوری و رهبری جهان به عهده می‌گیرند [۴]. بنابراین تربیت نیروی کار ماهر که قابلیت‌های لازم را برای ایفای نقش در بخش‌های مختلف داشته باشد، یکی از دغدغه‌های اصلی جوامع پیش‌تاز و در حال توسعه به شمار می‌رود. بدین جهت، کشورها برای حفظ جایگاه خود و ماندن در عرصه رقابت با سایر کشورها، سرمایه‌گذاری‌های عظیمی را صرف پژوهش‌های آموزش ریاضی و علوم کرده‌اند. کاهش استقبال از رشته‌های علوم‌پایه و ریاضی در دانشگاه‌ها و مدارس، نگرانی شدیدی ایجاد کرده است، زیرا در آینده نزدیک، کشور را با بحران نیروی انسانی در این بخش‌ها مواجه خواهد کرد. هر چند که در حال حاضر، راه‌حل‌های موضعی در سطح کلان سیاست‌گذاری انجام شده و به تصویب «سند چشم‌انداز ۲۰ ساله»، «سند نقشه جامع علمی کشور» در سال ۱۳۹۰ و «سند راهبردی توسعه علوم پایه» [۱] منجر شد. در سطح آموزش عالی نیز طرح‌هایی نظیر ایجاد امکان تحصیل هم‌زمان در دو رشته مختلف و توسعه بین رشته‌ای‌ها در گروه‌های ریاضی بوده است [۲]. با این وجود، مشکلات فارغ‌التحصیلان جویای کار این رشته‌ها، پائین آمدن سطح کیفی این رشته‌ها، نداشتن مهارت‌های موردنیاز بازار کار و بی‌کاری گسترده بین آن‌ها و ناتوانی دانشگاه‌ها در ایجاد مهارت‌های مورد نیاز بازار کار، همچنان باقی است.

این رویکرد، می‌تواند چهار حوزه علوم‌پایه، فناوری، مهندسی و ریاضی را در قالب میان‌رشته‌ای‌های جدید یا درس‌های متنوع و نوآورانه با هدف حل مسئله‌های دنیای واقعی به کمک ریاضی، پیوند بزند. زلمن (۲۰۱۲) تأکید دارد که در تعبیرهایی که از این رویکرد تلفیقی شده، حل مسائل اقتصادی و اجتماعی مورد توجه است [۶].

۴. بحث و نتیجه‌گیری

درکمتر از پنج سال، تعداد دانش‌آموزانِ ورودی به رشته ریاضی– فیزیک در متوسطه دوم، با سرعت بدون توضیحی از حدود ۳۰٪ به حدود ۲۰٪ رسیده است. این روند که از سال ۱۳۹۰ شروع شده، به طور چشمگیری نامتعادل و نامناسب است و در حال دگرگون کردنِ آموزش متوسطه نظری در ایران است [۳]. این مشکل در دوران همه‌گیری کووید–۱۹ و غلبه آموزش مجازی بر آموزش حضوری، بالقوه می‌تواند شروع بحران‌های بازهم ناباورانه‌تری برای رشته‌های ریاضی دانشگاهی باشد، زیرا نگاه سنتی و تک‌ساحتی به رشته ریاضی، پاسخگوی ذهن‌های خلاق و نقاد و کنجکاو دانشجویان نیست. ماهیت پیچیده و انتزاعیِ ریاضی در دانشگاه، با دلایل ورود دانشجویان به این رشته جز در موارد خاص، همسو نیست. این در حالی است که دانشجویان، مهارت‌های مورد نیاز بازار کار را کسب نمی‌کنند، آینده شغلی مبهمی دارند و به جز تعداد اندکی نخبه که توانایی و استعداد دارند و عاشقانه زندگی خود را وقف ریاضی می‌کنند، بسیاری از دانش‌آموختگان این رشته، برای خود آینده روشنی نمی‌بینند و با انحصار تربیت معلم ریاضی در دو دانشگاه فرهنگیان و شهید رجایی، امکان ورود به دنیای معلمی را که مورد علاقه خیلی از آن‌هاست، ندارند. در نتیجه و با واقع‌بینی، گروه‌های ریاضی در دانشگاه‌ها، ضروری است که تا بیش از این دیر نشده، گام‌های اساسی بردارند و دست به ابتکارهای جدید بزنند. هدف این مقاله، معرفی رویکردی تلفیقی به چهار حوزه علوم‌پایه، فناوری، مهندسی و ریاضی با محوریت گروه‌های ریاضی، برای ایجاد تحول و توقف روند کاهشیِ ورودی‌ها به رشته ریاضی بود. تأسیس رشته‌های تلفیقی نوآورانه با مشارکت سایر حوزه‌های دانشگاهی، می‌تواند به تربیت نیروهای کارآمد و آینده شغلی امیدبخش برای دانش‌آموختگان رشته‌های ریاضی باشد و نیروی‌کار مورد نیاز کشور را در فضای رقابتیِ اقتصاد جهانی تأمین کند.

مراجع

۱. شورای برنامه‌ریزی علوم‌پایه، سند راهبردی علوم‌پایه، وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری، ۱۳۹۰.

۲. ب. ظهوری زنگنه، سیر تحول دوره کارشناسی ریاضی در دانشگاه‌های ایران با تمرکز بر دانشگاه صنعتی‌شریف، دو فصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی (۱۳۹۴)، سال ۶، شماره ۱۲، ۱۳۴–۹۹.

۳. ز. گویا، کاهش ورودی‌ها به رشته– ریاضی در متوسطه دوم هشداردهنده است، مجله رشد آموزش ریاضی (۱۳۹۶)، شماره ۱۲۸ ،۳–۲، دفتر انتشارات کمک آموزشی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش‌وپرورش.

4. B. Yildirim and S. Sidekli, *STEM applications in mathematics education: The effect of STEM application on different dependent variables*, J. Balt. Sci. Educ. **17** (2018) 200–214.

5. D. Zhou, R. Gomez, N. Wright and M. Rittenbruch, *Australian context*, Int. J. Tech. and Design Educ. 2020.

6. A. Zollman, *Learning for STEM literacy: STEM literacy for learning*, School Sci. Math. **112** (2012) 12–19.

پست الکترونیکی: Mohtasham29@yahoo.com
پست الکترونیکی: z-gooya@sbu.ac.ir

سخنرانی‌ها

جبر

تعمیمی از گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز

رضا بیرانوند*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه لرستان، خرم آباد ، ایران
و احداله فرضی صفرآبادی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه لرستان، خرم آباد ، ایران

چکیده. در این مقاله تعمیمی از گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز را معرفی کرده و به بررسی ویژگی‌های این گراف می‌پردازیم. همچنین ویژگی‌های این گراف با گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز مقایسه می‌شوند.
واژه‌های کلیدی: گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز، گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز قوی، گراف دوبخشی، بعد یکنواخت مدول.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C78, 16D10, 13C13.

۱. پیش‌گفتار

در این مقاله، همه حلقه‌ها جابه‌جایی و یکدار و همه‌ی مدول‌ها یکانی فرض می‌شوند. فرض کنید R یک حلقه و M یک R- مدول باشد. نماد $N \leq M$ را زمانی که N یک زیرمدول M باشد، به‌کار می‌بریم. هم‌چنین ایده‌آل $\{r \in R \mid Mr \subseteq N\}$ را با نماد $(N : M)$ نشان می‌دهیم. یک مدول را تجزیه ناپذیر گوییم هرگاه ناصفر بوده و نتوان آن را به صورت جمع مستقیم دو زیرمدول ناصفرش نوشت. $N \leq M$ را اساسی گوییم هرگاه N با هر زیرمدول ناصفر از M اشتراک ناصفر داشته باشد، در این حالت می‌نویسیم $N \leq_e M$. برای $X \subseteq M$ پوچ‌ساز X در R را با نماد $ann_R(X)$ نشان می‌دهیم، به عبارتی $ann_R(X) = \{r \in R \mid Xr = 0\}$. بعد یکنواخت مدول M را با نماد $u.dimM$ نشان داده و آن را سوپریمم تعداد جمع مستقیم‌ها از زیرمدول‌های M در نظر می‌گیریم. تعریف‌ها و مفاهیم نظریه گراف که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد برگرفته از منبع [۷] است.

قبل از ورود به تعریف گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز اشاره‌ای گذرا به تاریخچه گراف مقسوم‌علیه صفر یک حلقه خواهیم داشت. فرض کنید R یک حلقه باشد. گراف مقسوم‌علیه صفر R یک گراف ساده است که رئوس آن مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر R منهای عضو همانی صفر است و دو رأس x و y را مجاور گوییم هرگاه $xy = 0$ (برای نمونه [۱، ۲] را ببینید). یک ایده‌آل I از حلقه‌ی R را یک ایده‌آل پوچ‌ساز گوییم هرگاه ایده‌آل ناصفری مانند J در R وجود داشته باشد به طوری که $IJ = 0$. هم‌چنین مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های پوچ‌ساز R را با نماد $A(R)$ نشان می‌دهیم. گراف ایده‌آل پوچ‌ساز وابسته به حلقه R که آن را با نماد $AG(R)$ نمایش می‌دهیم گرافی است ساده که مجموعه رئوس آن $A^*(R) := A(R) \setminus \{0\}$ است و دو رأس I و J در آن مجاورند هرگاه $IJ = 0$. در سال‌های اخیر، گراف مقسوم‌علیه صفر و گراف ایده‌آل پوچ‌ساز از حلقه به مدول به چند شکل متفاوت تعمیم داده شده است. برای مثال می‌توان به مراجع [۵، ۸] اشاره کرد. در مرجع [۵] نویسنده‌ها گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز را برای یک مدول M به صورت زیر تعریف کرده‌اند: این گراف که آن را با نماد $AG(M)$ نشان می‌دهیم گرافی است ساده که رئوس آن متشکل از زیرمدول‌های ناصفری مانند N است که زیرمدول ناصفری مانند K وجود داشته باشد به‌طوری‌که $M(N : M)(K : M) = 0$ و دو رأس N و K مجاورند هرگاه $M(N : M)(K : M) = 0$ برای اطلاعات بیشتر مراجع [۴، ۵] را ببینید.

* سخنران

در این مقاله، مفهوم گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز قوی که تعمیمی از دو گراف $AG(R)$ و $AG(M)$ است را ارائه می‌دهیم. برای یک R-مدول M، گراف زیرمدول‌های پوچ‌ساز قوی که آن را با نماد $SAG(M)$ نشان می‌دهیم گرافی است ساده که یک زیرمدول ناصفر $N \leq M$ در آن یک رأس است هرگاه زیرمدول ناصفری مانند K از M وجود داشته باشد به‌طوری‌که $N(K : M) = ۰$ یا $K(N : M) = ۰$. همچنین، دو رأس N و K مجاورند هرگاه $N(K : M) = ۰$ یا $K(N : M) = ۰$. واضح است که اگر $M = R$، آن‌گاه $SAG(M) = AG(R)$ و اگر M یک مدول ضربی باشد، آن‌گاه $SAG(M) = AG(M)$. در این‌جا ارتباط بین خواص جبری M با خواص گرافی $SAG(M)$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای یک گراف G کمر و قطر آن را به ترتیب با نمادهای $gr(G)$ و $diam(G)$ نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم که $SAG(M)$ یک گراف همبند است با قطر کمتر یا مساوی ۳. همچنین اگر $SAG(M)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه کمر گراف کمتر یا مساوی ۴ است. نشان می‌دهیم که برای یک R-مدول ضربی وفادار با تولید متناهی مانند M، $AG(M) = SAG(M) \cong AG(R)$. زمانی M که یک مدول کاهش‌یافته باشد، خواص $SAG(M)$ بررسی می‌شود. برای نمونه ثابت می‌کنیم اگر M یک مدول کاهش‌یافته باشد به طوری که $SAG(M)$ یک گراف دوبخشی باشد که در آن M یک رأس نباشد، آن‌گاه $SAG(M)$ یک گراف دوبخشی کامل است با $diam(SAG(M)) = ۲$.

۲. نتایج اصلی

این بخش به بیان و اثبات نتایج اصلی این مقاله، اختصاص دارد.

لم ۱.۲. اگر دو رأس N و K در گراف $AG(M)$ مجاور باشند، آن‌گاه N و K یا در گراف $SAG(M)$ مجاورند یا زیرمدول ناصفری از $N \cap K$ وجود دارد که به هر دو رأس N و K در $SAG(M)$ متصل است. به ویژه مجموعه رأس‌های گراف $AG(M)$ با مجموعه رأس‌های گراف $SAG(M)$ برابر است.

اثبات. فرض کنید N و K در $SAG(M)$ مجاور نباشند. در این صورت $N \cap K \neq ۰$. چون $M(N : M)(K : M) = ۰$، خواهیم داشت $M(N \cap K : M)(K : M) = ۰$ و $M(N \cap K : M)(N : M) = ۰$. اکنون حالت‌های زیر می‌تواند رخ دهد:
حالت اول: $M(N \cap K : M) = ۰$. در این صورت $N(N \cap K : M) = ۰$ و $K(N \cap K : M) = ۰$. چون بنا به فرض $N \cap K \neq N$ و $N \cap K \neq K$، $N \cap K$ هم به N و هم به K در $SAG(M)$ متصل است.
حالت دوم: $M(N \cap K : M) \in \{N, K\}$. در این صورت $N(K : M) = ۰$ یا $K(N : M) = ۰$ که یک تناقض است. حالت سوم: $M(N \cap K : M) \notin \{۰, N, K\}$. در این صورت $M(N \cap K : M)$ هم به N و هم به K در $SAG(M)$ متصل است. □

قضیه ۲.۲. $SAG(M)$ یک گراف همبند با قطر کمتر یا مساوی ۳ است. هم‌چنین اگر $SAG(M)$ شامل یک دور باشد، آن‌گاه کمر گراف کمتر یا مساوی ۴ است.

یک R-مدول M اول نامیده می‌شود هرگاه برای هر زیرمدول ناصفر N از M داشته باشیم

$$ann_R(M) = ann_R(N)$$

.

گزاره ۳.۲. جملات زیر برای یک R-مدول M معادل‌اند:
(۱) گراف $SAG(M)$ تهی است.
(۲) M یکنواخت است، $ann_R(M)$ یک ایده‌آل رادیکال است و M یک رأس نیست.
(۳) $ann_R(M)$ یک ایده‌آل اول و M یک رأس نیست.
(۴) M یک مدول اول و M یک رأس نیست.

اثبات. (۱) $\Leftarrow$ (۲). فرض کنید $SAG(M)$ تهی باشد. در این صورت برای همه زیرمدول‌های ناصفر N و K از M داریم $N \cap K \neq 0$. این نتیجه می‌دهد که M یک R-مدول یکنواخت است. حال فرض کنید I و J دو ایده‌آل از R باشند به طوری که $IJ \subseteq ann_R(M)$ اما $MI \neq 0$ و $MJ \neq 0$. چون $0 = MIJ \subseteq MI(MJ : M)$، MI و MI بایستی رأس باشند که یک تناقض است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنید N یک رأس در $SAG(M)$ باشد. در این صورت رأسی مانند K وجود دارد که $N(K : M) = 0$ یا $K(N : M) = 0$. اگر $N = K$، آنگاه $N(N : M) = 0$. در غیراین‌صورت $N \neq K$ و چون M یکنواخت است، $N \cap K \neq 0$ و از این‌رو $L(L : M) = 0$ جایی که $L = N \cap K$. بنابراین در هر حالتی یک رأس $L \leq N$ وجود دارد به‌طوری‌که $L(L : M) = 0$. حال $M(L : M)^2 = M(L : M)(L : M) \subseteq L(L : M) = 0$ و چون $ann_R(M)$ رادیکال است، $M(L : M) = 0$. این نتیجه می‌دهد که M یک رأس است که تناقض است.

(۱) $\Leftarrow$ (۳). مشابه اثبات (۱) $\Leftarrow$ (۲) است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنید N یک رأس در $SAG(M)$ باشد. در این صورت رأسی مانند K وجود دارد که $N(K : M) = 0$ یا $K(N : M) = 0$. اگر $N = K$، آنگاه $N(N : M) = 0$ و از این‌رو $M(N : M)(N : M) = 0$. اگر $N \neq K$، آنگاه $M(N : M)(K : M) = 0$. در هر صورت چون $ann_R(M)$ یک ایده‌آل اول است $M(K : M) = 0$ یا $M(N : M) = 0$. و بنابراین M یک رأس است که تناقض است.

(۱) $\Leftarrow$ (۴). فرض کنید $NI = 0$ جایی‌که N یک زیرمدول ناصفر از M و I یک ایده‌آل از R است. اگر $MI \neq 0$ $MI(N : M) = 0$ و از این‌رو N یک رأس است که بنا به (۱) تناقض است. بنابراین $MI = 0$ و در نتیجه M یک R-مدول اول است.

(۴) $\Leftarrow$ (۱). فرض کنید N یک رأس در $SAG(M)$ باشد. در این صورت رأسی مانند K وجود دارد که $N(K : M) = 0$ یا $K(N : M) = 0$. چون M اول است، داریم $M(K : M) = 0$ یا $M(N : M) = 0$. بنابراین M یک رأس است که تناقض است. توجه داریم که اگر $N = K$، آنگاه $N(N : M) = 0$ و دوباره چون M اول است، داریم $M(K : M) = 0$ که یک تناقض است. □

مثال ۴.۲. (۱). گراف $SAG(\mathbb{Q})$ تهی است زمانی که $\mathbb{Q}$ را به عنوان $\mathbb{Q}$-مدول در نظر بگیریم. با این حال $SAG(\mathbb{Q})$ یک گراف کامل است وقتی $\mathbb{Q}$ را به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول در نظر بگیریم، زیرا برای هر $0 \neq H \lneq \mathbb{Q}$، داریم $(H :_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = 0$.

(۲). در $\mathbb{Z}_n$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول هر زیرمدول سره ناصفر یک رأس است. برای دیدن این مطلب قرار می‌دهیم $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t}$ جایی که p_iها اعداد اول متمایز هستند. برای هر زیرمدول سره ناصفر $N = p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}\mathbb{Z}_n$ داریم $N(K : \mathbb{Z}_n) = 0$ جایی‌که $K = p_1^{\gamma_1} \cdots p_t^{\gamma_t}\mathbb{Z}_n$ با $\beta_i + \gamma_i = \alpha_i$، $1 \leq i \leq t$.

(۳). فرض کنید $R = \mathbb{Z}$ و $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ جایی که p یک عدد اول است. برای هر $0 \neq N \lneq M$ داریم $(N : M) = p\mathbb{Z}$ و از این‌رو برای هر زیرمدول ناصفر K از M، $K(N : M) = 0$. بنابراین $SAG(M)$ یک گراف کامل با $p + 2$ رأس است. برای اطلاعات بیشتر مرجع [۹] را ببینید.

درجه یک رأس K در گراف $SAG(M)$ و گراف $AG(M)$ را به ترتیب با $\deg_S(K)$ و $\deg_A(K)$ نشان می‌دهیم. در مثال زیر M را به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول در نظر می‌گیریم.

مثال ۵.۲. (۱). فرض کنید $M = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$، $N_1 = (0) \oplus \mathbb{Z}_4$ و $N_2 = (\overline{1}, \overline{1})\mathbb{Z}$. آنگاه N_1 و N_2 در $AG(M)$ مجاورند اما در $SAG(M)$ مجاور نیستند. بنابراین دو گراف $AG(M)$ و $SAG(M)$ با هم متفاوت‌اند.

(۲). فرض کنید $M = (\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p) \oplus (\oplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}_q)$ و $K = (\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p) \oplus (\oplus_{i=1}^{m-1}\mathbb{Z}_q)$ جایی که p و q اعداد اول متمایز هستند. در این صورت داریم $\deg_A(K) - \deg_S(K) = n(\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p) - 2$. به ویژه اگر $M = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus (\oplus_{i=1}^{m}\mathbb{Z}_q)$ و $K = \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus (\oplus_{i=1}^{m-1}\mathbb{Z}_q)$، آنگاه خواهیم داشت $\deg_A(K) - \deg_S(K) = p + 1$. در این‌جا $n(\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p)$ تعداد زیرمدول‌های $\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{Z}_p$ می‌باشد.

(۳). فرض کنید $M = (\oplus_{i=۱}^{n}\mathbb{Z}_۲) \oplus (\oplus_{i=۱}^{m}\mathbb{Z}_q)$ و $K = (\oplus_{i=۱}^{n}\mathbb{Z}_۲) \oplus (\oplus_{i=۱}^{m-۱}\mathbb{Z}_q)$. دراین‌صورت $\deg_A(K) - \deg_S(K) = ۲^{n+۱} - n - ۳$ خواهیم داشت .

(۴). در $\mathbb{Z}_{۱۶}$ گراف $\mathbb{SAG}(\mathbb{Z}_{۱۶}) = \mathbb{AG}(\mathbb{Z}_{۱۶})$ گراف ستاره $N_۱ - N_۳ - N_۲$ است، جایی‌که $N_۱ = ۲\mathbb{Z}_{۱۶}$، $N_۲ = ۴\mathbb{Z}_{۱۶}$ و $N_۳ = ۸\mathbb{Z}_{۱۶}$.

(۵). فرض کنید $M = (\oplus_{i=۱}^{۲}\mathbb{Z}_۲) \oplus (\oplus_{i=۱}^{۲}\mathbb{Z}_۳)$، $N = \mathbb{Z}_۲ \oplus (\oplus_{i=۱}^{۲}\mathbb{Z}_۳)$ و $K = (\oplus_{i=۱}^{۲}\mathbb{Z}_۲) \oplus \mathbb{Z}_۳$. به وضوح N و K در $AG(M)$ مجاورند اما در $SAG(M)$ مجاور نیستند.

گزاره ۶.۲. حلقه R میدان است اگر و تنها اگر برای هر R-مدول M، گراف $SAG(M)$ تهی باشد یا $SAG(M)$ یک گراف کامل ناتهی باشد.

فرض کنید $M = \oplus_I S_i$ یک R-مدول نیم ساده با تولید متناهی باشد. اگر قراردهیم $M_\lambda = \Sigma_{i\in I_\lambda} S_i$ جایی‌که $I_\lambda \subseteq I$ با شرط $S_i \cong S_j$ برای هر $i, j \in I_\lambda$ ماکزیمال باشد، آنگاه $M = \oplus_\lambda M_\lambda$ و هر M_λ یک مولفه همگن M نامیده می‌شود.

گزاره ۷.۲. فرض کنید M یک R-مدول نیم ساده با تولید متناهی باشد به‌طوری‌که مولفه‌های همگنش ساده بوده و فرض می‌کنیم N, K دو زیرمدول از M باشند. دراین‌صورت N و K مجاورند اگر و تنها اگر $N \cap K = ۰$.

اثبات. یک قسمت اثبات بدیهی است. بنابراین فرض می‌کنیم $M = \oplus_I S_i$ جایی‌که S_i ها زیرمدول‌های ساده غیریکریخت در M باشند و N, K مجاور باشند. فرض می‌کنیم $N \cap K \neq ۰$. بنا به [۳، گزاره ۹.۴]، زیرمجموعه‌های $I_۱$ و $I_۲$ از I وجود دارند به‌طوری‌که $N \cong \oplus_{I_۱} S_i$، $K \cong \oplus_{I_۲} S_i$ و $M/K \cong \oplus_{I\setminus I_۲} S_i$. چون N و K مجاورند، بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $N(K : M) = ۰$. دراین‌صورت $\Pi_{I\setminus I_۲} ann_R(S_i) \subseteq \cap_{I\setminus I_۲} ann_R(S_i) = (K : M) \subseteq ann_R(N) = \cap_{I_۱} ann_R(S_i)$. توجه داریم که برای هر $i \in I$، $ann_R(S_i)$ یک ایده‌آل اول (ماکزیمال) از R است. بنابراین برای هر $j \in I_۱$، $i_j \in I \setminus I_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که $ann_R(S_{i_j}) \subseteq ann_R(S_j)$ و از این‌رو $ann_R(S_{i_j}) = ann_R(S_j)$. این نتیجه می‌دهد که $S_j \cong S_{i_j}$، زیرا برای هر $i \in I$، S_i یک R-مدول ساده است. از طرف دیگر $N \cap K$ شامل یک ساده مانند T است. باز بنا به [۳، گزاره ۹.۴]، $\alpha \in I_۱$ و $\beta \in I_۲$ وجود دارند که $T \cong S_\alpha \cong S_\beta$. چون $\alpha \in I_۱$، $i_\alpha \in I \setminus I_۲$ وجود دارد به‌طوری‌که $S_{i_\alpha} \cong S_\alpha$. بنابراین داریم $S_{i_\alpha} \cong S_\beta$ که یک تناقض است. □

نتیجه ۸.۲. اگر M یک R-مدول نیم ساده با تولید متناهی باشد به‌طوری‌که مولفه‌های همگنش ساده باشند، آنگاه

$$SAG(M) = AG(M).$$

قضیه ۹.۲. اگر M یک R-مدول غیر اول باشد، آنگاه $SAG(M)$ دارای شرط ACC (DCC) روی رأس‌ها است اگر و تنها اگر M نوتری (آرتینی) باشد.

گزاره ۱۰.۲. فرض کنید M یک R-مدول باشد به‌طوری‌که $u.dim(M) \geq ۲$. دراین‌صورت

$$gr(SAG(M)) = ۳ \Longleftrightarrow gr(AG(M)) = ۳.$$

گزاره ۱۱.۲. جملات زیر برقرارند:

(۱) اگر M یک R-مدول اول باشد، آنگاه $SAG(M)$ تهی است یا M یک رأس است. به ویژه $diam(SAG(M)) \leq ۲$.

(۲) اگر M یک R-مدول نیم ساده باشد، آنگاه $SAG(M)$ تهی است یا هر زیرمدول سره ناصفر از M یک رأس است.

(۳) اگر M یک R-مدول نیم ساده اول باشد، آنگاه $SAG(M)$ تهی است یا $SAG(M)$ یک گراف کامل است و M یک رأس است.

(۴) اگر M یک R-مدول نیم ساده همگن غیر ساده باشد، آنگاه $SAG(M)$ یک گراف کامل است یا هر زیرمدول ناصفر از M یک رأس است.

اگر قرار دهیم $R = \mathbb{Z}$ و $M = (\oplus_I \mathbb{Z}_2) \oplus (\oplus_J \mathbb{Z}_3)$ به‌طوری‌که $|I| \geq 2$ و $|J| \geq 2$. آن‌گاه $(\oplus_I \mathbb{Z}_2) \oplus \mathbb{Z}_3$ و $\oplus_I \mathbb{Z}_2$ رأس هستند ولی مجاور نیستند. بنابراین شرط همگن بودن در گزاره بالا قسمت (۴) لازم است. هم‌چنین مثال زیر نشان می‌دهد عکس قسمت (۳) نیز درست نیست.

مثال ۱۲.۲. در $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول چون برای هر زیرمدول H از M، $M \cong M/H$ و $ann_{\mathbb{Z}}(M) = 0$ خواهیم داشت $(H : M) = 0$ و از این‌رو برای هر زیرمدول K از M، $K(H : M) = 0$. بنابراین $SAG(M)$ یک گراف کامل است و M یک رأس است.

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید M یک R- مدول کاهش‌یافته باشد و $M \notin V(SAG(M))$. اگر $SAG(M)$ یک گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه $SAG(M)$ یک گراف دوبخشی کامل است و $u.dimM = 2$.

لم ۱۴.۲. اگر $SAG(M)$ شامل یک دور به طول فرد باشد، آن‌گاه $SAG(M)$ شامل یک مثلث است.

اثبات. با استفاده از استقرا نشان می‌دهیم که برای هر دور به طول $2n+1 \geq 5$ یک دور به طول $2k+1$ وجود دارد که در آن $k < n$. فرض کنید که $N_1 - N_2 - \cdots - N_{2n+1} - N_1$ یک دور به طول $2n+1$ باشد. اگر دو راس N_i و N_j که متوالی نیستند مجاور باشند، آن‌گاه چیزی برای اثبات نمی‌ماند. در غیراین‌صورت قرار می‌دهیم $L = N_1 \cap N_3 \neq 0$. در این‌صورت به سادگی می‌توان دید که برای هر $1 \leq i \leq 2n+1$، $L \neq N_i$ و L هم به N_4 و هم به N_{2n+1} متصل است. بنابراین دور $N_{2n+1} - L - N_4 - N_5 - \cdots - N_{2n+1}$ را داریم که همان دور مورد نظر است. □

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله مراتب سپاس‌گزاری خود را از کمیته برگزاری کنفرانس و داوران محترم بابت ارزیابی مقالات و ارائه نظرات سازنده، اعلام می‌دارند.

مراجع

1. S. Akbari, H. R. Maimani and S. Yassemi, *When a zero-divisor graph is planar or a complete r-partite graph*, J. Algebra, **270** (2003) 169–180.
2. D. F. Anderson, R. Levy and J. Shapiroi, *Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings*, J. Pure Appl. Algebra **180** (2003) 221–241.
3. F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Springer-Verlag, New York, 1992.
4. H. Ansari-Toroghy and Sh. Habibi, *The annihilating-submodule graph of modules over commutative rings II*, Arab. J. Math. **5** (2016) 187–194.
5. H. Ansari-Toroghy and Sh. Habibi, *The Zariski topology-graph of modules over commutative rings*, Comm. Algebra, **42** (2014) 3283–3296.
6. M. Behboodi and Z. Rakeei, *The annihilating-ideal graph of commutative rings I*, J. Algebra Appl. **10** (2011) 727–739.
7. R. Dieste, *Graph Theory*, Electronic Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2005.
8. S. Safaeeyan, E. Momtahan and M. Baziar, *Zero-divisor graphs for modules over integral domains*, J. Algebra Appl. **16** (2017). DOI: 10.1142/S0219498817500876
9. L. Toth, *Subgroups of finite abelian groups having rank via Goursat's lemma*, Tatra Mt. Math. Publ. **59** (2014) 93–103.

پست الکترونیکی: beyranvand.r@lu.ac.ir
پست الکترونیکی: farzi.ah@fs.lu.ac.ir

مطالبی درباره گراف جابجایی رده تزویج گروه‌های متناهی

محمدعلی سلحشور*
گروه ریاضیات، واحد سوادکوه، دانشگاه آزاد اسلامی، سوادکوه، ایران

چکیده. فرض کنید G یک گروه متناهی ناآبلی با مرکز $Z(G)$ است. گراف جابجایی رده تزویج G که آن را با نماد $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم، گرافی ساده می‌باشد که مجموعه رأس‌های آن رده‌های تزویج غیرمرکزی G است. دو رأس متمایز A و B مجاورند، هرگاه دو عنصر $a \in A$ و $b \in B$ یافت شوند به طوری که $ab = ba$. در این مقاله، هدف ما بیان گراف جابجایی رده تزویج گروه‌های پوچ‌توان، CA-گروه‌های متناهی و گروه‌های متناهی ناآبلی G است که در آن $|\frac{G}{Z(G)}| = p^۳$ یا $p^۲$ و p عددی اول می‌باشد.
واژه‌های کلیدی: مرکز گروه، مرکز ساز، رده تزویج، توانا، گراف جابجایی رده تزویج.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 20C15, 20D15, 20D60.

۱. پیش‌گفتار

در پنجاه سال اخیر گراف‌های متنوعی به یک گروه نسبت داده شده است که برخی از آن‌ها همبستگی خوبی بین ساختار گرافی و ساختار گروه نشان داده‌اند. یکی از این گراف‌ها، گراف جابجایی یک گروه است. فرض کنید G یک گروه و X زیرمجموعه‌ای از آن است. گراف جابجایی G روی X را که با نماد $C(G, X)$ نشان می‌دهیم گرافی است با مجموعه رأس‌های X و دو رأس متمایز x و y از X وقتی مجاورند که $xy = yx$. گراف‌های جابجایی برای نخستین بار توسط بروئر و فولر در رابطه با رده‌بندی گروه‌های ساده متناهی مطرح شد [۱]. سال ۲۰۰۹ هرزوگ، لونگوباردی و ماج یک نوع گراف جابجایی به نام گراف جابجایی رده‌های تزویج را معرفی کردند [۲]. اگر G یک گروه باشد، آنگاه گراف جابجایی رده‌های تزویج G را که با نماد $\Gamma(G)$ نشان می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن رده‌های تزویج غیربدیهی G هستند و دو رأس متمایز مانند A و B وقتی مجاورند که دو عنصر $a \in A$ و $b \in B$ یافت شوند به طوری که $ab = ba$. آن‌ها نشان دادند که برای گروه‌های ناآبلی G، گراف Γ تهی است اگر و فقط اگر G با یکی از گروه‌های $S_۳$، $D_۸$ یا $Q_۸$ یکریخت باشد. عرفانیان و همکارانش در [۳] گراف جابجایی گروه را برای حالتی در نظر گرفتند که مجموعه رأس‌ها، رده‌های تزویج غیرمرکزی باشند و به رده‌بندی گروه‌های متناهی پرداختند که گراف جابجایی‌شان فاقد مثلث است.

در سرتاسر این رساله، G یک گروه متناهی است که مرکز آن را با Z نشان می‌دهیم. اگر $x \in G$، آنگاه $C_G(x)$ و x^G به ترتیب نشان‌دهنده مرکزساز و رده تزویج x در G هستند. گروه G را یک p-گروه می‌نامیم هرگاه مرتبه هر عضو غیرهمانی آن توانی از عدد اول p باشد. گروه G را یک CA-گروه گویند، هرگاه مرکزساز هر عنصر غیرمرکزی G، آبلی باشد. فرض کنید n و m دو عددی طبیعی و p یک عدد اول باشد. گروه دووجهی $D_{۲n}$، گروه نیم دووجهی $SD_{۸n}$، گروه دودوری $T_{۴n}$، گروه $U_{(n,m)}$، گروه $V_{۸n}$ و گروه $G(p, m, n)$ با نمایش‌های زیر نشان داده می‌شوند:

$$\begin{aligned}
D_{۲n} &= \langle a, b \mid a^n = b^۲ = ۱, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle,\\
SD_{۸n} &= \langle a, b \mid a^{۴n} = b^۲ = ۱, bab = a^{۲n-۱} \rangle,\\
T_{۴n} &= \langle a, b \mid a^{۲n} = ۱, a^n = b^۲, b^{-۱}ab = a^{-۱} \rangle,\\
U_{(n,m)} &= \langle a, b \mid a^{۲n} = b^m = ۱, a^{-۱}ba = b^{-۱} \rangle,
\end{aligned}$$

* سخنران

$$V_{۸n} = \langle a, b \mid a^{۲n} = b^{۴} = ۱, ba = a^{-۱}b^{-۱}, b^{-۱}a = a^{-۱}b \rangle,$$
$$G(p, m, n) = \langle a, b, c \mid a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = ۱, [a, b] = c, [a, c] = [b, c] = ۱ \rangle.$$

می‌توان دید که گروه‌های فوق به ترتیب از مرتبه‌های $۲n$، $۸n$، $۴n$، $۸n$ ، $۲nm$ و $p^{m+n+۱}$ هستند. قابل ذکر است که در حالت خاص $U_{(n,۳)} = U_{۶n}$.

در ادامه به معرفی دو گروه $G_n(m)$ و $G[n]$ می‌پردازیم. فرض کنید m و n دو عدد صحیح مثبت هستند به طوری که $m \geq ۲$ و $n \geq ۳$. ۲–گروه $G_n(m)$، گروهی است که $a_۱$، ...، a_n و b مولدهای آن بوده و در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{aligned}
&a_۱^۲ = ۱, && a_۲^{۲^m} = ۱, && a_i^۴ = ۱, && (۳ \leq i \leq n),\\
&a_{n-۱}^۲ = b^۲, && [a_i, a_j] = ۱, && (۱ \leq i < j \leq n), &&\\
&[a_۱, b] = ۱, && [a_n, b] = a_۱, && [a_{i-۱}, b] = a_i^۲, && (۳ \leq i \leq n).
\end{aligned}$$

همچنین فرض کنید $n \geq ۳$ و $k = ۲^{n-۱}$. ۲–گروه $G[n]$ گروهی است که دارای چهار مولد x، y، u و z است که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$x^{۲^n} = y^۲ = z^۲ = u^۲ = [x, z] = [x, u] = [u, z] = [y, z] = ۱,\ yxy = x^{k+۱},\ yuy = uz.$$

هدف ما بیان و بررسی گراف جابجایی رده تزویج گروه‌های پوچ‌توان، CA–گروه‌های متناهی و گروه‌های متناهی ناآبلی G است که در آن $\left|\frac{G}{Z(G)}\right|$ برابر با $p^۲$ یا $p^۳$ بوده و p عددی اول می‌باشد. نتایج ارائه شده در این مقاله در رساله دکتری نویسنده گزارش شده‌اند [۴، ۵، ۶].

۲. نتایج اصلی

ابتدا گراف جابجایی رده تزویج گروه‌هایی که در بخش قبل بیان شده است را محاسبه کرده و سپس به بیان قضایای اصلی حاصل از تحقیق و همچنین نتایج به‌دست آمده از آن می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲. گراف جابجایی رده تزویج گروه‌های $D_{۲n}$، $SD_{۸n}$، $T_{۴n}$، $U_{(n,m)}$ و $V_{۸n}$ عبارتند از:

$$\Gamma(D_{۲n}) = \begin{cases} K_{\frac{n-۱}{۲}} \cup K_۱ & ۲ \nmid n \\ K_{\frac{n}{۲}-۱} \cup K_۲ & ۲ \mid n \text{ و } ۲ \nmid \frac{n}{۲} \\ K_{\frac{n}{۲}-۱} \cup ۲K_۱ & ۲ \mid \frac{n}{۲} \end{cases},$$

$$\Gamma(T_{۴n}) = \begin{cases} K_{n-۱} \cup ۲K_۱ & n \text{ زوج} \\ K_{n-۱} \cup K_۲ & n \text{ فرد} \end{cases}, \qquad \Gamma(U_{(n,m)}) = \begin{cases} ۲K_n \cup K_{n(\frac{m}{۲}-۱)} & m \text{ زوج} \\ K_n \cup K_{n(\frac{m-۱}{۲})} & m \text{ فرد} \end{cases},$$

$$\Gamma(V_{۸n}) = \begin{cases} K_{۲n-۲} \cup ۲K_۲ & n \text{ زوج} \\ K_{۲n-۱} \cup ۲K_۱ & n \text{ فرد} \end{cases}, \qquad \Gamma(SD_{۸n}) = \begin{cases} K_{۲n-۱} \cup ۲K_۱ & n \text{ زوج} \\ K_{۲n-۲} \cup K_۴ & n \text{ فرد} \end{cases}.$$

قضیه ۲.۲. فرض کنید p عدد اول و m, n دو عدد طبیعی هستند. در این صورت

$$\Gamma(G(p, m, n)) = K_{p^{m-۱}(p^n - p^{n-۱})} \cup K_{p^{n-۱}(p^m - p^{m-۱})} \cup (p^n - p^{n-۱})K_{p^{m-n}(p^n - p^{n-۱})}.$$

قضیه ۳.۲. فرض کنید m و n دو عدد طبیعی هستند که $m \geq ۲$ و $n \geq ۳$. در این صورت

$$\Gamma(G_n(m)) = ۲^{n-۱}K_{۲^{m-۱}} \cup K_{(۲^{n-۱}-۱)۲^{n+m-۲}}.$$

قضیه ۴.۲. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت است به طوری که $n \geq ۳$. اگر $k = ۲^{n-۱}$ و $G = G[n]$، آن‌گاه

$$\Gamma(G) = K_{۳k} \cup ۲K_{\frac{k}{۲}} \cup kK_۱.$$

فرض کنید G و H دو گروه ناآبلی هستند. گراف‌های $\Delta_1(G,H)$ و $\Delta_2(G,H)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
V(\Delta_1(G,H)) &= \left\{(x,y)^{G\times H} \mid x^G \in V(\Gamma(G)) \text{ و } y \in Z(H)\right\},\\
E(\Delta_1(G,H)) &= \left\{(x,y)^{G\times H}(a,b)^{G\times H} \mid x=a \text{ یا } x^Ga^G \in E(\Gamma(G))\right\},\\
V(\Delta_2(G,H)) &= \left\{(x,y)^{G\times H} \mid y^H \in V(\Gamma(H)) \text{ و } x \in Z(G)\right\},\\
E(\Delta_2(G,H)) &= \left\{(x,y)^{G\times H}(a,b)^{G\times H} \mid y=b \text{ یا } y^Hb^H \in E(\Gamma(H))\right\}.
\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\Delta_1 = \Delta_1(G,H)$، $\Delta_2 = \Delta_2(G,H)$ و $\Delta_3 = \Delta_3(G,H) = \Gamma(G) \boxtimes \Gamma(H)$. قابل ذکر است که $\boxtimes$ همان حاصل‌ضرب قوی بین دو گراف می‌باشد. به عبارت دیگر، حاصل‌ضرب قوی در واقع اجتماع دو حاصل‌ضرب دکارتی و تانسوری است. همچنین دو مجموعه A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y)^{G\times H}(a,b)^{G\times H} \;\middle|\; \begin{array}{c}(x,y)^{G\times H}\in V(\Delta_3),\ (a,b)^{G\times H}\in V(\Delta_1),\\ \Big(x=a \ \vee\ x^Ga^G \in E(\Gamma(G))\Big)\end{array}\right\},\\
B &= \left\{(x,y)^{G\times H}(a,b)^{G\times H} \;\middle|\; \begin{array}{c}(x,y)^{G\times H}\in V(\Delta_3),\ (a,b)^{G\times H}\in V(\Delta_2),\\ \Big(y=b \ \vee\ y^Hb^H \in E(\Gamma(H))\Big)\end{array}\right\}.
\end{aligned}$$

حال عمگر $\uplus$ را روی سه گراف معرفی شده به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
V(\Delta_3 \uplus (\Delta_1+\Delta_2)) &= V(\Delta_3)\cup V(\Delta_1+\Delta_2),\\
E(\Delta_3 \uplus (\Delta_1+\Delta_2)) &= E(\Delta_3)\cup E(\Delta_1+\Delta_2)\cup A\cup B.
\end{aligned}$$

قضیه زیر ساختار گراف جابجایی رده تزویج حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه ناآبلی را نشان می‌دهد.

قضیه ۵.۲. فرض کنید G و H دو گروه ناآبلی هستند. دراین‌صورت گراف جابجایی رده تزویج $G\times H$ برابر است با:

$$\Gamma(G\times H) = \Delta_3(G,H) \uplus [\Delta_1(G,H)+\Delta_2(G,H)].$$

نتیجه ۶.۲. اگر G و H دو $p-$گروه باشند که $\Gamma(G)=\bigcup_{i\in I} m_iK_{n_i}$ و $\Gamma(H)=\bigcup_{j\in J} m'_jK_{n'_j}$، آن‌گاه

$$\Gamma(G\times H) = \left(\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} m_im'_jK_{n_in'_j}\right) \uplus \left(\bigcup_{i\in I} m_iK_{n_i|Z(H)|} + \bigcup_{j\in J} m'_jK_{n'_j|Z(G)|}\right).$$

نتیجه ۷.۲. اگر H یک گروه آبلی و G یک $p-$گروه باشد به طوری که $\Gamma(G)=\bigcup_{i\in I} m_iK_{n_i}$ آن‌گاه

$$\Gamma(G\times H) = \bigcup_{i\in I} m_iK_{n_i|H|}.$$

در قضیه زیر گراف جابجایی رده تزویج تمام گروه‌های ناآبلی مانند G با مرکز Z را محاسبه می‌کنیم که در آن $|\frac{G}{Z}| = p^2$.

قضیه ۸.۲. فرض کنید G گروهی ناآبلی با مرکز Z است به طوری که $\left|\frac{G}{Z}\right| = p^2$ و p عددی اول است. در این صورت

$$\Gamma(G) = (p+1)K_n,$$

که در آن $n = \frac{(p-1)|Z|}{p}$ و $p \mid |Z|$.

قضیه زیر گراف جابجایی رده تزویج تمام گروه‌های ناآبلی مانند G با مرکز Z را نشان می‌دهد به طوری که $|\frac{G}{Z}| = p^3$.

قضیه ۹.۲. فرض کنید p عدد اول و G گروهی ناآبلی با مرکز Z است به طوری که $|\frac{G}{Z}| = p^3$، در این صورت گراف جابجایی رده تزویج G یکی از حالت‌های زیر است.
الف) اگر $\frac{G}{Z}$ آبلی باشد، آن‌گاه

$$\Gamma(G) = K_m \cup p^2 K_n \quad \text{یا} \quad (p^2+p+1)K_n,$$

که در آن $m = \frac{(p^2-1)|Z|}{p}$ و $n = \frac{(p-1)|Z|}{p^2}$.
ب) اگر $\frac{G}{Z}$ ناآبلی باشد، آن‌گاه

$$\Gamma(G) = K_m \cup kpK_{n_1} \cup (p-k)K_{n_2} \text{ یا } (kp+1)K_{n_1} \cup (p+1-k)K_{n_2} \text{ یا } (p^2+p+1)K_{n_1}$$

که در آن $m = \frac{(p^2-1)|Z|}{p}$، $n_1 = \frac{(p-1)|Z|}{p^2}$، $n_2 = \frac{(p-1)|Z|}{p}$ و $0 \leq k \leq p$.

در ادامه گراف جابجایی رده تزویج $p-$گروه‌ها و گروه‌های پوچ‌توان را بررسی می‌کنیم.

نتیجه ۱۰.۲. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^n و $|Z(G)| = p^{n-2}$ که در آن p عددی اول و $n \geq 3$. در این صورت گراف جابجایی رده تزویج G برابر است با:

$$\Gamma(G) = (p+1)K_{p^{n-2}(p-1)}.$$

نتیجه ۱۱.۲. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^n و $|Z(G)| = p^{n-3}$ که در آن p عدد اول و $n \geq 4$. دراین‌صورت گراف جابجایی رده تزویج G برابر با یکی از حالت‌های زیر است:
الف) اگر $\frac{G}{Z}$ آبلی باشد، آن‌گاه

$$K_{p^{n-4}(p^2-1)} \cup p^2 K_{p^{n-5}(p-1)} \quad \text{یا} \quad (p^2+p+1)K_{p^{n-5}(p-1)}.$$

ب) اگر $\frac{G}{Z}$ ناآبلی باشد، آن‌گاه $K_{p^{n-4}(p^2-1)} \cup kpK_{p^{n-5}(p-1)} \cup (p-k)K_{p^{n-4}(p-1)}$ یا

$$(kp+1)K_{p^{n-5}(p-1)} \cup (p+1-k)K_{p^{n-4}(p-1)} \quad \text{یا} \quad (p^2+p+1)K_{p^{n-5}(p-1)},$$

که در آن $0 \leq k \leq p$.

قضیه ۱۲.۲. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^3 است که در آن p عددی اول است. در این صورت $\Gamma(G) = (p+1)K_{p-1}$.

اثبات. چون G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^3 است، پس $|Z(G)| = p$. بنابراین طبق نتیجه (۱۰.۲) حکم ثابت است. □

قضیه ۱۳.۲. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^4 است که در آن p عددی اول است. در این صورت

$$\Gamma(G) = K_{(p^2-1)} \cup pK_{(p-1)} \quad \text{یا} \quad (p+1)K_{p(p-1)}.$$

اثبات. چون G یک p-گروه ناآبلی از مرتبه p^4 است، پس $|Z(G)| = p$ یا $|Z(G)| = p^2$. اگر $|Z(G)| = p^2$، آن‌گاه بنابر نتیجه (۱۰.۲) و با قرار دادن $n = 4$، $\Gamma(G) = (p+1)K_{p(p-1)}$. اما اگر $|Z(G)| = p$، آن‌گاه چون $n = 4$، لذا بنابر نتیجه (۱۱.۲) تنها حالتی که ممکن است اتفاق بیفتد وقتی است که $k = 0$. بنابراین $\Gamma(G) = K_{(p^2-1)} \cup pK_{(p-1)}$ و حکم ثابت است. □

قضیه زیر، ساختار گراف جابجایی رده‌های تزویج تمامی گروه‌های پوچ‌توان را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۴.۲. فرض کنید G گروهی پوچ‌توان از مرتبه n است به طوری که در تجزیه n به عوامل اول شامل هیچ توانی از مرتبه p^5 نباشد. دراین‌صورت گراف جابجایی رده‌های تزویج متمایز G قابل نمایش به‌صورت دنباله‌ای از گراف‌های کامل ساخته شده به‌وسیله اعمال اجتماع، مجموع، حاصل‌ضرب قوی و عملگر $\uplus$ است.

اثبات. می‌دانیم که هر گروه پوچ‌توان حاصل‌ضرب مستقیم $p-$سیلو زیرگروه‌های خودش است. پس بنابر قضیه‌های (۱۲.۲)، (۱۳.۲)، (۶.۲) و (۷.۲) حکم ثابت است. □

فرض کنید G یک گروه باشد. قرار می‌دهیم $Cent(G) = \{C_G(x) \mid x \in G\}$. رابطه هم‌ارزی $\sim$ را روی مجموعه $Cent(G) \setminus \{G\}$ به این‌صورت تعریف می‌کنیم که $C_G(x) \sim C_G(y)$ اگر و تنها اگر $C_G(x)$ و $C_G(y)$ در G مزدوج باشند. واضح است که رابطه $\sim$، مجموعه $Cent(G) \setminus \{G\}$ را افراز می‌کند. در نظر می‌گیریم:

$$A(G) = \frac{Cent(G) \setminus \{G\}}{\sim} = \left\{ \frac{C_G(x)}{\sim} \mid C_G(x) \in Cent(G) \setminus \{G\} \right\} <$$

که در آن $\frac{C_G(x)}{\sim} = \left\{ g^{-1} C_G(x) g \mid g \in G \right\}$. در قضیه آخر ساختار گراف جابجایی رده تزویج تمام CA-گروه‌های متناهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که گروهی را CA-گروه می‌نامیم، هرگاه مرکزساز هر عنصر غیرمرکزی آن آبلی باشد.

قضیه ۱۵.۲. فرض کنید G، CA-گروه است. دراین‌صورت

$$\Gamma(G) = \bigcup_{\frac{C_G(x)}{\sim} \in A(G)} K_{n_{\frac{C_G(x)}{\sim}}},$$

که در آن $n_{\frac{C_G(x)}{\sim}} = \frac{|C_G(x)|-|Z(G)|}{[N_G(C_G(x)):C_G(x)]}$.

مراجع

1. R. Brauer and K. A. Fowler, *On groups of even order*, Ann. of Math. **62** (3) (1955) 565–583.
2. M. Herzog, P. Longobardi and M. Maj, *On a commuting graph on conjugacy classes of groups*, Comm. Algebra **37** (10) (2009) 3369–3387.
3. A. Mohammadian, A. Erfanian, M. Farrokhi D. G. and B. Wilkens, *Triangle-free commuting conjugacy class graphs*, J. Group Theory **19** (6) (2016) 1049–1061.
4. M. A. Salahshour, *Commuting Graphs of a Finite Group*, Ph.D. Thesis, Kashan University, 2019.
5. M. A. Salahshour and A. R. Ashrafi, *Commuting conjugacy class graphs of finite groups*, Algebraic Struct. Appl. **7** (2) (2020) 135–145.
6. M. A. Salahshour and A. R. Ashrafi, *Commuting conjugacy class graph of finite CA-groups*, Khayyam J. Math. **6** (1) (2020) 108–118.

پست الکترونیکی: salahshour@iausk.ac.ir

حدس هوپرت و تعمیم آن به گروه‌های تقریباً ساده

فرخ شیرژیان*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
و علی ایرانمنش
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. حدس هوپرت بیان می‌کند که گروه‌های ساده ناآبلی به‌وسیله مجموعه درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر خود، با تقریب ضرب مستقیم در یک گروه آبلی، به‌طور یکتا مشخص می‌شوند. در این مقاله، ابتدا ضمن بررسی این حدس برای رده جدیدی از گروه‌های ساده خطی با بعد کوچک، تعمیم آن را به گروه‌های تقریباً ساده بررسی می‌نمائیم. سپس، به بررسی عمل گروه خودریختی‌ها بر سرشت‌های تحویل‌ناپذیر می‌پردازیم که یکی از چالش‌های اساسی در بررسی این حدس برای گروه‌های از بعد به بزرگی دلخواه می‌باشد.
واژه‌های کلیدی: گروه‌های تقریباً ساده، گروه‌های نوع لی، حدس هوپرت، درجه سرشت.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 20C15.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید G یک گروه متناهی و $\mathrm{cd}(G) = \{\chi(1) : \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}$ مجموعه تمام درجه سرشت‌های (مختلط) تحویل‌ناپذیر گروه G باشد.

یکی از مسائل بنیادی در نظریه نمایش گروه‌های متناهی، بررسی امکان شناسایی ساختار یا خواص یک گروه از طریق مجموعه درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر وابسته به آن گروه می‌باشد. اگرچه به‌سادگی مشخص می‌گردد که یک گروه متناهی، در حالت کلی، لزوماً به‌وسیله مجموعه درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر خود مشخص نمی‌گردد. اما برای گروه‌های نزدیک به ساده شرایط متفاوت به نظر می‌رسد. در واقع در سال ۲۰۰۰ هوپرت حدس زیر را در مورد ارتباط ساختار یک گروه ساده ناآبلی با مجموعه درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر خود بیان می‌دارد:

حدس هوپرت: فرض کنیم S یک گروه ساده ناآبلی و G یک گروه متناهی باشد که $cd(G) = cd(S)$. در این‌صورت گروه آبلی A چنان موجود است که $G \cong S \times A$.

اگرچه حدس هوپرت تاکنون به‌صورت مورد به مورد برای رده‌های مختلفی از گروه‌های ساده متناهی اثبات گردیده است، اما در حالت کلی هنوز مسئله‌ای باز است و تنها برای تعداد کمی خانواده نامتناهی از گروه‌های ساده از نوع لی اثبات گردیده است (تا بعد حداکثر چهار). در این مقاله، ضمن مرور پنج گام اساسی اثبات این حدس برای گروه ساده $PSL_5(q)$، به بررسی تعمیم‌های اخیر حدس مذکور به گروه‌های تقریباً ساده پرداخته و در این حین، یکی از نتایج اخیر خود پیرامون تأیید گام پایانی اثبات حدس برای گروه‌های از رتبه به بزرگی دلخواه را ارائه خواهیم نمود.

۲. نتایج اصلی

در این بخش، نتایج اصلی خود را بیان خواهیم نمود. در ابتدا با مروری اجمالی گام‌های انجام شده جهت اثبات حدس هوپرت برای گروه ساده $S = PSL_5(q)$ را بیان می‌داریم [۲]. بنابراین فرض کنیم G گروهی متناهی باشد که $cd(G) = cd(PSL_5(q))$. در این‌صورت خواهیم داشت:

۱- G گروهی شبه‌تام است (درواقع $G' = G''$).

۲- اگر G'/M یک عامل اصلی ناآبلی از گروه G/M باشد آن‌گاه $G'/M \cong PSL_5(q)$.

* سخنران

۳- با فرض این‌که تمام سرشت‌های خطی M تحت عمل G' پایا هستند خواهیم داشت $M = ۱$.
۴- گروه خارج‌قسمتی $G/C_G(G')$ با $PSL_۵(q)$ یکریخت است.

در ادامه علاقه‌مند هستیم ارتباط گروه‌های تقریباً ساده از نوع لی را با مجموعه درجه سرشت‌های تحویل‌ناپذیر آن‌ها بررسی نمائیم. در این راستا، حدس زیر در [۱] مطرح گردید.

حدس ۱.۲. [۱، حدس ۱.۱] فرض کنیم G یک گروه متناهی و H یک گروه تقریباً ساده از نوع لی باشد که $cd(G) = cd(H)$. در این‌صورت زیرگروه نرمال و آبلی A از G چنان موجود است که $G/A \cong H$.

به‌وضوح حدس فوق تعمیمی از حدس هوپرت برای گروه‌های تقریباً ساده از نوع لی ارائه می‌دهد. در ادامه برخی تمایزات این حدس را با حدس هوپرت بیان می کنیم.

در ابتدا، در [۱] با ساخت رده نامتناهی از مثال‌ها، نشان دادیم که گروه G در حدس ۱.۲ لزوماً به‌صورت ضرب مستقیم H و A نیست و بنابراین نتیجه حدس بهینه است. همچنین توجه کنید که اگر H یک گروه ساده ناآبلی باشد و A یک گروه آبلی، آنگاه $cd(H \times A) = cd(H)$ و بنابراین حدس هوپرت یک حدس اگر و تنها اگر است. اما در [۱]، با ساخت مثال نشان دادیم که عکس حدس ۱.۲ برای گروه‌های تقریباً ساده لزوماً برقرار نمی‌باشد. همچنین، این حدس را برای گروه‌های تقریباً ساده $\mathrm{PGL}_۳(q)$ و $\mathrm{PGU}_۳(q^۲)$ اثبات نمودیم.

قضیه ۲.۲. [۱، قضیه ۱.۴] فرض کنیم q توانی از یک عدد اول و G گروهی متناهی باشد به‌طوری که $cd(G) = cd(\mathrm{PGL}_۳(q))$. در این‌صورت زیرگروه نرمال آبلی A از G موجود است که $G/A \cong \mathrm{PGL}_۳(q)$.

قضیه ۳.۲. [۱، قضیه ۱.۵] فرض کنیم q توانی از یک عدد اول و G گروهی متناهی باشد به‌طوری که $cd(G) = cd(\mathrm{PGU}_۳(q^۲))$. در این‌صورت زیرگروه نرمال آبلی $A \leq G$ موجود است که $G/A \cong \mathrm{PGU}_۳(q^۲)$.

یکی از مهم‌ترین ابزارها برای تأیید گام پایانی اثبات حدس هوپرت و نیز تعمیم آن به گروه‌های تقریباً ساده، تحلیل و مقایسه درجات سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های تقریباً ساده می‌باشد. در گزاره زیر ابزاری را فراهم می‌آوریم تا به کمک آن بتوان عمل خودریختی‌ها بر سرشت‌های تحویل‌ناپذیر گروه‌های خطی خاص تصویری از ابعاد به بزرگی دلخواه را تحلیل نمود.

گزاره ۴.۲. فرض کنیم $G = SL_n(q)$ و $G^* = PGL_n(q)$ باشد. در این‌صورت به ازای هر عنصر نیم‌ساده $s \in G^*$، هر سرشت تک‌توان λ از $C^\circ_{G^*}(s)$ و هر $z \in H^۱(F, Z(\mathbf{G}))$ خواهیم داشت

$$^{\sigma}\chi_{s,\lambda,\omega^{\circ}_{s,\lambda}(z)} = \chi_{\sigma^{*-۱}(s),\sigma^*(\lambda),\omega^{\circ}_{s,\lambda}(\sigma(z))},$$

که در آن σ یک خودریختی جابجاشونده با نگاشت فروبنیوس F و σ^* دوگان آن می‌باشد.

مراجع

1. F. Shirjian and A. Iranmanesh, *Extending Huppert's conjecture to almost simple groups of Lie type*, Illinois J. Math. **64** (1) (2020) 49–69.
2. F. Shirjian and A. Iranmanesh, *Huppert's conjecture for projective special linear groups $PSL_5(q)$*, in-prepration.

پست الکترونیکی: farrokh.shirjian@modares.ac.ir
پست الکترونیکی: iranmanesh@modares.ac.ir

نتایجی از ۰-ایده‌ال‌های توسعه یافته در PMV-جبرها

محمد صامت
دانشکده ریاضی و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، بم، ایران
و فرشته فروزش*
دانشکده ریاضی و محاسبات نرم، مجتمع آموزش عالی بم، بم، ایران

چکیده. در این مقاله، ابتدا ۰-ایده‌ال‌های توسعه یافته در PMV-جبرها را معرفی کرده و به بررسی پاره‌ای از ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. نشان می‌دهیم کلاس $S(B)$ متشکل از ۰-ایده‌ال‌های پایدار نسبت به $B \subseteq A$ که $B \in ۱$، تشکیل یک مشبکه می‌دهد.
واژه‌های کلیدی: PMV-جبر، ۰-ایده‌ال، ۰-ایده‌ال توسعه یافته، ایده‌ال پایدار.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 06D35, 06B10.

۱. مقدمه و پیش‌نیازها

اولین بار MV-جبرها، بوسیله چانگ در سال ۱۹۵۸ معرفی شدند [۱]. در واقع آن‌ها یک ساختار جبری چند ارزشی لوکاسویچ هستند. PMV-جبرها توسط درانسکی و دی نولا اولین بار معرفی شدند [۲]. آن‌ها عمل $(.)$ و جمع جزئی $(+)$ برای MV-جبرها را تعریف کردند به‌قسمی‌که $(.)$ از چپ و راست نسبت به این جمع جزئی شرکت‌پذیر باشد و آن را PMV-جبر نامیدند. در این مقاله، ۰-ایده‌ال‌ها و برخی از خواص آن‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در ادامه، ۰-ایده‌ال‌های توسعه یافته در PMV-جبرها را معرفی می‌کنیم و به بررسی برخی از خواص آن‌ها می‌پردازیم. در پایان نشان می‌دهیم کلاس $S(B)$ متشکل از ۰-ایده‌ال‌های پایدار نسبت به $B \subseteq A$ که $B \in ۱$، تشکیل یک مشبکه می‌دهد.

تعریف ۱.۱. [۱] ساختار جبری $M = (M, \oplus, ۰)$ که به‌ترتیب عمل‌های تعریف شده روی آن از نوع $(۲, ۱, ۰)$ باشند را یک MV-جبر می‌نامیم. اگر برای هر $a, b \in M$ در شرایط زیر صدق کند:
۱. $(M, \oplus, ۰)$ یک تکواره جابجایی باشد.
۲. $(a^*)^* = a$.
۳. $a^* \oplus a = ۰^*$.
۴. $(a^* \oplus b)^* \oplus b = (b^* \oplus a)^* \oplus a$.

تعریف ۲.۱. $(A, \oplus, ., ۰)$ یک PMV-جبر می‌نامیم، هرگاه $(A, \oplus, ., ۰)$ یک MV-جبر و $.$ عمل دوتایی شرکت‌پذیر روی A باشد به‌طوری‌که در خاصیت زیر صدق می‌کند:
اگر $x.z+y.z$ و $x.z+z.y$ و $z.x+z.y$، تعریف شود آن‌گاه $(x+y).z = x.z+y.z,\ z.(x+y) = z.x+z.y$ که $+$ روی MV-جبر A به‌صورت زیر است:
برای هر $x, y \in A$، $x + y$ تعریف می‌شود اگر و تنها اگر $x \leq y^*$ و در این حالت $x + y := x \oplus y$. فرض کنید A یک PMV-جبر باشد، یک عضو $e \in A$ را یکه برای ضرب گویند، اگر برای هر $x \in A$، $e.x = x.e$. PMV-جبر A را یکانی گویند اگر یک عضو یکه برای ضرب داشته باشد.
فرض کنید h همریختی MV-جبری باشد. اگر $h(a.b) = h(a).h(b)$ باشد، آن‌گاه h را همریختی PMV-جبری می‌نامیم.

تعریف ۳.۱. [۲] ایده‌ال I از PMV-جبر A را ۰-ایده‌ال می‌نامیم، به‌طوری‌که اگر $a \in I$ و $b \in A$ باشد، $a, b \in I$. مجموعه ۰-ایده‌ال‌های همه A را با $Id_p(A)$ نمایش می‌دهیم.

* سخنران

تعریف ۴.۱. [۳] فرض P کنید یک $\circ$-ایده‌ال از PMV-جبر باشد. در این‌صورت P را یک $\circ$-ایده‌ال اول می‌نامیم، اگر
۱. $P \neq A$.
۲. اگر $a \cdot b \in P$ آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$ برای هر $a, b \in A$.

لم ۵.۱. [۲] اگر A یک PMV-جبر باشد، آنگاه برای هر $a, b \in A$ داریم:
۱. $a.\circ = \circ = \circ.a$.
۲. اگر $a \leq b$ آنگاه برای هر $c \in A$، $a.c \leq b.c$ و $c.a \leq c.b$.
۳. $a.(x \oplus y) \leq a.x \oplus a.y$.

۲. نتایجی از $\circ$-ایده‌ال‌های توسعه یافته در PMV-جبرها

فرض کنید A یک PMV-جبر باشد.

تعریف ۱.۲. فرض کنید I یک $\circ$-ایده‌ال از A باشد و $B \subseteq A$ باشد . $\circ$-ایده‌ال توسعه یافته I مربوط به B را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E_I(B) = \{x \in A \mid x.b \in I,\ \forall b \in B\}.$$

قرارداد: $E_I(\{a\})$ را به‌صورت $E_I(a)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲.۲. فرض کنید $A = \{\circ, ۱, ۲, ۳\}$ و عمل‌های "$\oplus$" و "$.$" روی A به‌صورت زیر تعریف شوند:

$\oplus$	$\circ$	۱	۲	۳
$\circ$	$\circ$	۱	۲	۳
۱	۱	۱	۳	۳
۲	۲	۳	۲	۳
۳	۳	۳	۳	۳

$.$	$\circ$	۱	۲	۳
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
۱	$\circ$	۱	$\circ$	۱
۲	۲	$\circ$	$\circ$	۲
۳	۲	۱	$\circ$	۳

$*$	$\circ$	۱	۲	۳
	۳	۲	۱	$\circ$

به‌سادگی می‌توان نشان داد $I = \{\circ, ۱\}$ یک $\circ$-ایده‌ال از A است و $E_I(\{۱\}) = \{۱, ۳, \circ, ۲\}$ و $E_I(\{۲, ۳\}) = \{\circ, ۱\}$.

قضیه ۳.۲. فرض کنید I یک $\circ$-ایده‌ال از A باشد و $B \subseteq A$ باشد. آنگاه $E_I(B)$ یک $\circ$-ایده‌ال از A است و اگر A یک PMV-جبریکانی باشد، آنگاه $I \subseteq E_I(B)$.

اثبات. داریم $\circ.b = \circ \in I$، برای هر $b \in B$، از این رو $\circ \in E_I(B)$. فرض کنید $x, y \in E_I(B)$. لذا خواهیم داشت $y.b \in B$ و $x.b \in B$، برای هر $b \in B$. بنا به لم ۵.۱ قسمت (۳)، به‌دست می‌آوریم:
$b.(x \oplus y) \leq b.x \oplus b.y \in I$. چون I یک $\circ$-ایده‌ال است، نتیجه می‌گیریم $b.(x \oplus b) \in I$، برای هر $b \in B$. در نتیجه $x \oplus b \in E_I(B)$.
حال فرض کنید $x \leq y$ و $y \in E_I(B)$. به وضوح $x \in E_I(B)$ زیرا بنا به لم ۵.۱ قسمت (۲)، برای هر $b \in B$ داریم $x.b \leq y.b$ و چون $y.b \in A$، برای هر $b \in B$، لذا $x.b \in I$ برای هر $b \in B$. فرض کنید $r \in A$ و $a \in E_I(B)$. نشان می‌دهیم $r.a \in e_I(B)$ و $a.r$. چون $a \in e_I(B)$ ، لذا $a, b \in I$، برای هر $b \in B$ و چون I، $\circ$-ایده‌ال و $r.(a.b) = r.(a.b) \in I$، برای هر $b \in B$ بنابراین $r.a \in E_I(B)$. به همین‌ترتیب ثابت می‌شود $a.r \in E_I(B)$. بنابراین$E_I(B)$ یک $\circ$-ایده‌ال از A می‌باشد. همچنین، فرض کنید $x \in I$. چون $x.۱ = x \leq x.b$، برای هر $b \in B$ و I یک $\circ$-ایده‌ال است. به‌دست می‌آوریم $x.b \in I$، برای هر $b \in B$. در نتیجه $x \in E_I(B)$ یعنی $I \subseteq E_I(B)$. □

تعریف ۴.۲. یک $\circ$-ایده‌ال I را نسبت به $B \subseteq A$ پایدار گوییم اگر $I = E_I(B)$.

مثال ۵.۲. مثال ۲.۲ را در نظر بگیرید. اگر $I = \{۰, ۱\}$ باشد، در این‌صورت داریم

$$E_I(\{۲, ۳\}) = \{۰, ۱\} = I,$$

و لذا $I = \{۰, ۱\}$ نسبت به $B = \{۲, ۳\}$ پایدار است.

قضیه ۶.۲. فرض کنید I, J و ۰-ایده‌ال‌های PMV-جبر یکانی A باشند و $B \subseteq A$. در این‌صورت عبارات زیر برقرارند:
(۱) $E_I(B) = A$ اگر و تنها اگر $B \subseteq I$.
(۲) اگر $a \in A$ دارای مرتبه متناهی و $a \in E_I(B)$ باشد، آنگاه $E_I(B) = A$.
(۳) اگر $I \subseteq J$، آنگاه $E_I(B) \subseteq E_J(B)$.
(۴) اگر $a, b \in E_I(B)$، آنگاه $a \oplus b \in E_I(B)$.
(۵) $B \subseteq E_I(E_I(B))$.
(۶) $E_I(B) \to E_J(B) \subseteq I \to E_J(B)$.
(۷) $E_{I \to J}(B) \subseteq E_{I \to E_I(B)}(B)$.
(۸) اگر $۱ \in B$، آنگاه I نسبت به B پایدار است.
(۹) اگر $B \subseteq C$، آنگاه $E_I(C) \subseteq E_I(B)$.

اثبات. (۱) فرض کنید $E_I(B) = A$. در نتیجه $۱ \in E_I(B)$ و لذا خواهیم داشت $b \in I$. $b = ۱$، برای هر $b \in B$. بنابراین $B \subseteq I$.
برعکس، فرض کنید $B \subseteq I$. برای هر $x \in A$ و $b \in B$، چون $B \subseteq I$ داریم $x.b \leq b \in B \subseteq I$. در نتیجه $x.b \in I$، برای هر $b \in B$. بنابراین $x \in E_I(B)$ به‌دست می‌آوریم $A \subseteq E_I(B)$ و در نتیجه $A = E_I(B)$.
(۲) فرض کنید $a \in A$ دارای مرتبه متناهی باشد. در نتیجه $m \in \mathbb{N}$ موجود است به‌قسمی‌که $m.a = ۱$. فرض کنید $a \in E_I(B)$. از قضیه ۳.۲، نتیجه می‌شود $۰ = m.a \in E_I(B)$. از این رو $۱.b = ۱ \in I$. برای هر $b \in B$ و $B \subseteq I$. بنا به قسمت (۱)، به‌دست می‌آوریم $A = E_I(B)$.
(۳) فرض کنید $I \subseteq J$ و $x \in E_I(B)$. آنگاه $x.b \in I \subseteq J$، برای هر $b \in B$. از این رو $x \in E_J(B)$.
(۴) فرض کنید $a, b \in E_I(B)$ آنگاه $a.x \in I$، برای هر $x \in B$ و $b.y \in I$. برای هر $y \in B$، بنا به لم ۵.۱ قسمت (۳) داریم $(a \oplus b).c \leq (a.c) \oplus (b.c) \in I$. برای هر $c \in B$. بنابراین $(a \oplus b) \in E_I(B)$.
(۵) فرض کنید $x \in B$ و $y \in E_I(B)$. آنگاه $x.y = y.x \in I$. درنتیجه $x \in E_I(E_I(B))$.
(۶) فرض کنید $x \in E_I(B) \to E_J(B)$. لذا خواهیم داشت $(x] \cap E_I(B) \subseteq E_J(B)$. بنابراین $(x] \cap I \subseteq E_{I \to J}(B)$.
(۷) فرض کنید $x \in E_{I \to J}(B)$. آنگاه $x.b \in I \to J$، برای هر $b \in B$. پس نتیجه می‌شود $[x, B] \cap I \subseteq J$. از این‌رو $J \subseteq E_J(B)$. لذا $x.b \in I \to E_I(B)$ $x \in E_{I \to E_I(B)}(B)$.
(۸) فرض کنید $۱ \in E_I(B)$ و $x \in B$. بنابراین $x = x.۱ \in I$. درنتیجه $E_I(B) \subseteq I$ و همچنین بنا به قضیه ۳.۲ $I \subseteq E_I(B)$ و لذا خواهیم داشت $I = E_I(B)$ و I نسبت به B پایدار است.
(۹) اگر $B \subseteq C$ و $x \in E_I(C)$ آنگاه $x.c \in I$، برای هر $c \in C$ و در نتیجه $x.c \in I$ برای هر $c \in B$. بنابراین $x \in E_I(B)$. □

قضیه ۷.۲. اگر I یک ۰-ایده‌ال اول از PMV-جبر یکانی A باشد، در این‌صورت $E_I(B)$ یک ۰-ایده‌ال اول است.

اثبات. فرض کنید I یک ۰-ایده‌ال اول باشد و $a.b \in E_I(B)$. از این رو $a.(b.x) = (a.b).x \in I$ برای هر $x \in B$. چون I یک ۰-ایده‌ال اول است، $a \in I$ و $b.x \in I$. سپس $a.x \leq a.۱ = a \in I$ یا $b.x \in I$. بنابراین $a \in E_I(B)$ یا $b \in E_I(B)$. بنابراین $E_I(B)$ یک ۰-ایده‌ال اول از A است. □

نکته ۸.۲. [۳] اگر A یک PMV-جبر و $I \subseteq A$ یک ۰-ایده‌ال از A باشد، آنگاه رابطه $\sim_I$ برای هر $x, y \in A$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x \sim_I y \Leftrightarrow d(x, y) \in I.$$

رابطه $\sim_I$ با توجه به عمل‌های PMV-جبر یک همنهشتی است. برای هر $\alpha \in A$

$$x \sim_I y \Leftrightarrow \alpha.x \sim_I \alpha.y.$$

ساختار طبیعی برای عضو $[x]_I$ از PMV-جبر خارج قسمتی $\frac{A}{I}$ که یک کلاس همنهشتی از $x \in A$ است. مجموعه رده‌های همنهشتی A را با $\frac{A}{I}$ نمایش می‌دهیم که برابر است با $\{\frac{x}{I} : x \in I\}$ به‌طوری‌که $\frac{x}{I} = \{y \in A : x \sim_I y\}$ است. به آسانی می‌توان نتیجه گرفت $\frac{x}{I} = \frac{\circ}{I} \Leftrightarrow x \in I$ ثابت می‌شود که $(\frac{A}{I}, \oplus, ., *, \circ)$ با عمل‌های $(\frac{x}{I})^* = \frac{x^*}{I}$, $\frac{x}{I}.\frac{y}{I} = \frac{x.y}{I}$, $\frac{x}{I} \oplus \frac{y}{I} = \frac{x \oplus y}{I}$ یک PMV-جبر است.

قضیه ۹.۲. فرض کنید I یک ۰-ایده‌ال سره از A باشد، آنگاه عبارات زیر برقرارند:

(۱) $E_{\frac{[\circ]}{I}}(\frac{B}{I}) = \frac{E_I(B)}{B}$، برای $B \subseteq A$.

(۲) $B\left(\frac{A}{E_I(B(A))}\right) = \frac{B(A)}{E_I(B(A))}$.

اثبات. (۱) بنا به تعریف $E_I(B)$، داریم

$$\begin{aligned}\frac{x}{I}.\frac{b}{I} = \frac{\circ}{I} &\Leftrightarrow x.b \in I \\ &\Leftrightarrow x \in E_I(B) \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{I} \in E_I(B).\end{aligned}$$

(۲) داریم

$$\begin{aligned}\frac{B(A)}{E_I(B(A))} &= \{\frac{e}{E_I(B(A))} : e \in B(A)\} = \{\frac{e}{E_I(B(A))} : e \vee e^* = ۱\} \\ &= \{\frac{e}{E_I(B(A))} : \frac{e}{E_I(B(A))} \vee \left(\frac{e}{E_I(B(A))}\right)^* = \frac{۱}{E_I(B(A))}\} = B(\frac{A}{E_I(B(A))}).\end{aligned}$$

□

لم ۱۰.۲. فرض کنید I یک ۰-ایده‌ال از PMV-جبر یکانی A به‌قسمی‌که $B \subseteq A \in ۱$ باشد. آنگاه $E_I(B)$، کوچکترین ۰-ایده‌ال پایدار نسبت به B شامل I است.

اثبات. بنا به قضیه ۳.۲، داریم (۱) $E_I(B) \subseteq E_{E_I(B)}(B)$.
برعکس، فرض کنید $x \in E_{E_I(B)}(B)$. آنگاه $x.b \in E_I(B)$، برای هر $b \in B$. لذا $(x.b).b' \in I$، برای هر $b' \in B$. حال $b' = ۱$ قرار دهید. بنابراین $x.b = x.(b.۱) = (x.b).b' \in I$ در نتیجه $x.b \in I$، برای هر $b \in B$. لذا خواهیم داشت $x \in E_I(B)$. بنابراین (۲) $E_{E_I(B)}(B) \subseteq E_I(B)$.
از رابطه (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $E_{E_I(B)}(B) = E_I(B)$. حال فرض کنید J یک ۰-ایده‌ال پایدار نسبت به B باشد به‌قسمی‌که $I \subseteq J$. از قضیه ۶.۲ قسمت (۳)، نتیجه می شود $E_I(B) \subseteq E_J(B) = J$. □

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید I یک ۰-ایده‌ال از PMV-جبر یکانی A باشد و $B, C \subseteq A$ آنگاه

(۱) اگر B یک ۰-ایده‌ال باشد، در این‌صورت $E_I(B) = E_I((B])$.

(۲) $E_{E_I(B)}(C) = E_{E_I(C)}(B)$.

(۳) اگر $B \subseteq I$، آنگاه $(B] \cap E_I((B]) = (B]$.

اثبات. (۱) چون $B \subseteq (B]$، با استفاده از قضیه ۶.۲ قسمت (۹)، داریم $E_I(B) \subseteq E_I((B])$. فرض کنید $x \in E_I(B)$ و $z \in (B]$. آنگاه $x.b \in I$، برای هر $b \in B$. همچنین $b_1, ..., b_n \in B$ ،$c_1, ..., c_m \in B$ و $\alpha_1, ..., \alpha_m \in A$ به‌قسمی‌که

$$z \leq b_1 \oplus \cdots \oplus b_n \oplus \alpha_1.c_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_m.c_m,$$

بنا به لم ۵.۱ قسمت (۳) نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned} x.z &\leq x.(b_1 \oplus \cdots \oplus b_n \oplus \alpha_1.c_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_m.c_m) \\ &\leq (x.b_1) \oplus \cdots \oplus (x.b_n) \oplus (x.\alpha_1.c_1) \oplus \cdots \oplus (x.\alpha_m.c_m). \end{aligned}$$

چون B یک ۰-ایده‌ال است $\alpha_i.c_i \in B$ برای هر $i \in I$ و لذا $x.(\alpha_i.c_i) \in I$. همچنین چون $x.b_i \in I$، نتیجه می‌گیریم $x.z \in I$. بنابراین $x \in E_i((B])$.
(۲) و (۳) به وضوح برقرار است. □

نکته ۱۲.۲. بنا به لم ۱۰.۲، $E_I(B)$ نسبت به B پایدار است. قرار دهید $S(B) = \{E_I(B) : I \in Id(A)\}$.
لذا هر ۰-ایده‌ال پایدار نسبت به B در $S(B)$ است. برای هر دو عضو $E_I(B), E_J(B) \in S(B)$ عمل‌های $\sqcap, \sqcup$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$E_I(B) \sqcap E_J(B) = E_{I \wedge J}(B),$$
$$E_I(B) \sqcup E_J(B) = E_{I \vee J}(B),$$

به‌طوری‌که $E_{I \wedge J}(B)$ $(E_{I \vee J}(B))$، اینفیم (سوپریمم) $\{E_{I \wedge J}(B), E_{I \vee J}(B)\}$ در $S(B)$ است. به آسانی می‌توان نشان داد $E_I(B) \sqcap E_J(B) = E_{I \wedge J}(B)$. نشان می‌دهیم $E_{I \vee J}(B)$ سوپریمم $E_I(B)$ و $E_J(B)$ در $S(B)$ است. بنا به قضیه ۶.۲ قسمت (۳)، نتیجه می‌گیریم

$$E_I(B), E_J(B) \subseteq E_{I \vee J}(B).$$

فرض کنید برای هر $E_k(B)$ ،B به‌قسمی‌که $E_I(B), E_J(B) \subseteq E_k(B)$. ثابت می‌کنیم $E_{I \vee J}(B) \subseteq E_k(B)$. فرض کنید $x \in E_{I \vee J}(B)$. آنگاه $x.b \in I \vee J$، برای هر $b \in B$. پس $x.b \leq a \oplus c$، برای $c \in J \subseteq E_J(B)$، $a \in I \subseteq E_I(B)$. لذا خواهیم داشت $x.b \in E_I(B) \vee E_J(B) \subseteq E_k(B)$، برای هر $b \in B$. بنا به لم ۱۰.۲ نتیجه می‌گیریم $x \in E_{E_k(B)}(B) = E_k(B)$.
به‌عبارت دیگر $E_{I \vee J}(B)$ سوپریمم $\{E_I(B), E_J(B)\}$ در $S(B)$ است. بنابراین $(S(B), \sqcap, \sqcup)$ یک مشبکه است.

مراجع

1. C. C. Chang, *Algebraic analysis of many valued logic*, Trans. Amer. Math. Soc. **88** (1958) 467–490.
2. A. Di Nola and A. Dvurecenskij, *Product MV-algebras*, Multiple-Valued Logics **6** (2001) 193–215.
3. F. Forouzesh, E. Eslami and A. Borumand saeid, *On prime A-ideals in MV-modules*, University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin **87** (2014) 181–198.

پست الکترونیکی: Msamet@bam.ac.ir
پست الکترونیکی: frouzesh@bam.ac.ir

رده‌های هم‌ارزی کدهای بدون کاما

فریبا فیاضی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه قم، قم، ایران
و علی‌رضا اشرفی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. کدهای بدون کاما نوع خاصی از کدهای آزمون و خطا هستند که اولین بار جهت پاسخ به سوالاتی در زیست‌شناسی طرح شدند. در این مقاله ثابت خواهیم کرد که کدهای بدون کاما فاقد پایدارساز بدیهی هستند. به‌علاوه رده هم‌ارزی کدهای بدون کاما را بررسی و نتایجی در این خصوص ارائه خواهیم کرد.
واژه‌های کلیدی: کدهای بدون کاما، دوری، مدار، پایدارساز.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 94A45.

۱. پیش‌گفتار

مولکول دی ان ای در بردارنده‌ی تمامی اطلاعات مورد نیاز برای ساخت پروتئین‌های جدید است. در آغاز ژنتیک مولکولی، یک راه حل هم‌زمان برای اجرای کد ژنتیکی و هماهنگ‌سازی قالب‌های مورد نظر پیشنهاد شد. قبل از کشف ساختار واقعی کد ژنتیک استاندارد، کریک فرض کرد که یک کد حاوی خصوصیات بدون کاما است [۲]. چنین کدهایی مورد توجه متخصصین نظریه کد قرار گرفت زیرا این کدها، نوع خاصی از کدهای آزمون و خطا بودند [۴]. در کدهای بدون کاما، در زیرمجموعه موجود از ۶۴ کدون، ۲۰ آمینو اسید وجود دارد. کدهای ژنتیکی با سه حرف از پایه‌های اسید نوکلئوتید ساخته می‌شوند. فرض کنیم $\Sigma = \{T(U), C, A, G\}$. گروه متقارن S_Σ روی Σ به‌صورت زیر تعریف می شود:

$$S_\Sigma = \{\pi : \Sigma \to \Sigma \mid \pi \text{ دوسویی است.}\},$$

$(S_\Sigma, \circ)$ یک گروه است که در آن $\circ$ عمل ترکیب روی توابع است. این گروه با $S_۴$ یکریخت است. منظور از

$$\pi_{AGTC} : (A, T, C, G) \to (G, A, T, C),$$

نگاشتی است که در آن $\pi(A) = G, \pi(T) = A, \pi(C) = T, \pi(G) = C$. هر نگاشت دوسویی $\pi : \Sigma \to \Sigma$ نگاشت دیگری را روی مجموعه کدون‌ها القا می کند که آن‌را نیز با π نشان می‌دهیم. در واقع $\pi : \Sigma^۳ \to \Sigma^۳$. در [۳] و [۵] چهار نگاشت از انتقال‌های اسید نوکلئوتیدها به‌صورت زیر تعیین و نام‌گذاری شده‌اند:

$$i = I(or\ id) : (A, T, C, G) \to (A, T, C, G),$$
$$c = SW : (A, T, C, G) \to (T, A, G, C),$$
$$p = YR : (A, T, C, G) \to (G, C, T, A),$$
$$r = KM : (A, T, C, G) \to (C, G, A, T),$$

که در آن‌ها اولی نگاشت همانی، دومی نگاشت متمم، سومی نگاشت پیرامیدین-پورین و چهارمی نگاشت آمینو-کیتو است.

* سخنران

توزیع ۶۴ نوکلئوتید در سه قالب از ژن‌ها یکسان نیست و لذا می‌توان سه مجموعه از نوکلئوتیدها را به‌صورت $X_۰$، $X_۱$ و $X_۲$ مشخص نمود [۱].

$$\begin{aligned} X_۰ &= \{AAC, AAT, ACC, ATC, ATT, CAG, CTC, CTG, GAA, GAC, \\ &\quad GAG, GAT, GCC, GGC, GGT, GTA, GTC, GTT, TAC, TTC\}; \\ X_۱ &= \{AAG, ACA, ACG, ACT, AGC, AGG, ATA, ATG, CCA, CCG, \\ &\quad GCG, GTG, TAG, TCA, TCC, TCG, TCT, TGC, TTA, TTG\}; \\ X_۲ &= \{AGA, AGT, CAA, CAC, CAT, CCT, CGA, CGC, CGG, CGT, \\ &\quad CTA, CTT, GCA, GCT, GGA, TAA, TAT, TGA, TGG, TGT\}. \end{aligned}$$

جایگشت تری نوکلئوتید $W_۰ = N_۰N_۱N_۲$ که در آن $N_i \in \Sigma$ به‌صورت زیر است:

$$P(W_۰) = W_۱ = N_۱N_۲N_۰,\ P(P(w_۰)) = P(W_۱) = W_۲ = N_۲N_۰N_۱.$$

به‌عنوان مثال $P(ACG) = CGA, P(P(ACG) = P(CGA) = GAC$.

آرکوس و میشل در [۱] ثابت کردند که $X_۱$ و $X_۲$ توسط جایگشت روی $X_۰$ به‌دست می‌آیند.

$$P(X_۰) = X_۱, P(X_۱) = X_۲.$$

یک کلمه از مجموعه $S \subseteq S_\Sigma^n$ یک کد نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و $x'_۱, x'_۲, \ldots, x'_m$ در S و به‌ازای $n, m \geq ۱$، اگر $x_۱x_۲\ldots x_n = x'_۱x'_۲\ldots x'_m$ آنگاه $n = m$ و $x_i = x'_i$ به ازای هر $i = ۱, \ldots, n$. فرض کنیم $X \subseteq \Sigma^۳$. مجموعه کدون‌های X را یک کد مستدیر سه حرفی گوییم اگر هر کلمه از حروف Σ که به‌صورت مستدیر نوشته شده است حداکثر یک تجزیه از کلمات X داشته باشد. کد مستدیر سه حرفی ماکسیمال نامیده می شود هرگاه برای هر $x \in \Sigma^۳$ و $x \notin X$، $X \cup \{x\}$ کد مستدیر سه حرفی نباشد. هم‌چنین برای کلمات ۳ یا ۴ حرفی می‌توان گفت کد مستدیر سه حرفی ماکسیمال است هرگاه دقیقاً شامل ۲۰ کدون باشد یعنی $|X| = ۲۰$. مجموعه‌های $X_۰$، $X_۱ = P(X_۰)$ و $X_۲ = P(X_۱)$ شامل ۲۰ کد مستدیر سه حرفی ماکسیمال هستند. هم‌چنین:

$$C(X_۰) = X_۰, C(X_۱) = X_۲, C(X_۲) = X_۱.$$

فرض کنیم $X \subseteq \Sigma$ یک کد دلخواه باشد. X یک کد بدون کاما است اگر برای دو عضو $x_۱\ldots x_n$ و $y_۱\ldots y_n$ از X داشته باشیم:

$$x_i\ldots x_n y_۱\ldots y_{i-۱} \notin X, \forall i \in \{۲, \ldots, n\}.$$

کدهای مستدیر، همان‌طور که قبلاً اشاره شد، یک مدل محدود از کدهای بدون کاما هستند و به‌نظر می‌رسد که نقش کلیدی در خواندن قالب‌ها دارند [۱]. در این مقاله با طراحی برنامه‌هایی کامپیوتری به‌زبان GAP، به حدس‌هایی در خصوص رده‌های هم‌ارزی کدهای بدون کاما می‌رسیم. ما این حدس‌ها را در حالتی‌که پایه‌های دی ان ای را اختیار کنیم، با شیوه‌ای محاسباتی ثابت کرده‌ایم ولی در حالت کلی که پایه‌های دی ان ای را گسترش دهیم، این احکام در برخی حالات درست باقی می‌مانند ولی در برخی موارد هنوز به اثبات حالت کلی نرسیده‌ایم. ما برای مفاهیم جبری این مقاله، خواننده را به کتاب معروف راتمن [۶] ارجاع می‌دهیم. تمام محاسبات ما با نرم افزار GAP انجام یافته است [۷].

۲. نتایج اصلی

فرض کنیم $\Sigma = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و بنابر حروف پایه ژنتیکی قرار می‌دهیم: $A = ۱$، $C = ۲$، $G = ۳$ و $T = ۴$. یک کدون را با $[a, b, c]$ نشان می‌دهیم. بنابراین نماد مجموعه X از کدون ها یک کد بدون کاما نامیده می‌شود اگر $[a, b, c], [x, y, z] \in X$ آنگاه $[b, c, x], [c, x, y] \notin X$. لذا کدهای بدون کاما شامل کدون‌هایی به‌صورت $[a, a, a]$ نیستند. بنابراین کدهای بدون کاما را می‌توان توسط ۶۰ کدون از ۶۴ کدون موجود ساخت.

لم ۱.۲. فرض کنیم X یک کد بدون کاما باشد. اگر $[a, b, c] \in X$ آنگاه $[b, c, a], [c, a, b] \notin X$.

کدون‌های $[a,b,c]$، $[b,c,a]$ و $[c,a,b]$ دوری نامیده می‌شوند. لم ۱.۲ نشان می‌دهد که کدهای بدون کاما فاقد کدون‌های دوری هستند. به‌عبارت دیگر ۶۰ کدون غیر دوری وجود دارد که به ۲۰ دسته شامل کدون‌های دوری دسته‌بندی می‌شوند. جدول ۱ را مشاهده کنید. بنابراین ماکسیمم مرتبه کدهای بدون کاما ۲۰ است و چنین کدهایی را کدهای ماکسیمم بدون کاما می‌نامند.

جدول ۱. دسته‌بندی کدون‌ها.

$R_۱ = \{[۱,۲,۳],[۲,۳,۱],[۳,۱,۲]\}$	$R_۲ = \{[۱,۳,۲],[۳,۲,۱],[۲,۱,۳]\}$
$R_۳ = \{[۱,۲,۴],[۲,۴,۱],[۴,۱,۲]\}$	$R_۴ = \{[۱,۴,۲],[۴,۲,۱],[۲,۱,۴]\}$
$R_۵ = \{[۱,۳,۴],[۳,۴,۱],[۴,۱,۳]\}$	$R_۶ = \{[۱,۴,۳],[۴,۳,۱],[۳,۱,۴]\}$
$R_۷ = \{[۲,۳,۴],[۳,۴,۲],[۴,۲,۳]\}$	$R_۸ = \{[۲,۴,۳],[۴,۳,۲],[۳,۲,۴]\}$
$S_۱ = \{[۱,۱,۲],[۱,۲,۱],[۲,۱,۱]\}$	$S_۲ = \{[۱,۱,۳],[۱,۳,۱],[۳,۱,۱]\}$
$S_۳ = \{[۱,۱,۴],[۱,۴,۱],[۴,۱,۱]\}$	$S_۴ = \{[۲,۲,۱],[۲,۱,۲],[۱,۲,۲]\}$
$S_۵ = \{[۲,۲,۳],[۲,۳,۲],[۳,۲,۲]\}$	$S_۶ = \{[۲,۲,۴],[۲,۴,۲],[۴,۲,۲]\}$
$S_۷ = \{[۳,۳,۱],[۳,۱,۳],[۱,۳,۳]\}$	$S_۸ = \{[۳,۳,۲],[۳,۲,۳],[۲,۳,۳]\}$
$S_۹ = \{[۳,۳,۴],[۳,۴,۳],[۴,۳,۳]\}$	$S_{۱۰} = \{[۴,۴,۱],[۴,۱,۴],[۱,۴,۴]\}$
$S_{۱۱} = \{[۴,۴,۲],[۴,۲,۴],[۲,۴,۴]\}$	$S_{۱۲} = \{[۴,۴,۳],[۴,۳,۴],[۳,۴,۴]\}$

در این مقاله مجموعه همه کدون‌های غیر دوری و مجموعه همه کدهای بدون کامای ماکسیمال را به‌ترتیب با $\mathcal{P}$ و $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم. فرض کنیم $M \subseteq \mathcal{P}$. متمم M را با $\overline{M}$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\overline{M} = \{[۴-a, ۴-b, ۴-c] \mid [a,b,c] \in M\}.$$

لم ۲.۲. اگر M کد بدون کاما باشد آن‌گاه $\overline{M}$ نیز بدون کاما است. علاوه بر این $\overline{\overline{M}} = M$.

نتیجه ۳.۲. M کد بدون کامای ماکسیمال است اگر و فقط اگر $\overline{M}$ کد بدون کامای ماکسیمال است.

تعریف می‌کنیم $W_۱ = \{R_۱, \ldots, R_۸\}$ و $W_۲ = \{S_۱, \ldots, S_{۱۲}\}$. آن‌گاه بنابر جدول ۱ داریم: $W_۲ \cup W_۱ = \mathcal{P}$. علاوه‌براین قرار می‌دهیم $c = (۱,۴)(۲,۳)$، $r = (۱,۲)(۳,۴)$، $p = (۱,۳)(۲,۴)$، $\pi_{AT} = (۱,۴)$، $\pi_{CG} = (۲,۳)$، $\pi_{AGTC} = (۱,۳,۴,۲)$، $\pi_{ACTG} = (۱,۲,۴,۳)$ و $L = \{c, r, p, \pi_{AT}, \pi_{CG}, \pi_{AGTC}, \pi_{ACTG}\}$. به‌وضوح L تحت عمل ترکیب توابع گروه است و با گروه دووجهی از مرتبه هشت یکریخت است. فرض کنیم A کد بدون کامای ماکسیمال باشد و $g \in L$. قرار دهید $A^g = \{\alpha^g \mid \alpha \in A\}$ و $A^L = \{A^g \mid g \in L\}$ که در آن $\alpha = (a,b,c)$ و داریم $\alpha^g = (ag, bg, cg)$. آن‌گاه L روی $\mathcal{M}$ عمل می کند. هدف ما محاسبه تمام مدارها تحت این عمل است. به‌وضوح بنابر قضیه مدار-پایدارساز، $|L| = |A^L| \times |L_A|$ و $|A^L|$ هشت را عاد می‌کند.

در قضیه زیر که مهم‌ترین نتیجه این مقاله است، نشان می‌دهیم کدهای بدون کاما تحت عمل گروه L فاقد پایدارساز بدیهی هستند.

قضیه ۴.۲. اگر A کد بدون کامای ماکسیمال باشد، آن‌گاه $|A^L| \neq ۱$.

نتیجه ۵.۲. برای هر کد بدون کامای A داریم $|A^L| \neq ۱$.

در مثال زیر نشان می‌دهیم رده‌های هم‌ارزی کدهای بدون کامای سه حرفی ماکسیمال از مرتبه ۲، ۴ و ۸ می‌باشد.

مثال ۶.۲. فرض کنید $\Sigma = \{A, C, G, T\}$ الفبای ژنتیکی باشد. عمل L روی کدهای بدون کامای سه حرفی ماکسیمال، رده‌های هم‌ارزی از مرتبه‌های متفاوت ۲، ۴ و ۸ القا می‌کند.

(۱) برای

$$X_۱ = \{AAC, AAG, AAT, CAC, CAG, CAT, CCT, CGC, CGT, GAC, GAG, GAT, GGC, GGT, TAC, TAG, TAT, TCT, TGC, TGT\},$$

رده هم‌ارزی از مرتبه ۸ است.

(۲) برای

$$X_۲ = \{ATC, ATG, ATT, CAA, CAC, CAG, CGC, CGG, CTC, CTG, CTT, GAA, GAC, GAG, GTC, GTG, GTT, TAA, TAC, TAG\},$$

رده هم‌ارزی از مرتبه ۴ است.

(۳) برای

$$X_۳ = \{AAC, AAG, AAT, CAC, CAG, CAT, CGG, CTA, CTC, CTG, GAC, GAG, GAT, GCC, GTA, GTC, GTG, TTA, TTC, TTG\},$$

رده هم‌ارزی از مرتبه ۲ است.

مراجع

1. D. G. Arquès and C. J. Michel, *A complementary circular code in the protein coding genes*, J. Theor. Biol. **182** (1) (1996) 45–58.
2. F. H. C. Crick, J. S. Griffith and L. E. Orgel, *Codes without commas*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **43** (1957) 416–421.
3. E. Fimmel, A. Danielli and L. Strüngmann, *On dichotomic classes and bijections of the genetic code*, J. Theoret. Biol. **336** (2013) 221–230.
4. S. Golomb, B. Gordon and L. R. Welch, *Comma-free codes*, Canad. J. Math. **10** (1958) 202–209.
5. D. L. Gonzalez , *The Mathematical Structure of the Genetic Code*, in: Barbieri M, Hoffmeyer J (eds) The Codes of Life: The Rules of Macroevolution. Biosemiotics, Vol. 1, chap 8. Springer, Netherlands, pp. 111–152, 2008.
6. J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Springer-Verlag, New York, 1995.
7. The GAP Team, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.7, 2015.

پست الکترونیکی: fayazifariba@yahoo.com
پست الکترونیکی: ashrafi@kashanu.ac.ir

گراف توان مبتنی بر یک زیرگروه نرمال از گروهی متناهی

نسرین ملک محمدی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمالی از آن باشد. در این‌صورت گراف توان مبتنی بر زیرگروه نرمال H از گروه G که آن‌را با $\Gamma_H(G)$ نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعه رئوس $(G-H)\cup\{e\}$ است که دو رأس متمایز x و y در این گراف مجاورند هرگاه اعداد طبیعی n,m وجود داشته باشند که $xH=y^mH$ یا $yH=x^nH$. هدف این مقاله بررسی برخی ویژگی‌های این گراف شامل دوبخشی بودن، شکافته شدن و دوبار شکافته شدن است. ما به‌علاوه یک رده‌بندی از این گراف‌ها بر حسب تعداد دورها ارائه خواهیم داد.

واژه‌های کلیدی: گراف توان مبتنی بر یک زیرگروه نرمال از گروهی متناهی، گراف توان، گراف شکافته شده، گراف یالی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C65, 05C31, 05E30.

۱. پیش‌گفتار

ساختن گراف‌ها از گروه‌های متناهی سال‌های زیادی است که مورد توجه قرار گرفته است به‌طوری که چنین ساختارهایی یکی از زیباترین و پرکاربردترین شاخه‌ها در نظریه گروه‌های متناهی محسوب می‌شوند. اولین نمونه از چنین مطالعاتی توسط کیلی در اواخر قرن نوزدهم صورت گرفت. گراف توان نمایش جدیدی از گراف‌هاست که به‌وسیله گروه‌ها تعریف شده است. این گراف اولین بار برای نیم‌گروه‌ها توسط کوین و کلارف در [۷] به‌صورت جهت‌دار معرفی شد. چند سال بعد چاکرابارتی ، قوش و سن در [۵] گراف توان غیر جهت‌دار نیم‌گروه‌ها را تعریف کردند. اخیراً پیتر کمرون و قوش نتایج جالبی درباره گراف توان غیر جهت‌دار در [۴] ارائه کرده‌اند. بیهونیا و برا در [۲] بر اساس ایده‌ای از ردمون [۹] گراف توان غیرجهت‌دار $\Gamma(G)$ را به گراف توان مبتنی بر زیر گروه نرمال H، تعمیم داده‌اند و این گراف را با $\Gamma_H(G)$ نشان داده‌اند و به‌صورت کامل‌تر در [۱] این گراف و برخی از ویژگی‌های آن‌را بررسی کردند.

تعریف ۱.۱. [۱] فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمالی از آن باشد. در این‌صورت گراف توان مبتنی بر زیرگروه نرمال H از گروه G که آن‌را با $\Gamma_H(G)$ نشان می‌دهیم، گرافی با مجموعه رئوس $V(\Gamma_H(G))=(G-H)\cup\{e\}$ است که دو رأس متمایز x و y در این گراف مجاورند هرگاه اعداد طبیعی n,m وجود داشته باشند که $xH=y^mH$ یا $yH=x^nH$.

فرض کنیم G یک گروه است. در این‌صورت گراف توان غیر جهت‌دار $\Gamma(G)$ گرافی است با مجموعه رئوس G و دو رأس متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر اعداد طبیعی m و n موجود باشند به‌طوری‌که $x=y^n$ یا $y=x^m$. با قرار دادن $H=\{e\}$، $\Gamma_e(G)=\Gamma(G)$.
فرض کنید Γ_1 وΓ_2 دو گراف دلخواه باشند. حاصل‌ضرب قوی Γ_1 وΓ_2 که با $\Gamma_1\boxtimes\Gamma_2$ نشان می‌دهیم گرافی است که در آن:

$$V(\Gamma_1\boxtimes\Gamma_2)=V(\Gamma_1)\times V(\Gamma_2),\quad E(\Gamma_1\boxtimes\Gamma_2)=E(\Gamma_1\square\Gamma_2)\cup E(\Gamma_1\times\Gamma_2).$$

هم‌چنین اجتماع مجزای Γ_1 وΓ_2 که با نماد $\Gamma_1\cup\Gamma_2$ نشان می‌دهیم مجموعه رئوس و یال‌های آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$V(\Gamma_1\cup\Gamma_2)=V(\Gamma_1)\cup V(\Gamma_2),\quad E(\Gamma_1\cup\Gamma_2)=E(\Gamma_1)\cup E(\Gamma_2).$$

* سخنران

اجتماع مجزای گراف‌های $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_l$ که همگی یکریخت با گراف کامل مرتبه n هستند را با lK_n نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۱. [۱] فرض کنید G گروهی دلخواه و $H \trianglelefteq G$ با مرتبه m و $n = [G : H]$. در این‌صورت

(۱) اگر aH و bH دو همدسته غیرهمانی و متمایز H در G باشند و یک عضو از aH با یک عضو از bH در $\Gamma_H(G)$ مجاور باشد آن‌گاه هر عضو همدسته aH با هر عضو همدسته bH مجاور است.

(۲) گراف $\Gamma_H(G)$ شامل $t - n + 1$ زیرگراف یکریخت با K_{2m} است که t تعداد یال‌های گراف توان $\Gamma(\frac{G}{H})$ می‌باشد.

(۳) اگر a و b دو رأس متمایز در $\Gamma_H(G)$ باشند آن‌گاه a و b مجاورند در صورتی‌که $aH = bH$ یا aH و bH در گراف توان $\Gamma(\frac{G}{H})$ مجاور باشند.

(۴) گراف $\Gamma_H(G)$ شامل $|H|^{[G:H]-1}$ زیرگراف القایی است که هر یک با گراف توان $\Gamma(\frac{G}{H})$ یکریخت هستند.

(۵) $\Gamma_H(G)$ کامل است اگر و تنها اگر $\frac{G}{H}$ یک p-گروه دوری باشد.

(۶) $\Gamma^*_H(G) \cong \Gamma^*(\frac{G}{H}) \boxtimes K_{|H|}$.

(۷) گراف $\Gamma_H(G)$ دوبخشی یا درخت نیست.

نتیجه ۳.۱. فرض کنید G یک گروه دلخواه با زیرگروه نرمال H و $\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_{p^r}$ که p عدد اول و r عدد طبیعی است. دراین‌صورت $\Gamma_H(G) \cong K_{|H|(p^r-1)+1}$.

زیر مجموعه S از رئوس گراف Δ یک خوشه می‌نامیم هرگاه زیرگراف القایی S روی Δ گرافی کامل باشد. بنابراین عناصر هر همدسته در گراف $\Gamma_H(G)$ تشکیل خوشه می‌دهند.

تعریف ۴.۱. [۶] فرض کنید Δ یک گراف با مجموعه رئوس V باشد. اگر بتوان V را به‌صورت اجتماع دو مجموعه‌ی مجزا از رئوس C و I بیان نمود به‌طوری‌که C یک خوشه و I یک مجموعه مستقل باشد آن‌گاه Δ را یک گراف شکافته شده می‌نامیم.

تعریف ۵.۱. یک گراف غیرجهت‌دار $\Delta = (V, E)$ را در نظر بگیرید. یک مجموعه پایدار یک زیرمجموعه‌ی S از V است که شامل هیچ یالی از Δ نمی‌باشد. در این‌صورت گراف Δ دوبار شکافته شده نامیده می‌شود هرگاه بتوان مجموعه رئوس V را به سه زیرمجموعه پایدار X، Y و Z چنان افراز نمود که $Y \cup Z$ یک گراف دوبخشی کامل باشد.

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\Delta = (V, E)$ گرافی دلخواه باشد. در این‌صورت گراف Δ را k-بار دو بار شکافته شده می‌نامیم هرگاه دارای یک مجموعه پایدار X باشد به‌طوری‌که زیرگراف القایی $\Delta[V \setminus X]$ دارای حداکثر k مؤلفه همبندی باشد و مؤلفه‌ها گراف‌های دوبخشی کامل باشند.

تعریف ۷.۱. فرض کنید Γ یک گراف ساده باشد. در این‌صورت گراف یالی Γ که با نماد $L(\Gamma)$ نشان داده می‌شود، گرافی است که $V(L(\Gamma)) = E(\Gamma)$ و دو رأس آن مجاورند اگر و تنها اگر به‌عنوان یال در Γ یک رأس مشترک داشته باشند.

۲. نتایج اصلی

در این بخش به بررسی روابط موجود بین گراف $\Gamma_H(G)$ و گراف توان گروه خارج قسمتی $\frac{G}{H}$ می‌پردازیم و شرایط لازم برای شکافته شدن، دوبار شکافته شدن، دو بخشی بودن و یالی بودن گراف $\Gamma_H(G)$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید G یک گروه و $H \trianglelefteq G$. دراین‌صورت گراف $\Gamma_H(G)$ شکافته شده است اگر و تنها اگر $\Gamma_H(G)$ گرافی کامل باشد.

قضیه ۲.۲. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمال سره غیربدیهی از آن باشد. در این‌صورت گراف $\Gamma_H(G)$ دوبار شکافته شده است اگر و تنها اگر $|H| = ۲$ و $\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \cdots \times \mathbb{Z}_۲$.

قضیه ۳.۲. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمال سره و غیربدیهی آن باشد به‌طوری‌که $[G : H] = n$. در این‌صورت گراف $\Gamma_H(G)$ گرافی $n - ۱$-بار دو بار شکافته شده است اگر و تنها اگر دوبار شکافته شده باشد.

قضیه ۴.۲. فرض کنید G گروهی دلخواه و H زیرگروهی نرمال سره و غیربدیهی از G باشد. در این‌صورت گراف $\Gamma^*_H(G)$ دوبخشی است اگر و تنها اگر $|H| = ۲$ و $\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \cdots \times \mathbb{Z}_۲$.

یک گروه آبلی مقدماتی گروهی آبلی است که مرتبه‌ی هر عضو غیر بدیهی آن عدد اول p است. اگر G یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^n باشد، آنگاه $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ که $\mathbb{Z}_p$، n بار تکرار شده است.

قضیه ۵.۲. [۸، قضیه ۸] فرض کنید G گروهی آبلی مقدماتی از مرتبه p^n که p عدد اول و n عدد صحیح است. در این‌صورت $\Gamma(G) \cong K_۱ + lK_{p-۱}$ که $l = \dfrac{p^n - ۱}{p - ۱}$.

قضیه ۶.۲. فرض کنید G گروهی دلخواه و H زیرگروه نرمال آن باشد. در این‌صورت با فرض این‌که p و q اعداد اول هستند و $(p < q)$

(۱) اگر $[G : H] = pq$ آنگاه $\Gamma_H(G) \cong K_۱ + (qK_{(p-۱)|H|} \cup K_{(q-۱)|H|})$ اگر و تنها اگر $\frac{G}{H}$ دوری نباشد.

(۲) اگر $\frac{G}{H}$ یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه p^m است آنگاه $\Gamma^*_H(G)$ اجتماعی از گراف‌های کامل می‌باشد.

قضیه ۷.۲. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمال سره غیربدیهی آن باشد. در این‌صورت

(۱) گراف $\Gamma_H(G)$ گراف یالی یک گراف است اگر و تنها اگر گرافی کامل باشد.

(۲) $\Gamma^*_H(G)$ گراف یالی یک گرافی است اگر و تنها اگر هر مؤلفه همبندی آن کامل باشند.

تعداد دورهای مستقل در گراف دلخواه Δ با استفاده از رابطه $c = c(\Delta) = m - n + ۱$ به‌دست می‌آید که m و n به‌ترتیب تعداد یال و تعداد رئوس Δ است [۳]. به‌طور کلی گراف‌های با تعداد دورهای $c = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ را به‌ترتیب درخت، تک دور، دو دور، سه دور و چهار دور می‌نامیم.

قضیه ۸.۲. فرض کنید G یک گروه و H زیرگروه نرمال سره و غیربدیهی آن باشد. در این‌صورت

(۱) $\Gamma_H(G)$ گرافی تک دور است اگر و تنها اگر G یکریخت با $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ یا $\mathbb{Z}_۴$.

(۲) گراف $\Gamma_H(G)$ هیچ‌گاه گرافی دو دور یا چهار دور نیست.

(۳) $\Gamma_H(G)$ گرافی سه دور است اگر و تنها اگر $\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$ و $|H| = ۲$ یا $\frac{G}{H} \cong \mathbb{Z}_۲$ و $|H| = ۳$.

بیشترین فاصله بین رئوس گراف Γ را قطر گراف می‌نامیم و با نماد $diam(\Gamma)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۹.۲. فرض کنید G یک گروه و $H \trianglelefteq G$. در این‌صورت قطر گراف $\Gamma_H(G)$ حداکثر ۲ است اگر و تنها اگر $\frac{G}{H}$ یک p-گروه دوری نباشد. هم‌چنین $diam(\Gamma^*_H(G)) = diam(\Gamma^*(\frac{G}{H}))$.

قضیه ۱۰.۲. فرض کنید G گروهی دلخواه و H زیرگروه نرمال سره و غیربدیهی از آن باشد. دراین‌صورت گراف $\Gamma^*_H(G)$ منظم است اگر و تنها اگر گراف $\Gamma^*(\frac{G}{H})$ منظم باشد.

۳. نتایج در دست اقدام

در این بخش نتایجی را ارائه می‌کنیم که به تازگی انجام یافته است و چون هنوز برای چاپ ارسال نشده و لذا داوری آن را مطالعه نکرده است، آن‌ها را در این بخش فهرست کردیم. تمام این نتایج همراه اثبات آن‌ها در رساله دکتری اینجانب درج خواهد شد.

فرض کنید G یک گروه متناهی و $H \trianglelefteq G$. در این‌صورت

(۱) اگر $a,b \in G-H$ و $< aH >=< bH >$ آنگاه $deg(a) = deg(b)$ در گراف $\Gamma_H(G)$ است.
(۲) تمام عناصر هم مرتبه گروه $\frac{G}{H}$ در گراف $\Gamma_H(G)$ هم درجه هستند.
(۳) اگر $b \in G-H$ آنگاه $deg(b) = deg(g^{-1}bg)$ برای هر $g \in G$.
(۴) تعداد رئوس دو به دو غیر هم درجه در گراف $\Gamma_H(G)$ حداکثر برابر با کلاس‌های تزویج گروه G است.
(۵) اگر $x,y \in G-H$ از مرتبه‌های اول باشند آنگاه $d(x,y) = ۱$ اگر و تنها اگر $x \neq y$ و $< xH >=< yH >$.
(۶) گراف $\Gamma^*_H(G)$ همبند است اگر و تنها اگر گراف $\Gamma^*(\frac{G}{H})$ همبند باشد. به‌طور کلی تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف‌های $\Gamma^*_H(G)$ و $\Gamma^*(\frac{G}{H})$ برابرند.

سپاس‌گزاری

این مقاله بخشی از نتایج رساله دکتری اینجانب می‌باشد که در دانشگاه کاشان تحت راهنمایی سید علی‌رضا اشرفی به انجام رسیده و آماده دفاع است.

مراجع

1. A. K. Bhuniya and S. Bera, *Normal subgroup based power graphs of a finite group*, Comm. Algebra. **45** (8) (2017) 3251–3259.
2. A. K. Bhuniya and S. Bera, *On some characterizations of strong power graphs of finite groups*, Spec. Matrices. **4** (2016) 121–129.
3. B. Bollobás, *Graph Theory, An Introductory Course*, Springer-Verlag, New York, 1990.
4. P. J. Cameron and S. Ghosh, *The power graph of a finite group*, Discrete Math. **311** (13) (2011) 1220–1222.
5. I. Chakrabarty, S. Ghosh and M. K. Sen, *Undirected power graphs of semigroups*, Semigroup Forum **78** (3) (2009) 410–426.
6. S. Földes and P. L. Hammer, *Split graphs having Dilworth number two*, Canadian J. Math. **29** (3) (1977) 666–672.
7. A. V. Kelarev and S. J. Quinn, *Directed graphs and combinatorial properties of semigroups*, J. Algebra **251** (1) (2002) 16–26.
8. T. Tamizh Chelvam and M. Sattanathan, *Power graph of finite abelian groups*, Algebra Discrete Math. **16** (1) (2013) 33–41.
9. S. P. Redmond, *An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring*, Comm. Algebra. **31** (9) (2003) 4425–4443.

پست الکترونیکی: nasrinmalekmohammadi@yahoo.com

سخنرانی‌ها

رمزنگاری

تسهیم راز آستانه‌ای چند گروهی وابسته به هم با استفاده از قضیه باقیمانده چینی

سعید جوهری*
دانشکده ریاضی و آمار، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا مفهوم تسهیم راز چندسطحی به تسهیم راز آستانه‌ای چند گروهی گسترش داده شده، سپس طرح تسهیم راز چند گروهی وابسته به هم بر اساس قضیه باقیمانده چینی ارائه شده است. در این طرح یک سهام‌دار با تنها یک سهم محرمانه مجاز به شرکت در بازسازی راز گروه‌های مختلف است. علاوه بر این، هنگامی که سهامداران کافی برای بازسازی راز در یک گروه همکاری می‌کنند، فقط در صورتی که هر یک از شرکت کنندگان و سهام معتبر باشند، راز قابل بازسازی است.

واژه‌های کلیدی: قضیه باقیمانده چینی، تسهیم راز چند سطحی، تسهیم راز چند گروهی، تسهیم راز چند گروهی وابسته به هم.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11T71, 14H52.

۱. پیش‌گفتار

یک طرح تسهیم راز آستانه‌ای چند سطحی، سهام را در سطح‌های مختلفی توزیع می‌کند. سهام سطوح بالاتر می‌توانند در سطح پایین‌تر مورد استفاده قرار بگیرند، اما سهام سطوح پایین نمی‌توانند در سطح‌های بالاتر مورد استفاده قرار گیرند، با این حال برنامه‌های تسهیم راز چندسطحی محدود است و در مقابل حملات مشارکت غیرقانونی (IP) و تسخیر سهم (SC) آسیب پذیر است. در ادامه چند مفهوم را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ (طرح تسهیم راز آستانه‌ای چندگروهی). در صورت برآورده کردن شرایط زیر یک طرح، طرح تسهیم راز آستانه‌ای چند گروهی نامیده می‌شود:

۱) n سهام‌دار U_i که $i = ۱, ۲, \ldots, n$ و g گروه G_j که $j = ۱, ۲, \ldots, g$ در طرح وجود دارد. هر گروه دارای مقدار آستانه t_j که $j = ۱, ۲, \ldots, g$ است.

۲) یک سهام‌دار U_i در ابتدا به یک گروه G_j اختصاص داده می‌شود و فقط یک سهم را در این گروه نگه می‌دارد. جایی‌که G_j را گروه خانگی U_i صدا می‌زنیم و بر اساس U_i یک سهام‌دار بومی در G_j است. به‌عبارت دیگر U_i ممکن است اجازه شرکت در عملیات بازسازی راز گروه G_k دیگری که $j \neq k$ را داشته باشد. در این حالت U_i سهام‌دار مهاجر در گروه G_k نامیده می‌شود.

۳) در هر گروه G_j با تعداد N_j سهام‌دار (چه بومی و چه غیربومی) t_j یا بیشتر از t_j سهام‌دار قادر به بازسازی راز هستند و زمانی که سهام‌داران کمتر از t_j باشند، قادر به بازسازی راز نخواهند بود.

تعریف ۲.۱ (حمله IP). سهام‌داران هنگامی که در بازسازی راز شرکت می‌کنند مشارکت کننده خوانده می‌شوند. در حمله IP یک دشمن وانمود می‌کند یک سهام‌دار قانونی است اما بدون یک سهم معتبر و در بازسازی راز همراه t یا بیشتر از t سهام‌دار قانونی دیگر شرکت می‌کند.

(۱) اگر قرار باشد همه سهام‌داران سهام را به‌طور همزمان در ائتلاف جمع کنند، دشمن می‌تواند سهم اشتباهی را برای دیگران ارسال کند. وقتی دشمن همه سهام معتبر را دریافت کرد، می‌تواند راز اصلی را محاسبه کند. اما سهام‌داران دیگر نمی‌توانند راز صحیح را به‌دست آورند زیرا ممکن است سهام اشتباه را برای ارزیابی استفاده کنند. در این حالت دشمن راز صحیحی را به‌دست می‌آورد، در حالی که دیگران ممکن است موارد اشتباهی را به‌دست آورند.

* سخنران

(۲) اگر یک تسهیم راز نیاز نداشته باشد همه شرکت کنندگان سهام خود را همزمان منتشر کنند، دشمن همچنان می‌تواند منتظر دریافت سهام معتبر از دیگران باشد، تا زمانی که راز را بازسازی کند. با داشتن حداقل t سهم، دشمن می‌تواند یک سهم معتبر را جعل کند و آن را برای دیگران منتشر کند. در این روش دشمن می‌تواند راز یا سهم معتبر را بدون توجه به دیگران کشف کند. مدل این حمله مانند حمله فعال در رمزنگاری است.

تعریف ۳.۱ (حمله SC). در حمله SC یک دشمن نمی‌تواند در بازسازی راز شرکت کند، اما قصد دارد با گرفتن سهام از شرکت کنندگان قانونی، راز را به‌دست آورد. مدل این حمله مثل حمله غیر فعال در رمزنگاری است. در تسهیم راز آستانه‌ای هر جفت از شرکت کنندگان در طول عملیات بازسازی راز سهام را تبادل می‌کنند. اگر m $(m \geq t)$ سهامدار راز را بازسازی کنند، دشمن تنها نیاز دارد قبل از به‌دست آوردن راز، هر t پیام شرکت‌کنندگان را بگیرد که هر کدام سهمی را شامل می‌شود. بنابراین اگر یک طرح تسهیم راز آستانه‌ای یا تسهیم راز چند گروهی اطمینان حاصل کند دشمن باید تمام m پیام را قبل از کشف رمز بگیرد، قادر به جلوگیری از حمله SC خواهد بود.

تعریف ۴.۱ (طرح تسهیم راز آستانه‌ای چندگروهی وابسته به هم). یک طرح تسهیم راز چند گروهی را، طرح تسهیم راز چند گروهی وابسته به هم گوییم، هرگاه شرایط زیر را برآورده کند:

(۱) هر گروه G_j تعداد N_j سهامدار (چه بومی چه مهاجر) وجود دارد و آستانه گروه t_j است.
(۲) در هر گروه G_j هر t_j یا بیشتر از t_j سهامدار می‌توانند راز را بازسازی کنند و راز با کمتر از t_j سهامدار بازسازی نمی‌شود.
(۳) در هر گروه G_j، هر بار m $(t_j \leq m \leq N_j)$ سهامدار برای بازسازی راز همکاری می‌کنند، تنها در صورتی‌که هر کدام از آن‌ها واقعا با سهم معتبر خود در بازسازی راز شرکت کند، راز قابل بازسازی است.

۲. نتایج اصلی

در این بخش با الهام از طرح تسهیم راز چند سطحی هرن و میاو [۲] یک طرح تسهیم راز چندگروهی وابسته به هم ارائه شده است که قادر به شکستن حملات IP و SC است. طرح پیشنهادی شامل سه نهاد توزیع کننده، سهامدار و دشمن است.

اهداف امنیتی: تابع هسته تسهیم راز، از راز در برابر افشا شدن برای دشمن حفاظت می‌کند. بنابراین این طرح تضمین می‌کند که یک دشمن بدون سهم معتبر، نمی‌تواند راز را در هیچ گروهی به‌دست آورد. در مدل حمله فوق‌الذکر، طرح ما هدف دستیابی به اهداف زیر را دارد. این شبیه به تقلب آزاد تسهیم رازی است که توسط مارتین [۳] شرح داده شده است.

(۱) در هر گروه G_j، هر t_i یا بیشتر از t_i سهامدار می‌توانند راز را بازسازی کنند به شرط این‌که سهام همه آن‌ها معتبر باشد. این در حالی است که هر ائتلاف کمتر از t_i سهامدار قادر به بازسازی راز نخواهند بود.
(۲) هر کسی که در عملیات بازسازی راز شرکت نکند، نمی‌تواند با به‌دست آوردن حداکثر $(m-1)$پیام زمانی که m $(m \geq t_j)$ سهامدار در حال بازسازی راز گروه G_j هستند، راز را بازسازی کند. به‌عبارت دیگر باید در برابر حملات SC مقاوم باشد.
(۳) زمانی‌که m $(m \geq t_j)$ شرکت کننده برای بازسازی راز در گروه G_j همکاری می‌کنند، آن‌ها تنها زمانی می‌توانند راز را به‌دست آورند که هر یک از سهامداران، سهم معتبری داشته باشد. به‌عبارت دیگر اگر برخی از شرکت کنندگان سهم معتبری نداشته باشند، هیچ کس نمی‌تواند راز را به‌دست آورد. این تضمین می‌کند که این طرح می‌تواند حمله IP را شکست دهد.

تعریف نمادها

قبل از تشریح این طرح، ابتدا برخی از علائم مهم را که در جدول زیر آمده است تعریف می‌کنیم.

جدول ۱. معرفی برخی از نمادها.

نماد	مفهوم
G_i	گروه i-ام
N_i	تعداد کل سهام‌داران در گروه G_i
n_i	تعداد سهام‌داران بومی در گروه G_i
t_i	آستانه گروه G_i
U_k^i	k-امین سهام‌دار بومی در گروه G_i
s	راز اصلی
s_k^i	سهم خصوصی سهام‌دار U_k^i در گروه خانگی G_i
p_k^i	پیمانه بومی برای U_k^i در گروه G_i
$s_{k,i}^j$	سهم مهاجر برای U_k^i که در گروه G_j استفاده می‌شود.
$p_{k,i}^j$	پیمانه مهاجر برای U_k^i که در گروه G_j استفاده می‌شود.
$\Delta s_{k,i}^j$	تفاضل عمومی بین s_k^i و $s_{k,i}^j$

طرح اصلی

در طرح پیشنهادی ما، سهام‌داران در g گروه G_i که $i = ۱, ۲, \ldots, g$ تقسیم می‌شوند. هر سهام‌دار یک سهم را در گروه خانگی خود نگه می‌دارد. n_i و N_i به‌ترتیب به‌عنوان تعداد سهام‌داران بومی و کلیه سهام‌داران در G_i تعریف می‌شوند. هر گروه G_i دارای آستانه t_i است و $۱ \leq n_i \leq N_i$ و $۱ \leq t_i \leq N_i$ هیچ رابطه واضحی بین n_i و t_i وجود ندارد. یک سهام‌دار بومی یا سهام‌دار مهاجر از گروه G_i اگر در بازسازی راز شرکت کنند، به‌صورت یکسان شرکت کننده نامیده می‌شوند. با استفاده از طرح تسهیم راز پایه، در صورتی می‌توان راز را بازسازی کرد که t_i یا بیشتر از t_i شرکت‌کننده در گروه G_i باشند.

در قسمت بعد، طرح تسهیم راز چند گروهی وابسته به هم بر اساس طرح تسهیم راز آشموس-بلوم ارائه می‌شود که شامل سه مرحله به‌صورت ۱. تولید سهم ۲. حفاظت از سهم و ۳. بازسازی سهم است.

۱) تولید سهم: توزیع‌کننده یک عدد اول $p_۰$ انتخاب می‌کند و $Z_{p_۰}$ را به‌عنوان فضای راز تعریف می‌کند. برای هر گروه G_i، توزیع کننده دنباله‌ای از اعداد صحیح اول دو به دو متباین $p_۱^i < p_۲^i < \cdots < p_{N_i}^i$ انتخاب می‌کند به‌طوری که

$$(p_۰)^۲ p_{N_i-t_i+۲}^i p_{N_i-t_i+۳}^i \cdots p_{N_i}^i < p_۱^i p_۲^i \cdots p_{t_i}^i,$$

و $N_i(p_۰)^۳ < p_۱^i(p_۰ - ۱)$ و $\gcd(p_۰, p_k^i) = ۱$ که $k = ۱, ۲, \ldots, N_i$ و $(p_۰)^۲$ مربع $p_۰$ و $(p_۰)^۳$ مکعب $p_۰$ است. توزیع‌کننده ابتدا n_i عدد صحیح از N_i انتخاب می‌کند و p_i نظیر را به‌عنوان پیمانه بومی به هر سهامدار بومی اختصاص می‌دهد. بر این اساس، دیگر اعداد اول را به‌عنوان پیمانه مهاجر، برای سهامداران مهاجر در گروه مورد استفاده قرار می‌گیرد. به منظور جلوگیری از فاش شدن اطلاعات مربوط به سهام، سهام‌داران مهاجر در گروه G_i، باید پیمانه‌ای کوچکتر از پیمانه‌ای که در گروه خانگی خود دارند، داشته باشند. سپس توزیع کننده راز $s \in Z_{p_۰}$ و عدد صحیح تصادفی α_i را طوری که

$$p_{N_i-t_i+۲}^i p_{N_i-t_i+۳}^i \cdots p_{N_i}^i < y_i = s + \alpha_i p_۰ < p_۱^i p_۲^i \cdots p_{t_i}^i / p_۰,$$

انتخاب می‌کند تا مطمئن شود مقدار y_i در برد t_i-آستانه‌ای

$$(p_{N_i-t_i+۲}^i p_{N_i-t_i+۳}^i \cdots p_{N_i}^i, p_۱^i p_۲^i \cdots p_{t_i}^i / p_۰)$$

می‌افتد. در نهایت توزیع کننده $s_k^i = y_i \mod p_k^i$ را محاسبه کرده و آن را برای سهام‌دار U_k^i به‌صورت محرمانه می‌فرستد. بنابراین U_k^i یک سهام‌دار بومی در G_i است.

اگر U_k^i یک سهام‌دار بومی از گروه G_i باشد، اجازه شرکت در بازسازی راز در گروه G_j که $i \neq j$ را دارد. توزیع

کننده باید اطلاعات اضافی مربوط به G_j را برای سهام‌داران ایجاد کند. به‌طور دقیق توزیع کننده یک عدد صحیح تصادفی α انتخاب می‌کند به‌طوری‌که

$$p^j_{N_j-t_j+۲}p^j_{N_j-t_j+۳}\cdots p^j_{N_j} < y_j = s+\alpha_j i p_\circ < p^j_۱p^j_۲\cdots p^j_{t_j}/p_\circ,$$

و مقدار $p^j_۱, p^j_۲, \ldots, p^j_{N_j}$ را محاسبه می‌کند، جایی‌که $\Delta s^j_{k,i} = (s+\alpha_j p_\circ - s^i_k) \mod p^j_{k,i}$ از دنباله $p^j_{k,i}$ با $p^j_{k,i} < p_k j^i$ انتخاب شده است. سپس توزیع کننده $\Delta s^j_{k,i}$ و $p^j_{k,i}$ را به‌صورت عمومی می‌سازد. به‌طور مشخص زمانی که U^i_k در عملیات بازسازی راز گروه G_j به‌عنوان سهام‌دار مهاجر شرکت می‌کند، از $p^j_{k,i}$ به‌عنوان پیمانه مهاجر و از

$$s^j_{k,i} = (s^i_k + \Delta s^j_{k,i}) = (s+\alpha_j p_\circ) \mod p^j_{k,i},$$

به‌عنوان سهم جدید در گروه G_j استفاده می‌کند.

تذکر ۱. اگرچه توزیع کننده برخی از مقادیر عمومی $\Delta s^j_{k,i}$ را منتشر می‌کند، هیچ اطلاعاتی در مورد راز s نمی‌تواند از آن گرفته شود و دلیل آن این است که

$$\begin{aligned}\Delta s^j_{k,i} &= (s+\alpha_j p_\circ - s^i_k) \mod p^j_{k,i}\\ &= \big(s+\alpha_j p_\circ - (s+\alpha_i p_\circ)\big) \mod p^j_{k,i}\\ &= (s+\alpha_j p_\circ - s - \alpha_i p_\circ + \beta p^i_k) \mod p^j_{k,i}\\ &= \big((\alpha_j-\alpha_i)p_\circ + \beta p^i_k\big) \mod p^j_{k,i}, \qquad (۱)\end{aligned}$$

جایی‌که β یک عدد صحیح تصادفی است. به‌طور مشخص راز s از معادله (۱) به‌دست نمی‌آید، که این بدان معنی است که $\Delta s^j_{k,i}$ هیچ اطلاعاتی را در مورد راز s فاش نمی‌کند.

تذکر ۲. در طرح ما، توزیع کننده پیمانه‌های زیادی را در گروه G_j انتخاب می‌کند. از بعضی از آن‌ها برای محاسبه سهام سهام‌داران مهاجر استفاده می‌کند و تضمین می‌کند که وجود $p^i_{k,j}$ با $p^i_{k,j} > p^i_k$ امکان پذیر است. این تضمین می‌کند که اطلاعات عمومی $\Delta s^j_{k,i}$ هیچ اطلاعاتی را در مورد $s^j_{k,i}$ فاش نمی‌کند. از این رو یک سهام‌دار فقط یک سهم را به‌صورت خصوصی نگه می‌دارد در حالی‌که $\delta s^j_{k,i}$ و $p^i_{k,j}$ به‌صورت عمومی ساخته می‌شوند. دشمن می‌خواهد بازه $[\Delta s^j_{k,i}, \Delta s^j_{k,i}+p^i_k] \mod p^j_{k,i}$ در مورد سهم جدید $s^j_{k,i}$ در گروه G_j به‌دست آورد. با این وجود سهم مهاجر باید برای دشمن $[\circ, p^j_{k,i})$ تمام شود. اگر $p^j_{k,i} > p^i_k$ نگه داریم، $[\Delta s^j_{k,i}, \Delta s^j_{k,i}+p^i_k] \mod p^j_{k,i}$ زیربازه $[\circ, p^j_{k,i})$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر دشمن بازه $s^j_{k,i}$ را محدودتر می‌کند. بنابراین پیمانه بومی p^i_k باید بزرگتر از پیمانه مهاجر $p^j_{k,i}$ باشد. به‌طور دقیق‌تر تنها مشکل این است که ممکن است مقدار $s^j_{k,i}$ دارای توزیع یکنواخت در بازه $Z_{p^j_{k,i}}$ نباشد. احتمال این‌که این مقدار در بازه $[\Delta s^j_{k,i}, \Delta s^j_{k,i}+(p^i_k-۱) \mod p^j_{k,i}] \mod p^j_{k,i}$ باشد $\lceil p^i_k/p^j_{k,i}\rceil/p^i_k$ است و احتمال دیگر مقادیر $\lfloor p^i_k/p^j_{k,i}\rfloor/p^i_k$ است. حتی در این‌صورت دشمن با استفاده از اطلاعات عمومی نمی‌تواند برد $s^j_{k,i}$ را کشف کند.

۲) حفاظت از سهم: فرض کنید m ($t_i \le m \le N_i$) سهام‌دار بازسازی راز در گروه G_i شرکت کنند. به‌عنوان یک سهام‌دار مهاجر بین U^j_k با سهم s^j_k در گروه خانگی G_j سهم جدید $s^j_{k,i} = s^j_k + \Delta s^j_{k,i}$ در G_i قبل از بازسازی راز محاسبه می‌کند. در این حالت هر یک از شرکت کنندگان چه مهاجر و چه بومی در G_i سهم دارند. برای راحتی ما دوباره هر یک از m شرکت‌کننده را U_{m_k} نام‌گذاری می‌کنیم با سهم s_{m_k} و پیمانه p_{m_k} که $k = ۱, ۲, \ldots, m$. قبل از بازسازی راز هر شرکت کننده به‌عنوان مثال U_{m_k}، یک مؤلفه تصادفی

$$s_{m_k} = \left(s_{m_k}\left(\frac{N}{p_{m_k}}\right)\alpha_{m_k} + r_{m_k}\left(\frac{N}{p_{m_k}}\right)p_\circ\right) \mod N,$$

می‌سازد که $N = \prod_{k=1}^{m} p_{m_k}$ و $\left(\frac{N}{p_{m_k}}\right) \alpha_{m_k} \mod p_{m_k} = 1$ یک عدد صحیح تصادفی است که توسط U_{m_k} در Z_{p_0} انتخاب شده است.

تذکر ۳. برای دفاع در برابر حملات IP و SC هر سهام‌دار به‌عنوان مثال U_{m_k} یک مؤلفه تصادفی $s^*_{m_k}$ با سهم آن s_{m_k} و عدد صحیح تصادفی $r_{m_k} \in Z_{p_0}$ و پیمانه تمام شرکت کنندگان قبل از بازسازی راز می‌سازد. به‌طور مشخص سرورهای مؤلفه تصادفی $s^*_{m_k}$ به‌عنوان دو تابع هستند که یکی از سهم s_{m_k} محافظت می‌کند و دیگری همه سهام‌داران را به هم وصل می‌کند. علت آن است که مؤلفه تصادفی هر یک از شرکت‌کنندگان به‌عنوان مثال $s^*_{m_k}$ شامل N محصول تمام پیمانه‌ها است و بنابراین سهم s_{m_k} را بدون دانستن عدد تصادفی r_{m_k} نمی‌توان از مؤلفه $s^*_{m_k}$ جدا کرد.

۳) بازسازی راز: هر یک از شرکت‌کنندگان به‌عنوان مثال U_{m_k}، مؤلفه $s^*_{m_k}$ برای دیگر $(m-1)$ شرکت‌کننده از طریق کانال امن ارسال می‌کنند. با دریافت تمامی مؤلفه‌ها، U_{m_k} راز را با محاسبه

$$s = \sum_{k=1}^{m} s^*_{m_k} \mod N \mod p_0,$$

به‌دست می‌آورد. پس از این‌که راز در یک گروه بازسازی شد، دیگر راز طبقه بندی نمی‌شود زیرا که طرح یک طرح تسهیم راز واحد است.

راستی آزمایی

در طرح پیشنهادی اگر $m (t_j \leq m \leq N_j)$ شرکت‌کننده بتوانند راز را در گروه G_i بازسازی کنند، این بدین معنی است که

$$s = \sum_{k=1}^{m} s^*_{m_k} \mod N \mod p_0.$$

حال اجازه دهید فرض کنیم $p_{m_1} < p_{m_2} < \cdots < p_{m_m}$ بدون از دست دادن کلیت، ما معادله را در ۲ مرحله اثبات می‌کنیم.

اثبات. مرحله اول:

$$y_i + \sum_{k=1}^{m} r_{m_k}(N/p_{m_k})p_0 < N.$$

برای این منظور داریم

$$\begin{aligned} y_i + \sum_{k=1}^{m} r_{m_k}(N/p_{m_k})p_0 &< y_i + \sum_{k=1}^{m} \frac{p_0^2 N}{p_{m_k}} \\ &< y_i + m p_0^2 N/p_{m_1} \\ &< y_i + N_i p_0^2 N/p_{m_1} \\ &< y_i + (p_0) - 1 N/p_0 \\ &< \frac{N}{p_0} + (p_0 - 1)N/p_0 \\ &< N. \end{aligned}$$

تذکر ۱: $r_{m_k} \in Z_{p_0}$.
تذکر ۲: $p_{m_1} \geq p_1^i$. در جایی‌که p_1^i کوچک‌ترین پیمانه در G_i است.
تذکر ۳: $N_i p_0^3 < p_1^i(p_0) - 1$،

$.y_i < (p_1^i p_2^i \cdots p_{t_i})/p_0$
مرحله دوم:

$$\sum_{k=1}^{m} s^*_{m_k} \mod N \mod p_0 = s.$$

برای این منظور داریم

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} s^*_{m_k} \mod N \mod p_0 \\
&= \left\{ \sum_{k=1}^{m} (s_{m_k}(N/p_{m_k})\alpha_{m_k} + r_{m_k}(N/p_{m_k})p_0) \mod N \right\} \mod p_0 \\
&= \left\{ \left(\sum_{k=1}^{m} s_{m_k} \left(\frac{N}{p_{m_k}} \right) \alpha_{m_k} \mod N + \sum_{k=1}^{m} r_{m_k} \left(\frac{N}{p_{m_k}} \right) p_0 \right) \mod N \right\} \mod p_0 \\
&= \left\{ (y_i + \sum_{k=1}^{m} r_{m_i}(\frac{N}{p_{m_k}})p_0) \mod N \right\} \mod p_0 \\
&= \left(s + \alpha p_0 + \sum_{k=1}^{m} r_{m_i}(N/p_{m_k})p_0 \right) \mod p_0 \\
&= s.
\end{aligned}$$

□

۳. دستاوردهای پژوهش

در این مقاله یک طرح تسهیم راز چندگروهی وابسته به هم ارائه شده که نه تنها نسبت به حملات IP و SC مقاوم است بلکه بسیار انعطاف پذیر است.

مراجع

1. C. Asmuth and J. Bloom, *A modular approach to key safeguarding*, IEEE Trans. Info. Theory **29** (2) (1983) 208–210.
2. L. Harn and F. Miao, *Multilevel threshold secret sharing based on the Chinese Remainder Theorem*, Info. Proc. Lett. **114** (9) (2014) 504–509.
3. K. M. Martin, *Challenging the adversary model in secret sharing schemes*, Coding and Cryptography II, Proceedings of the Royal Flemish Academy of Belgium for Science and the Arts, (2008) pp. 45–63.
4. P. V. Siva Kumar, R. R. Kurra, T. A. Naidu and G. Padmavathi, *Multi-Level secret sharing scheme for mobile Ad-Hoc networks*, Int. J. Adv. Network. Appl. **6** (2) (2014) 2253–2261.

پست الکترونیکی: saeedjohari19937143@gmail.com

انتقال بی‌اطلاع با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته خم‌های بیضوی

مریم رضایی کاشی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و مجتبی بهرامیان
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. یک پروتکل انتقال بی اطلاع پروتکلی است که در آن فرستنده پیامی را برای گیرنده می‌فرستد و گیرنده با احتمال ثابتی پیام را دریافت می‌کند، در حالی‌که فرستنده نسبت به این‌که گیرنده پیام را دریافت کرده یا نه بی‌اطلاع می‌ماند. در این مقاله به بیان یک پروتکل انتقال بی‌اطلاع با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته‌ی خم‌های بیضوی می‌پردازیم. امنیت این پروتکل بر سختی مسأله‌ی لگاریتم گسسته روی گروه ژاکوبین تعمیم یافته بنا شده است.
واژه‌های کلیدی: انتقال بی‌اطلاع، ژاکوبین تعمیم یافته، خم‌های بیضوی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11T71, 14H52.

۱. پیش‌گفتار

در این بخش ابتدا با خم‌های بیضوی و ژاکوبین تعمیم یافته آشنا می‌شویم، سپس مقدمه‌ای کوتاه در مورد انتقال بی‌اطلاع بیان می‌کنیم.

۱.۱. خم‌های بیضوی. فرض کنید $\mathbb{F}_q$ میدان متناهی از مرتبه‌ی $q = p^n$ باشد، که در آن n یک عدد طبیعی و p یک عدد اول مخالف با ۲ و ۳ است. خم بیضوی E روی میدان $\mathbb{F}_q$ یک خم تعریف شده با معادله‌ای به شکل

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

است که در آن $a, b \in \overline{\mathbb{F}}_q$ و $4a^3 + 27b^2 \neq 0$. مجموعه نقاط $\mathbb{F}_q$-گویا از E به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$E(\mathbb{F}_q) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\},$$

که در آن $\mathcal{O}$ نقطه در بی‌نهایت خم E است. نقاط روی خم E با عمل زیر یک گروه آبلی با عنصر همانی $\mathcal{O}$ تشکیل می‌دهد. فرض کنید $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ نقاطی از E باشند که $P_1, P_2 \neq \mathcal{O}$. قرار می‌دهیم $P_1 + P_2 = P_3 = (x_3, y_3)$ که

(۱) اگر $x_1 = x_2$ و $y_1 \neq y_2$ آنگاه $P_2 = -P_1$ بنابراین $P_3 = \mathcal{O}$.
(۲) اگر $x_1 \neq x_2$ آنگاه $x_3 = m^2 - x_2 - x_1$ و $y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1$ که در آن $m = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$.
(۳) اگر $P_1 = P_2$ و $y_1 \neq 0$ آنگاه $x_3 = m^2 - 3x_1$ و $y_3 = m(x_1 - x_3) - y_1$ که در آن $m = (3x_1^2 + a)/(2y_1)$.
(۴) اگر $P_1 = P_2$ و $y_1 = 0$ آنگاه $P_3 = \mathcal{O}$.
(۵) برای هر نقطه P از E، $P + \mathcal{O} = \mathcal{O} + P = P$.

بخش‌یاب D روی E یک ترکیب خطی از نمادهای (P) به شکل $D = \sum_{P \in E} n_P(P)$ است که در آن برای هر نقطه P، $n_P \in \mathbb{Z}$ و تنها تعداد متناهی از n_P ها ناصفر هستند. درجه و مجموع بخش‌یاب $D = \sum_{P \in E} n_P(P)$ به ترتیب عبارتند از $deg(D) = \sum_{P \in E(\overline{\mathbb{F}}_q)} n_P$ و $sum(D) = \sum_{P \in E(\overline{\mathbb{F}}_q)} n_P P$. به‌علاوه مجموعه $Supp(D) = \{P \in E | n_P \neq 0\}$، محمل D نامیده می‌شود.

* سخنران

مجموعه همه بخش‌یاب‌های خم E یک گروه آبلی آزاد تشکیل می‌دهد که با نماد $Div(E)$ نمایش داده می‌شود. در واقع برای $D_1 = \sum_{P\in E} n_P(P)$ و $D_2 = \sum_{P\in E} n'_P(P)$ قرار می‌دهیم:

$$D_1 + D_2 = \sum_{P\in E} (n_P + n'_P)(P).$$

زیرگروه $Div(E)$ شامل همه بخش‌یاب‌ها از درجه صفر با نماد $Div^{\circ}(E)$ نمایش داده می‌شود. بخش‌یاب $D = \sum_P n_P(P)$ مثبت نامیده می‌شود هرگاه برای هر $P \in Supp(D)$، $n_P > 0$. دو بخش‌یاب D و D' را متباین گوییم هرگاه

$$Supp(D) \cap Supp(D') = \emptyset.$$

فرض کنید E یک خم بیضوی با معادله وایرشتراس $y^2 = x^3 + ax + b$ باشد. حلقه‌ی $\overline{\mathbb{F}}_q[E] = \overline{\mathbb{F}}_q[X]/\langle y^2 - x^3 - ax - b\rangle$ یک دامنه‌ی صحیح است که میدان کسرهای آن، $\overline{\mathbb{F}}_q(E)$، میدان تابعی E نامیده می‌شود. برای هر $P \in E(\overline{\mathbb{F}}_q)$،

$$M_P = \{f \in \overline{\mathbb{F}}_q[E] \mid f(P) = 0\},$$

یک ایده‌آل ماکسیمال از $\overline{\mathbb{F}}_q[E]$ است.

فرض کنید $P \in E$ و $f \in \overline{\mathbb{F}}_q[E]$. مرتبه‌ی f در P به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$ord_P(f) = sup\{d \in \mathbb{Z} \mid f \in M_P^d\}.$$

با استفاده از تعریف $ord(f/g) = ord(f) - ord(g)$، ord_P را می‌توان به $\overline{\mathbb{F}}_q(E)$ گسترش داد. اگر $f \in \overline{\mathbb{F}}_q(E)$، آن‌گاه بخش‌یاب $div(f) = \sum_{P\in E} ord_P(f)(P)$ بخش‌یاب اصلی نامیده می‌شود. مجموعه همه بخش‌یاب‌های اصلی را با نماد $Princ(E)$ نمایش می‌دهیم. دو بخش‌یاب D و D' را هم‌ارز خطی می‌نامیم هرگاه برای یک $f \in \overline{\mathbb{F}}_q(E)^*$ داشته باشیم $D - D' = div(f)$. این رابطه را با نماد $D \sim D'$ نمایش می‌دهیم. برای مطالعه‌ی بیشتر در زمینه خم‌های بیضوی می‌توانید به [۳، ۷] مراجعه فرمایید.

۲.۱. **ژاکوبین تعمیم یافته.** فرض کنید E یک خم بیضوی روی $\mathbb{F}_q$ با معادله $y^2 = x^3 + ax + b$، $\mathfrak{m} = \sum_{P\in E} m_P(P)$ یک بخش‌یاب مثبت و $S_{\mathfrak{m}}$ محمل آن باشد. فرض کنید بخش‌یاب‌های D و D' متباین باشند. می‌گوییم D و D'، $\mathfrak{m}$-هم‌ارز یا به عبارت دیگر به پیمانه‌ی $\mathfrak{m}$ هم‌ارز هستند و می‌نویسیم $D \sim_{\mathfrak{m}} D'$، اگر D و D' هم‌ارز خطی باشند و

$$\forall P \in S_{\mathfrak{m}},\ ord_P(1 - f) \geq m_P.$$

کلاس $\mathfrak{m}$-هم‌ارزی بخش‌یاب D را با $[D]_{\mathfrak{m}}$ نمایش می‌دهیم. مجموعه بخش‌یاب‌ها روی E متباین با $\mathfrak{m}$ را با نماد $Div_{\mathfrak{m}}(E)$ نمایش می‌دهیم. همچنین زیرگروه $Div_{\mathfrak{m}}(E)$ شامل تمام بخش‌یاب‌های از درجه صفر و متباین با $\mathfrak{m}$ را با نماد $Div^{\circ}_{\mathfrak{m}}(E)$ نمایش می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$Princ_{\mathfrak{m}}(E) = [o]_{\mathfrak{m}} = \{div(f) | f \in \overline{\mathbb{F}}_q(E)^*, \forall P \in S_{\mathfrak{m}}, ord_P(1 - f) \geq m_P\}.$$

حال، گروه خارج قسمتی $\dfrac{Div^{\circ}_{\mathfrak{m}}(E)}{Princ_{\mathfrak{m}}(E)}$ را در نظر گرفته و آن را با نماد $Pic^{\circ}_{\mathfrak{m}}(E)$ نمایش می‌دهیم. در [۶] اثبات شده است که برای هر پیمانه‌ی $\mathfrak{m}$ یک گروه جبری $J_{\mathfrak{m}}$ یکریخت با $Pic^{\circ}_{\mathfrak{m}}(E)$ وجود دارد. گروه جبری $J_{\mathfrak{m}}$ ژاکوبین تعمیم یافته نسبت به پیمانه‌ی $\mathfrak{m}$ نامیده می‌شود.

قضیه ۱.۱. فرض کنید E یک خم بیضوی و بخش‌یاب $\mathfrak{m} = (M) + (N)$ یک پیمانه باشد که در آن M و N دو نقطه متناهی و متمایز از E هستند، در این صورت هر عنصر از $J_{\mathfrak{m}}$ قابل نمایش به صورت (k, P) است،

که در آن $k \in \mathbb{F}_q^*$ و $P \in E(\mathbb{F}_q)$ و به‌علاوه برای $(k_1, P_1), (k_2, P_2) \in J_{\mathfrak{m}}$ که $P_1, P_2, \pm(P_1 + P_2) \notin \{M, N\}$، عمل زیر روی $J_{\mathfrak{m}}$ تعریف می‌شود:

$$(k_1, P_1) + (k_2, P_2) = (k_1 k_2 \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_1, P_2), P_1 + P_2), \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{c}_{\mathfrak{m}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{F}_q^*$

$$\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_1, P_2) = \frac{l_{P_1,P_2}(M)}{l_{P_1+P_2,O}(M)} \frac{l_{P_1+P_2,O}(N)}{l_{P_1,P_2}(N)},$$

و $l_{P,Q}$ معادله خط گذرنده از P و Q است. توجه کنید که اگر $P = Q$، $l_{P,P}$ خط مماس بر خم در نقطه P است. با عمل تعریف شده $J_{\mathfrak{m}}$ یک گروه آبلی است. در واقع:

(۱) $(1, \mathcal{O})$ عنصر همانی $J_{\mathfrak{m}}$ است.
(۲) $J_{\mathfrak{m}}$ آبلی است، زیرا $\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_1, P_2) = \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_2, P_1)$.
(۳) قرینه‌ی عنصر $(k, P) \in J_{\mathfrak{m}}$ عبارت است از $-(k, P) = (\frac{1}{k} \frac{l_{P,\mathcal{O}(N)}}{l_{P,\mathcal{O}(M)}}, -P)$.

اینک به ازای عدد صحیح و مثبت n فرض کنید $\alpha_n(P)$ مؤلفه‌ی اول $n(1, P)$ باشد. به راحتی می‌توان دید

$$\alpha_n(P) = \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P, P)\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P, 2P) \dots \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P, (n-1)P),$$

و به‌علاوه برای هر $(k, P) \in J_{\mathfrak{m}}$، داریم $n(k, P) = (k^n \alpha_n(P), nP)$. همچنین برای هر دو عدد صحیح و مثبت m و n،

الف) $\alpha_{m+n}(P) = \alpha_m(P)\alpha_n(P)\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(mP, nP)$.
ب) $\alpha_{mn}(P) = \alpha_n(P)^m \alpha_m(nP) = \alpha_m(P)^n \alpha_n(mP)$.

اثبات. برای مشاهده‌ی اثبات قضیه و اطلاعات بیشتر در مورد ژاکوبین تعمیم یافته می‌توانید به [۱، ۲] مراجعه فرمایید. □

۳.۱. **انتقال بی‌اطلاع.** انتقال بی‌اطلاع یکی از ابزارهای مهم در رمزنگاری به شمار می‌رود که به‌طور وسیع برای طراحی یک پروتکل امن در محاسبات محرمانه به کار می‌رود. در یک طرح انتقال بی‌اطلاع، یک فرستنده پیامی را به یک گیرنده می‌فرستد به‌طوری‌که گیرنده، پیام را با یک احتمال ثابت بین صفر و یک دریافت می‌کند، در حالی که فرستنده نسبت به این‌که گیرنده پیام را دریافت کرده یا نه بی‌اطلاع می‌ماند.

ایده انتقال بی‌اطلاع توسط رابین [۵] در سال ۱۹۸۱ برای حل مسأله تبادل اطلاعات پیام‌ها بین دو طرف غیرمعتمد بدون نیاز به طرف سوم معتمد و بدون مبادله دوطرفه پیام معرفی شد. طرحی که توسط رابین پیشنهاد داده شد بر پایه سیستم رمز RSA بنا شده است.

در سال ۲۰۰۷، پاراک [۴] یک پروتکل انتقال بی‌اطلاع با استفاده از رمزنگاری خم بیضوی معرفی کرد.

در این مقاله یک پروتکل انتقال بی‌اطلاع با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته یک خم بیضوی ارائه می‌دهیم که بر مبنای سختی لگاریتم گسسته روی ژاکوبین تعمیم یافته بنا شده است. در این سیستم برخلاف سیستم پاراک نیاز به تبدیل پیام به یک نقطه از خم نیست.

۲. نتایج اصلی

در این قسمت هدف، ارائه یک الگوریتم برای مبادله کلیدهای خصوصی n_A و n_B بین دو طرف آلیس و باب بدون نیاز به طرف سوم مورد اعتماد و بدون مبادله همزمان اطلاعات است. در واقع یک الگوریتم برای انتقال بی‌اطلاع کلید محرمانه n_A از سوی آلیس به باب با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته خم‌های بیضوی بیان می‌کنیم که باب نیز می‌تواند از همین روش برای انتقال کلید خصوصی خود به آلیس استفاده کند.

ابتدا آلیس و باب روی خم بیضوی $E : y^2 = x^3 + ax + b$ روی میدان $\mathbb{F}_q$ که $q = p^n$ و p یک عدد اول به اندازه کافی بزرگ ($p \approx 2^{160}$) است و بخش‌یاب $\mathfrak{m} = (M) + (N)$ که در آن M و N دو نقطه متمایز

از خم هستند به توافق می‌رسند. سپس $x \in \mathbb{F}_q$ را انتخاب می‌کنند و آن را مؤلفه اول دو نقطه P_1 و P_2 روی خم قرار می‌دهند در این صورت $P_1 = -P_2$. انتخاب x باید به گونه‌ای باشد که $M, N \notin \langle P_1 \rangle$. حال آلیس از بین دو نقطه P_1 و P_2 یکی را به صورت محرمانه انتخاب می‌کند که آن را P_A می‌نامیم و باب نیز به همین صورت P_B را انتخاب می‌کند. عنصر همانی نسبت به عمل ضرب در میدان $\mathbb{F}_q$ را با نماد $1_{\mathbb{F}_q}$ نمایش می‌دهیم. حال فرض کنید آلیس بخواهد کلید محرمانه n_A را که در آن $n_A < p$ برای باب ارسال کند. آلیس و باب مراحل زیر را برای انتقال بی‌اطلاع n_A انجام می‌دهند:

(۱) باب با استفاده از کلید خصوصی n_B، که $n_B < p$،

$$n_B(1, P_B) = (\alpha_{n_B}(P_B), n_B P_B),$$

را محاسبه کرده و برای آلیس ارسال می کند.

(۲) آلیس $K_A = \alpha_{n_B}(P_B)^{n_A} \alpha_{n_A}(n_B P_B)$ را محاسبه کرده، سپس $M_A = n_A 1_{\mathbb{F}_q} + K_A$ و $n_A(1, P_A) = (\alpha_{n_A}(P_A), n_A P_A)$ را برای باب می‌فرستد.

(۳) باب $K_B = \alpha_{n_A}(P_A)^{n_B} \alpha_{n_B}(n_A P_A)$ را محاسبه کرده و $M_B = M_A - K_B$ را به‌دست می‌آورد. حال طبق تذکر ۱.۲ باب با احتمال $\frac{1}{2}$ کلید خصوصی آلیس را دریافت می‌کند.

نکته ۱.۲. در آخرین مرحله این الگوریتم دو حالت وجود دارد:

(۱) $P_A = P_B$.
در این صورت طبق قضیه ۱.۱، $K_A = K_B$ و در نتیجه $M_B = n_A 1_{\mathbb{F}_q}$ و باب پیام آلیس را دریافت می‌کند.

(۲) $P_A = -P_B$.
در این صورت $K_A \neq K_B$ و در نتیجه $M_B \neq n_A 1_{\mathbb{F}_q}$ و باب پیام آلیس را دریافت نمی‌کند.

نکته ۲.۲. در مرحله آخر از الگوریتم، باب باید بررسی کند که آیا کلید خصوصی آلیس را دریافت کرده یا نه. برای این کار فرض کنید c مقداری باشد که باب در مرحله آخر به‌دست آورده است، در این صورت باب $\alpha_c(P_1)$ و $\alpha_c(P_2)$ را محاسبه می‌کند. در صورتی که یکی از این دو عدد برابر با $\alpha_{n_A}(P_A)$ باشد، باب می‌تواند به این اطمینان برسد که $c = n_A$ و کلید آلیس را دریافت کرده است، در غیر این‌صورت باب کلید خصوصی آلیس را دریافت نکرده است.

نکته ۳.۲. آلیس و باب روی x باید طوری به توافق برسند که مرتبه P_1 دو نباشد، زیرا در غیراین‌صورت $P_1 = -P_2$ و باب همواره پیام آلیس را دریافت می‌کند.

در ادامه مثالی ساده برای فهم بهتر الگوریتم بیان می‌کنیم.

مثال ۴.۲. فرض کنید آلیس و باب روی خم $E : y^2 = x^3 + 2x + 3$ بر میدان $\mathbb{F}_{97}$، $M = (4, 50)$، $N = (12, 3)$ و $x = 1$ به توافق رسیده باشند، فرض کنید آلیس بخواهد $n_A = 64$ را به روش انتقال بی‌اطلاع برای باب ارسال کند. توجه کنید که $P_1 = (1, 54)$ و $P_2 = (1, -54)$. فرض کنید آلیس $P_A = P_1$ و باب $P_B = P_1$ را انتخاب کرده باشند آلیس و باب مراحل زیر را اجرا می‌کنند.

(۱) باب $n_B = 81$ را انتخاب کرده و $n_B(1, P_B) = 81(1, (1, 54)) = (77, (49, 34))$ $(\alpha_{n_B}(P_B), n_B P_B)$ را محاسبه می کند و برای آلیس می فرستد.

(۲) آلیس $K_A = \alpha_{n_B}(P_B)^{n_A} \alpha_{n_A}(n_B P_B) = 77^{64} \times 69 = 69 \in \mathbb{F}_{97}$ را محاسبه کرده و

$$M_A = n_A 1_{\mathbb{F}_{97}} + K_A = 64 + 69 = 36, n_A(1, P_A) = 64(1, (1, 54)) = (88, (74, 20)),$$

را برای باب می‌فرستد.

(۳) باب $K_B = \alpha_{n_A}(P_A)^{n_B} \alpha_{n_B}(n_A P_A) = 88^{81} \times 55 = 69$ را محاسبه می کند و

$$n_A 1_{\mathbb{F}_{97}} = M_A - K_B = 36 - 69 = 64,$$

را به‌دست می‌آورد.

۳. دست‌آوردهای پژوهش

در این مقاله یک الگوریتم برای انتقال بی‌اطلاع با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته‌ی خم‌های بیضوی ارائه کردیم، که امنیت آن بر سختی مسأله لگاریتم گسسته روی ژاکوبین تعمیم یافته بنا شده است.

مراجع

1. I. Dechene, *Generalized Jacobians in Cryptography*, PhD thesis, McGill University, 2005.
2. I. Dechene, *Arithmetic of generalized jacobians*, Algorithmic Number Theory, Lecture Notes in Comput. Sci. 4076, Springer, Berlin, (2006) 421–43
3. J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1992.
4. A. Parakh, *Oblivious transfer using elliptic curves*, Cryptologia, **31** (2007) 125–132.
5. M. Rabin, *How to exchange secrets by oblivious transfer*, Technical Report TR-81, Aiken Computation Lab, Harvard University, 1981.
6. M. Rosenlicht, *Generalized jacobian varieties*, Annals of Mathematics, **59** (1954) 505–530.
7. C. Washington, *The Elliptic Curves Number Theory and Cryptography*, Chapman and Hall/CRC, London, 2008.

پست الکترونیکی: mrezaei.k@grad.kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: bahramianh@kashanu.ac.ir

پروتکل تبادل کلید دیفی-هلمن در رمزنگاری مشبکه-مبنا

جواد شرفی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و حسن دقیق
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله یک پروتکل توافق کلید غیر تعاملی با تعداد دورهای اجرای کم مبتنی بر یک مسأله ی سخت مشبکه ای (مسأله‌ی یادگیری با خطای حلقه‌ای) ارائه می کنیم. ساختار پروتکل بدون استفاده از مکانیزم تلفیق و فقط با ارتباط دادن بردارهای خطای طرفین طراحی شده است؛ به این‌صورت که با نزدیکتر شدن بردارهای خطا احتمال موفقیت پروتکل افزایش می‌یابد. ایده‌ی نوین به‌کار رفته در این طرح، استفاده از بیت‌های مرتبه‌ی بالا در کلیدهای محاسبه شده توسط طرفین است که منجر به کاهش پیچیدگی محاسبات و البته افزایش طول پارامترها (نسبت به پروتکل‌های توافق کلید مشبکه مبنای موجود) می‌شود. مجموعه پارامترهای پیشنهادی در این طرح، سطح امنیتی ۲۵۶ بیتی با یک پیام ۴۸ کیلو بایتی را تأمین می‌کنند و با توجه به ساختار پروتکل، استفاده از آن در سامانه رمزهای ترکیبی و هم‌چنین در مواقع محدود بودن دسترسی به اینترنت پیشنهاد می‌شود. در واقع در حالت ایده‌آل، برای یک کلید عمومی ثابت، تعداد دور اجراهای مورد نیاز برای پیاده‌سازی این پروتکل صفر خواهد بود.
واژه‌های کلیدی: الگوریتم توافق کلید، رمزنگاری مشبکه-مبنا، مسأله‌ی یادگیری با خطا.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11T71, 81P94, 94A60.

۱. پیش‌گفتار

در دنیای مدرن امروزی، هر روز میلیاردها ارتباطات اینترنتی به وسیله‌ی رمزنگاری کلید عمومی محافظت می‌شوند، که لازم است در برابر حملات مختلف امن باشند. در همه‌ی پروتکل‌های ارتباطی امن، مانند TLS، از رمزنگاری کلید عمومی برای ایجاد یک اولیه‌ی رمزنگاری به نام ''توافق کلید'' استفاده می‌شود، که در کانال‌های ارتباطی برای توافق طرفین روی یک کلید مشترک استفاده می‌شود. کلید مشترک حاصل شده در سایر اولیه‌های رمزنگاری مانند رمزنگاری متقارن یا کدهای احراز اصالت به‌کار برده می‌شود. اولین و معروف‌ترین اولیه‌ی توافق کلید یعنی پروتکل دیفی-هلمن [۵] در سال ۱۹۷۶ میلادی معرفی شد. پارامترهای عمومی در این پروتکل، شامل گروه ضربی $\mathbb{Z}_p^*$ (p یک عدد اول) همراه با یک ریشه‌ی اولیه‌ی واحد g به پیمانه‌ی p است.

جدول ۱. پروتکل توافق کلید دیفی-هلمن [۵].

آرش		بابک
$a \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$		$b \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$
$\mathbf{A} = g^a \pmod p$		$\mathbf{B} = g^b \pmod p$
	$\xleftarrow{\mathbf{A}}$	
	$\xrightarrow{\mathbf{B}}$	
$s = \mathbf{B}^a \pmod p$		$s = \mathbf{A}^b \pmod p$

از طرفی امنیت اکثر سامانه‌های رمز کلید عمومی (از جمله پروتکل دیفی-هلمن)، مبتنی بر سختی حل یک مسأله‌ی سخت ریاضی مانند تجزیه‌ی یک عدد صحیح بزرگ، یا محاسبه‌ی لگاریتم گسسته در یک گروه مشخص است.

* سخنران

در مقابل، بهترین حملات کلاسیک شناخته شده به این طرح‌ها، در زمان نمایی یا زیرنمایی اجرا می‌شوند؛ در حالی‌که رایانه‌های کوانتومی، برخی از این مسأله‌ها را بسیار سریع‌تر از رایانه‌های کلاسیک حل می‌کنند. به‌عنوان مثال با استفاده از الگوریتم شور [۹]، تجزیه‌ی اعداد صحیح بزرگ و محاسبه‌ی لگاریتم گسسته در زمان چندجمله‌ای صورت می‌گیرند، در نتیجه همه‌ی سامانه‌های رمز کلید عمومی مبتنی بر این مسأله‌ها شکسته خواهند شد. بر همین اساس، رمزنگاران تحقیقات وسیعی برای پیدا کردن طرح‌های رمزنگاری جایگزین داشته‌اند که منجر به ایجاد حوزه‌ی جدیدی در رمزنگاری به نام "رمزنگاری پساکوانتومی" شده است. هم‌اکنون کلاس‌های متعددی از مسائل سخت وجود دارند که می‌توانند امنیت ساختارهای رمزنگاری را در مقابل کامپیوترهای کوانتومی تامین کنند. این مسائل سخت طیف متنوعی از حوزه ها از قبیل توابع چکیده‌ساز، نظریه‌ی کدگذاری، فرم‌های مربعی، آیزوجنی خم‌های بیضوی و نظریه‌ی مشبکه را پوشش می‌دهد. در این بین رمزنگاری مشبکه مبنا یکی از امیدوارکننده‌ترین کاندیدای رمزنگاری پساکوانتومی بوده است که این نشأت گرفته از تضمین امنیتی نظری قوی به‌دست آمده از ساختارهای مبتنی بر مسائل سخت مشبکه می‌باشد.

در اواخر دهه‌ی ۹۰ میلادی، آی‌تای [۱] مسائل مشبکه‌ای ویژه‌ای (مانند کاهش‌های بدترین حالت به حالت متوسط) همراه با خواص جالبی برای رمزنگاری مطرح کرد و نشان داد که می‌توان از مشبکه‌ها برای ساختن سامانه‌های رمز استفاده کرد. تاکنون هیچ الگوریتم کوانتومی برای حل کارآمد از مسائل سخت مشبکه‌ای ارائه نشده است، لذا رمزنگاری مشبکه-مبنا به یکی از کاندیدهای اصلی در زمینه‌ی رمزنگاری پساکوانتومی تبدیل شده است. اولین ساختارهای رمزنگاری که امنیت آن‌ها بر مبنای بدترین حالت از مسائل سخت مشبکه بود توسط آی‌تای و آی‌تای-دی‌ورک [۲، ۳] منتشر شد. در سال‌های بعدی این مطالعات و ساختارها به طور اساسی بهبود داده شدند. به ویژه ریگو [۸] در سال ۲۰۰۵ مسئله‌ی یادگیری با خطا (learning with errors) یا LWE را تعریف و با فرض سختی بدترین حالت از مسائل سخت مشبکه در مقابل الگوریتم‌های کوانتومی، سختی آن را اثبات کرد. در ادامه‌ی نتایج ریگو، در سال ۲۰۱۰ لوباشفسکی، پایکرت و ریگو [۶] مسأله‌ی یادگیری با خطای حلقه‌ای (Ring Learning With Errors) یا RLWE را جهت ایجاد کلیدهای به مراتب کوچکتر معرفی کردند.

مسأله‌ی LWE با اعداد صحیح مثبت q و n و یک توزیع خطای χ روی $\mathbb{Z}$ (معمولاً توزیع گسسته‌ی گاوسی) پارامترسازی شده و در دو نسخه‌ی جستجو و تصمیم‌گیری تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۱. [۷، بخش ۴] برای یک بردار مخفی $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_q^n$، توزیع یادگیری با خطای $A_{s,\chi}$ روی $\mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_q$ با انتخاب یک بردار $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}_q^n$ (به‌صورت یکنواخت تصادفی)، انتخاب $e \leftarrow \chi$ و خروجی $(\mathbf{a}, b =< \mathbf{s}, \mathbf{a} > +e \bmod q)$ نمونه‌سازی می‌شود (منظور از نماد $< \mathbf{s}, \mathbf{a} >$ ضرب داخلی بردارهای $\mathbf{s}$ و $\mathbf{a}$ است).

تعریف ۲.۱. [۷، بخش ۴] فرض کنید m نمونه‌ی مستقل $(\mathbf{a}_i, b_i) \in \mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_q$ از توزیع یادگیری با خطای $A_{s,\chi}$ برای یک بردار مخفی $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}_q^n$ (که برای همه‌ی نمونه‌ها ثابت است) در اختیار داریم. مسأله‌ی یادگیری با خطا در نسخه‌ی جستجو، پیدا کردن بردار مخفی $\mathbf{s}$ است.

تعریف ۳.۱. [۷، بخش ۴] مسأله‌ی یادگیری با خطا در مدل تصمیم‌گیری بدین صورت تعریف می‌شود که برای m نمونه‌ی مستقل $(\mathbf{a}_i, b_i) \in \mathbb{Z}_q^n \times \mathbb{Z}_q$، مشخص کنید که آیا این نمونه‌ها از یک توزیع یادگیری با خطای $A_{\mathbf{s},\chi}$ (برای یک بردار مخفی ثابت $\mathbf{s}$) حاصل شده‌اند یا دارای توزیع یکنواخت هستند.

مسأله‌ی RLWE با یک حلقه‌ی R از درجه‌ی n روی $\mathbb{Z}$، یک عدد صحیح مثبت q به‌عنوان پیمانه، حلقه‌ی خارج قسمتی $R_q = R/qR$ و یک توزیع خطای χ روی R پارامترسازی می‌شود. معمولاً R یک حلقه‌ی دایره‌بُر [۱] (در حالت خاص $R = \frac{\mathbb{Z}[X]}{X^n+1}$ برای n توانی از ۲) و χ نوعی از توزیع گسسته‌ی گاوسی در نشاندن کانونی R با نرخ خطای $\alpha < 1$ نسبت به q در نظر گرفته می‌شود [۶].

تعریف ۴.۱. [۶] برای یک $s \in R_q$ (عنصر مخفی) توزیع یادگیری با خطای حلقه‌ای $A_{s,\chi}$ روی $R \times R_q$ با انتخاب $a \in R_q$ (به‌صورت یکنواخت تصادفی)، انتخاب $e \leftarrow \chi$ و خروجی $(a, b = a.s + e \mod q)$ نمونه‌سازی می‌شود (ضرب $a.s$ عمل ضرب روی حلقه‌ی R است).

[۱] Cyclotomic

مشابه با LWE ، نسخه‌ی حلقه‌ای از این مسأله نیز در دو مدل جستجو و تصمیم گیری تعریف می‌شود؛ در مدل جستجو برای m نمونه‌ی (a_i, b_i) که با یک توزیع $A_{s,\chi}$ برای یک عنصر مخفی s نمونه‌سازی شده‌اند، هدف پیدا کردن s است. مدل تصمیم‌گیری از مسأله‌ی RLWE تشخیص دادن تفاوت بین نمونه‌های (a_i, b_i) خروجی از توزیع $A_{s,\chi}$ با نمونه‌های دارای توزیع یکنواخت است [۶].

۲. طرح توافق کلید پیشنهادی

ایده‌ی به‌کار رفته در طرح توافق پیشنهادی حذف مرحله‌ی مکانیزم تلفیق یا روش کدگذاری و کاهش پیچیدگی محاسباتی است. پارامترهای مورد استفاده در این طرح شامل n (به‌عنوان بُعد مشبکه)، پیمانه‌ی q و حلقه‌های $R = \frac{\mathbb{Z}[x]}{x^n+1}$ و $R_q = \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{x^n+1}$ است. در این طرح، چندجمله‌ای $\mathbf{a} \in R_q$ به‌طور یکنواخت تصادفی نمونه‌سازی می‌شود، آرش و بابک کلیدهای خصوصی و چندجمله‌ای‌های خطای خود به ترتیب $\{\mathbf{s}, \mathbf{e}\}$ و $\{\mathbf{s}', \mathbf{e}'\}$ را از یک توزیع گاوسی گسسته‌ی χ روی R_q با پارامتر σ نمونه‌سازی می‌کنند. سپس آرش و بابک به ترتیب کلیدهای عمومی $\mathbf{b} := \mathbf{a}.\mathbf{s} + \mathbf{e}$ و $\mathbf{b}' := \mathbf{a}.\mathbf{s}' + \mathbf{e}'$ را محاسبه کرده و برای یکدیگر ارسال می‌کنند. در مرحله‌ی آخر آرش و بابک بیت‌های مرتبه‌ی بالا (یا بیت‌های پُر اهمیت) از مقادیر به ترتیب $(\mathbf{b}' - \mathbf{e}).\mathbf{s}$ و $(\mathbf{b} - \mathbf{e}').\mathbf{s}'$ را به‌عنوان کلید مشترک در نظر می‌گیرند. ساختار کلی الگوریتم پیشنهادی در جدول ۲ ارائه شده است (در رابطه با محاسبه‌ی پارامتر γ در بخش ۱.۲ توضیح خواهیم داد).

جدول ۲. طرح توافق کلید پیشنهادی.

آرش		بابک
$\mathbf{a} \in R_q$		$\mathbf{a} \in R_q$
$\mathbf{s}, \mathbf{e} \leftarrow_\chi R_q$		$\mathbf{s}', \mathbf{e}' \leftarrow_\chi R_q$
$\mathbf{b} := \mathbf{a}.\mathbf{s} + \mathbf{e}$		$\mathbf{b}' := \mathbf{a}.\mathbf{s}' + \mathbf{e}'$
	$\xleftarrow{\mathbf{b}}$	
	$\xrightarrow{\mathbf{b}'}$	
$\mathbf{w} = (\mathbf{b}' - \mathbf{e}).\mathbf{s}$		$\mathbf{w}' = (\mathbf{b} - \mathbf{e}').\mathbf{s}'$
$\mu = Highbits(\mathbf{w}, 2\gamma)$		$\mu = Highbits(\mathbf{w}', 2\gamma)$

نکته ۱.۲. μ بردار شامل تمام بالاترین بیت ها از ضرائب $\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}'$ است.

درستی پروتکل ۲ وابسته به این است که بالاترین بیت هر ضریب از $\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}'$ با یکدیگر برابر باشند:

لم ۲.۲. فرض کنید $\lceil \log q \rceil = \ell + 1$ ، γکمترین توانی از ۲ باشد به طوری که $\max\{||\mathbf{e}''.\mathbf{s}'||_\infty, ||\mathbf{e}''.\mathbf{s}||_\infty\} \leq \gamma$ و $\lceil \log(\frac{q}{\gamma}) \rceil = k + 1$. آنگاه احتمال اینکه بیت ℓ-اُم از یک ضریب در $\mathbf{w}$ با بیت ℓ-اُم از ضریب نظیر در $\mathbf{w}'$ با هم برابر باشند، حداقل برابر با $1 - \frac{1}{2^k}$ است.

اثبات. از آن‌جا که تابع $Highbits$ روی هر ضریب از یک چندجمله‌ای به طور مستقل کار می‌کند، می‌توان چندجمله‌ای‌ها را به‌صورت عدد صحیح در نظر گرفت. با توجه به فرضیه‌های لم، هر ضریب از یک چندجمله‌ای دلخواه در $R_q = \frac{\mathbb{Z}_q[x]}{x^n+1}$ حداکثر به طول ℓ بیت است. از طرفی چندجمله‌ای‌های $\mathbf{e}''$، $\mathbf{s}$ و $\mathbf{s}'$ همگی دارای ضرائب کوچک و کران‌دار با کران بالای γ هستند و بنابراین $\mathbf{e}''$ فقط روی $\log(\gamma)$ بیت انتهایی از هر ضریب در $\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}'$ تأثیر خواهد داشت (به بیان دیگر $\mathbf{e}''.\mathbf{s}$ و $\mathbf{e}''.\mathbf{s}'$ حداکثر به طول $\log(\gamma)$ هستند) . اکنون $k - 1$ بیت بعدی (یعنی بیت‌های $\log(\gamma) + 1$-اُم تا بیت $\ell - 1$-اُم) از $\mathbf{a}.\mathbf{s}.\mathbf{s}'$ را در نظر بگیرید. اگر حداقل یکی از این بیت‌ها صفر باشد آنگاه جمع $\mathbf{a}.\mathbf{s}.\mathbf{s}'$ با $-\mathbf{e}''.\mathbf{s}$ و $\mathbf{e}''.\mathbf{s}'$ تأثیری روی بیت ℓ-اُم از $\mathbf{a}.\mathbf{s}.\mathbf{s}'$ نخواهد داشت و با توجه به روابط $\mathbf{w} = \mathbf{a}.\mathbf{s}'.\mathbf{s} - \mathbf{e}''.\mathbf{s}$ و $\mathbf{w}' = \mathbf{a}.\mathbf{s}.\mathbf{s}' + \mathbf{e}''.\mathbf{s}'$، نتیجه می‌شود که بیت ℓ-اُم از $\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}'$ با یکدیگر

برابر هستند. بنابراین تنها حالت ممکن برای برابر نبودن بیت‌های ℓ-اُم $\mathbf{w}$ و $\mathbf{w}'$، این است که تمامی بیت‌های $\log(\gamma)+1$-اُم تا بیت $\ell-1$-اُم) از $\mathbf{a.s.s}'$ برابر با ۱، و بیت $\log(\gamma)$-اُم (آخرین بیت) از $\mathbf{e}''.\mathbf{s}$ و $\mathbf{e}''.\mathbf{s}'$ مخالف یکدیگر باشند. احتمال وقوع چنین حالتی برابر با $\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{k-1}}.\frac{1}{2}$ است.

□

قضیه ۳.۲. با فرض سختی مسأله‌ی یادگیری با خطای حلقه‌ای در مدل تصمیم‌گیری، پروتکل تبادل کلید ۲ دارای امنیت در برابر حمله‌ی متن اصلی انتخابی ($IND\text{-}CPA$) است.

اثبات. در پروتکل ۲ مهاجم مقادیر $\mathbf{b}$ و $\mathbf{b}'$ را دریافت می‌کند، و این مقادیر به ترتیب به مقادیر تصادفی $\mathbf{e}$ و $\mathbf{e}'$ (با توزیع گسسته‌ی گاوسی χ) وابسته هستند. بنابراین دوتایی $(\mathbf{b},\mathbf{b}')$ نسبت به یک نمونه‌ی تصادفی $(\mathbf{u},\mathbf{v})\in R_q\times R_q$ غیر قابل تمایز است، ر.ک. [۳، اثبات لم ۴.۱] . به بیان دیگر، امنیت پروتکل ۲ مبتنی بر سختی مسأله‌ی یادگیری با خطای حلقه‌ای در مدل تصمیم‌گیری است.

□

۱.۲. **انتخاب پارامترها.** برای تخمین سطح امنیتی نظیر به مجموعه پارامترهای پیشنهادی از برنامه‌ی طراحی شده توسط آلبرت [۴] [۲] (نوشته شده با نرم افزار Sage [۱۰]) استفاده کرده‌ایم که سطح امنیتی از سخت بودن مسأله‌ی یادگیری با خطا برای انتخاب‌های متفاوتی از پارامترها (شامل حملات مختلف به مسأله‌ی یادگیری با خطا) را محاسبه می‌کند. نتایج این آزمون در جدول‌های ۳ و ۴ ارائه شده است.

جدول ۳. نتایج تخمین سطح امنیتی (بر حسب بیت) در برابر حمله‌های کارآی مشبکه مبنا با استفاده از نتایج آلبرت و همکاران [۴] برای یافتن پیمانه‌ی q با $n=۲^{۱۴}$ و $\sigma=۳/۱۹۲$.

$\lceil\log(q)\rceil$	حمله‌ی uSVP	حمله‌ی کدگشایی	حمله‌ی دوگان
۶۰	۵۴۰۷.۹	۶۱۲۹.۷	۵۷۰۱.۱
۶۵	۴۸۲۲.۸	۵۳۸۳.۲	۵۰۸۱.۲
۷۰	۴۳۳۴.۳	۴۷۶۹.۱	۴۵۷۱.۰
۷۵	۳۹۲۰.۳	۴۲۷۰.۷	۴۱۲۴.۴
۸۰	۳۵۶۴.۰	۳۸۴۸.۵	۳۷۴۹.۴
۸۵	۳۲۵۶.۵	۳۴۹۱.۳	۳۴۴۶.۴
۹۰	۲۹۸۹.۴	۳۱۸۴.۵	۳۱۴۹.۰
۹۵	۲۷۵۷.۳	۲۹۳۴.۹	۲۸۹۰.۲
۱۰۰	۲۵۵۰.۰	۲۶۹۵.۵	۲۶۶۷.۶
۱۰۵	۲۳۶۵.۳	۲۴۸۹.۰	۲۴۸۰.۱
۱۱۰	۲۲۰۲.۶	۲۳۱۲.۳	۲۳۰۵.۶
۱۱۵	۲۰۵۷.۴	۲۱۴۷.۷	۲۱۶۰.۶
۱۲۰	۱۹۲۵.۶	۲۰۰۰.۶	۲۰۱۶.۰
۱۲۵	۱۸۰۴.۱	۱۸۷۰.۷	۱۸۸۵.۹
۱۳۰	۱۶۹۷.۹	۱۷۵۲.۵	۱۷۷۲.۴

[۲] https://bitbucket.org/malb/lwe-estimator/commits/c5763b2

جدول ۴. نتایج تخمین سطح امنیتی (بر حسب بیت) در برابر حمله‌های کارآی مشبکه مبنا با استفاده از نتایج آلبرت و همکاران [۴] برای یافتن بُعد مشبکه‌ی n با $\lceil \log(q) \rceil = ۹۹$ و $\sigma = ۶/۳۸۴$.

n	حمله‌ی uSVP	حمله‌ی کدگشایی	حمله‌ی دوگان
۳۰۰۱۱	۶۴۱۴.۲	۶۹۶۳.۹	۶۶۹۷.۴
۲۰۰۱۱	۳۵۵۰.۱	۳۷۷۹.۰	۳۷۳۱.۱
۱۰۰۰۷	۱۲۱۹.۸	۱۲۴۷.۸	۱۲۲۴.۵
۸۰۰۹	۸۴۹.۱	۸۶۲.۶	۸۶۶.۹
۷۰۰۱	۶۷۸.۳	۶۹۰.۹	۶۹۳.۲
۶۰۰۷	۵۲۲.۷	۵۳۳.۹	۵۳۴.۹
۵۰۰۳	۳۸۰.۱	۳۸۹.۹	۳۸۵.۸
۴۰۰۱	۲۵۴.۷	۲۶۲.۲	۲۵۹.۰
۳۰۰۱	۱۴۹.۸	۱۵۴.۹	۱۵۵.۱
۲۰۰۳	۶۹.۵	۷۱.۹	۷۲.۹
۱۰۰۹	۳۱.۸	۴۶.۴	۴۷.۶

مراجع

1. M. Ajtai, *Generating hard instances of lattice problems (extended abstract)*, Proc. 28th Annu. ACM. Symp. Theor. Comput. New York, (1996) pp. 99–108.
2. M. Ajtai, *The shortest vector problem in L_2 is NP-hard for randomized reductions*, Proc. 30th Annu. ACM. Symp. Theor. Comput. (1998) pp. 10–19.
3. M. Ajtai and C. Dwork, *The first and fourth public-key cryptosystems with worst-case/average-case equivalence*, Electron. Colloq. Comput. Complex. **14** (97) (2007).
4. M. R. Albrecht, R. Player and S. Scott, *On the concrete hardness of learning with errors*. J. Math. Cryptol. **9** (3) (2015) 169–203.
5. W. Diffie and M. Hellman, *New directions in cryptography*, IEEE Trans. Inform. Theory **IT-22** (6) (1976) 644–654.
6. V. Lyubashevsky, C. Peikert and O. Regev, *On Ideal Lattices and Learning with Errors over Rings*, Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, Berlin, 2010.
7. C. Peikert, *A decade of lattice cryptography*, Found. Trends Theor. Comput. Sci. **10** (4) (2014) 283–424.
8. O. Regev, *On lattices, learning with errors, random linear codes, and cryptography*, Proc. 37th Annu. ACM. Symp. Theor. Comput. New York, (2005) pp. 84–93.
9. P. W. Shor, *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, Proc. 35th Annu. Symp. Found. Comput. Sci. Los Alamitos, (1994) pp. 124–134.
10. *The Sage Developers. SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version8.2)* 2018. http://www.sagemath.org

پست الکترونیکی: javadsharafi@grad.kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: Hassan@kashanu.ac.ir

سخنرانی‌ها

ریاضیات بین رشته‌ای

پایداری معادله انتگرو-دیفرانسیل کسری ولترا با استفاده از عملگر $\Psi-$هادامارد

صفورا رضائی آدریانی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
زهرا عیدی نژاد
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران
و رضا سعادتی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله، با استفاده از انتگرال کسری $\Psi-$هادامارد و مشتق کسری $\Psi-$هادامارد، یک معادله انتگرو-دیفرانسیل کسری ولترا ارائه می‌دهیم و با استفاده از قضیه آلترناتیو، پایداری هایرز-اولام را برای معادله انتگرو-دیفرانسیل کسری ولترا و معادله انتگرال کسری ولترا در فضای باناخ، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: قضیه آلترناتیو، معادله انتگرو-دیفرانسیل کسری ولترا، معادله انتگرال کسری ولترا، تابع مشتق‌پذیر $\Psi-$هادامارد، پایداری هایرز-اولام.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. مقدمه

امروزه، یکی از زمینه‌هایی که جامعه علمی-تحقیقاتی ریاضیات بر آن متمرکز است، حسابان کسری (FC) و کاربردهای آن در ریاضیات محض می‌باشد که عمدتاً در فضای باناخ مورد بحث قرار می‌گیرد. حسابان کسری، نامی است برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از مرتبه دلخواه که تعمیمی برای مشتق و انتگرال از مرتبه صحیح است.

توابع دیفرانسیل کسری، به عنوان یک ابزار قدرتمند برای مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های مهندسی، فیزیکی، داروسازی مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفت. با توجه به اهمیت موضوع، تحقیقات متعددی در سال‌های اخیر در زمینه بررسی پایداری دستگاه‌هایی با مشتقات کسری ارائه گردید.

مسأله‌ی پایداری معادلات تابعی از یک سؤال اولام، در مورد پایداری همریختی‌های روی گروه‌ها نشأت گرفته است. این مسأله برای نگاشت‌های جمعی تقریبی روی فضای باناخ توسط هایرز حل شد و نتیجه هایرز، توسط راسیاس تعمیم یافت.

در این بخش، به بررسی وجود، یکتایی و پایداری هایرز-اولام جواب‌های معادلات دیفرانسیل کسری زیر می‌پردازیم

$$\begin{cases} {}^{H}\mathbb{D}^{\mu}x(p) = \rho(p, x(p), {}^{H}\mathbb{D}^{\mu}x(p)), \\ x(1) = x_1, \end{cases}$$

که در آن ${}^{H}\mathbb{D}^{\mu}x(p)$، مشتق کسری هادامارد از مرتبه $\mu > 0$ و $\rho : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی است که در آن $x_1 \in \mathbb{R}$ و $p \in I = [1, P]$ برای $P > 1$.

با استفاده از قضیه آلترناتیو و مشتق کسری $\Psi-$هادامارد از نوع کاپوتو ${}^{HC}_{a'+}\mathbb{D}^{\mu,\lambda;\Psi}_{\Psi(p)}w(p)$ که در آن $\mu > 0$ و $\lambda > 0$، به بررسی پایداری هایرز-اولام جواب معادلات انتگرو-دیفرانسیل کسری ولترای زیر می‌پردازیم

$$\begin{cases} {}^{H}\mathbb{D}^{\mu,\lambda}w(p) = \rho(p, u(p)) + \int_0^p k(p, \gamma, w(p))d\gamma, \\ I_{0+}^{1-\alpha}w(0) = \varepsilon, \end{cases}$$

* سخنران

که در آن $p \in J = [\circ, P]$ و $\rho(p, w)$ یک تابع پیوسته نسبت به متغیرهای p و w روی $J \times \mathbb{R}$، $K(p, \gamma, w)$ تابعی پیوسته نسبت به متغیرهای p، γ و w روی $J \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$، ε یک ثابت دلخواه و $I_{\circ+}^{1-\alpha} w(\circ)$ انتگرال کسری $\Psi-$هادامارد با $\circ \leq \alpha \leq 1$ $(\alpha = \mu + \lambda(1-\mu))$ است.

در این مقاله، علاقه‌مند هستیم که به بررسی پایداری هایرز-اولام جواب‌های معادله انتگرو-دیفرانسیل کسری ولترای زیر بپردازیم

$$ {}^{HC}\mathcal{D}_{\circ+}^{\mu,\lambda;\Psi} v(p) = \eta(p, v(p)) + \int_{\circ}^{p} \mathcal{K}(p, \gamma, v(\gamma)) d\gamma, \qquad (1)$$

که در آن ${}^{HC}\mathcal{D}_{a+}^{\mu,\lambda;\Psi} v(p)$، مشتق کسری $\Psi-$هادامارد از نوع کاپوتو است به‌طوری که $\mu > \circ$، $\circ < \lambda$ و $\eta : [\circ, P] \times Y \to Y$، $\mathcal{K} : [\circ, P] \times [\circ, P] \times Y \to Y$ و $v : [\circ, P] \to Y$ توابعی پیوسته هستند و Y یک فضای باناخ است.

۲. پیش‌نیازها

در این بخش، ابتدا به معرفی فضای توابعی می‌پردازیم که انتگرال کسری $\Psi-$هادامارد و مشتق کسری $\Psi-$هادامارد از نوع کاپوتو، روی آن تعریف می‌شوند و همچنین قضیه‌ی مهمی را برای به‌دست آوردن نتایج اصلی، ارائه می‌دهیم. سرانجام، مفهوم پایداری هایرز-اولام و هایرز-اولام-راسیاس و قضیه آلترناتیو را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. فرض کنید $(a', b')(-\infty \leq a' < b' \leq \infty)$ یک بازه متناهی (یا نامتناهی) روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ باشد، و $\mu > \circ$. همچنین فرض کنید $\Psi(p)$ یک تابع یکنواخت مثبت و صعودی روی (a', b') باشد که دارای مشتق پیوسته $\Psi'(p)$ است (مشتق اول $\Psi(p)$ روی بازه (a', b') را به‌صورت $\Psi'(p) = \frac{d}{dp}\Psi(p)$ نشان می‌دهیم). انتگرال کسری هادامارد با مرتبه $\mu > \circ$ و پارامتر $\lambda > \circ$، از تابع مفروض $\rho(p)$ را نسبت به تابع $\Psi(p)$ روی $[a', b']$، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$ {}_{a'}^{H}\mathcal{I}_{\Psi(p)}^{\mu;\lambda} \rho(p) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_{a'}^{p} \mathcal{Q}_{\Psi}^{\mu}(p, \gamma) \rho(\gamma) d\gamma,$$

که در آن $\mathcal{Q}_{\Psi}^{\mu}(p, \gamma) := \left(\frac{\Psi(\gamma)}{\Psi(p)}\right)^{\lambda} \left(\log \frac{\Psi(p)}{\Psi(\gamma)}\right)^{\mu-1} \frac{\Psi'(\gamma)}{\Psi(\gamma)}$.

هدف این مقاله بررسی پایداری کلاسی از معادلات انتگرو-دیفرانسیل کسری با استفاده از مشتق $\Psi(p)-$هادامارد از نوع کاپوتو است، بنابراین به معرفی چنین عملگرهای کسری می‌پردازیم.

تعریف ۲.۲. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $n - 1 < \mu < n$. همچنین فرض کنید $J = [a', b']$ بازه‌ای است که $-\infty \leq a' < b' \leq \infty$ و ρ و $\Psi \in C^n[a', b']$ دو تابعی هستند که برای هر $p \in J$، Ψ صعودی و $\Psi'(p) \neq \circ$ است. مشتق کسری $\Psi-$هادامارد از نوع کاپوتو از تابع ρ با مرتبه $\mu > \circ$ و پارامتر $\lambda > \circ$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۳]

$$ {}_{a'}^{HC}\mathcal{D}_{\Psi(p)}^{\mu,\lambda} \rho(p) = {}^{H}\mathcal{I}_{\Psi(p)}^{n-\mu,\lambda} \, {}_{a'}^{HC}\mathcal{D}_{\Psi(p)}^{n,\lambda} \rho(p).$$

که در آن

$$ {}_{a'}^{HC}\mathcal{D}_{\Psi(p)}^{n,\lambda} \rho(p) = \Psi(p)^{-\lambda} \left(\frac{\Psi(p)}{\Psi'(p)} \cdot \frac{d}{dp}\right)^{n} \left[\Psi(p)^{\lambda} \rho(p)\right].$$

اگر $v(p)$ یک تابع مشتق‌پذیر مفروض باشد، داریم

$$ \left\| {}^{HC}\mathcal{D}_{\circ+}^{\mu,\lambda;\Psi} v(p) - \eta(p, v(p)) - \int_{\circ}^{p} \mathcal{K}(p, \gamma, v(\gamma)) d\gamma \right\| \leq \Omega(p),$$

که در آن $\Omega(p) > ۰$ و $p \in [۰, P]$، و جواب $u(p)$ از معادله (۱) وجود دارد به‌طوری که برای $B > ۰$ داریم

$$\|v(p) - u(p)\| \leq B\Omega(p),$$

بنابراین گوییم معادله (۱) دارای پایداری هایرز-اولام است.

تعریف ۳.۲. $\delta : Y \times Y \to [۰, \infty]$ را یک فضای متریک تعمیم یافته روی Y گوییم، هرگاه
۱. $\delta(v, u) = ۰$، اگر و تنها اگر $v = u$؛
۲. برای هر $v, u \in Y$، $\delta(v, u) = \delta(u, v)$؛
۳. برای هر $v, u, z \in Y$، $\delta(v, z) \leq \delta(v, u) + \delta(u, z)$.

قضیه ۴.۲. [۱، آلترناتیو] فرض کنید (Y, δ) یک فضای متریک تعمیم‌یافته است. همچنین فرض کنید که $\Lambda : Y \to Y$ یک عملگر انقباضی اکید با ضریب لیپشیتس $L < ۱$ است. اگر k صحیح نامنفی وجود داشته باشد به‌طوری که برای $v \in Y$، $d(\Lambda^{k+۱}v, \Lambda^k v) < ۱$، آنگاه شرایط زیر برقرار است:
۱. دنباله $\{\Lambda^n v\}$ به نقطه ثابت v^* از Λ همگرا است.
۲. v^* یک نقطه ثابت یکتا از Λ در

$$Y^* = \{u \in Y; d(\Lambda^k v, u) < \infty\},$$

است.
۳. اگر $u \in Y^*$، آنگاه $\delta(u, v^*) \leq \frac{۱}{۱-L} d(\Lambda u, u)$.

قضیه ۵.۲. [۲] اگر $\rho \in C^۱[a', b']$، $\mu > ۰$ و $\lambda > ۰$، آنگاه

$${}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}\ {}^{H}\mathcal{I}_{۰+}^{\mu;\Psi}\rho(p) = \rho(p).$$

در این مقاله، با استفاده از قضیه ۴.۲، پایداری هایرز-اولام معادله (۱) را بررسی می‌کنیم.

۳. نتایج اصلی

قضیه ۱.۳. فرض کنید Y یک فضای باناخ و $L, L_۱, L_۲$ و P ثابت‌های مثبتی باشند که داریم،

$$۰ < L_۱ + (L_۱ + L_۲ + L_۲L)L < ۱$$

. فرض کنید $\eta : [۰, P] \times Y \to Y$، $\mathcal{K} : [۰, P] \times [۰, P] \times Y \to Y$ و $\Omega : [۰, P] \to (۰, \infty)$ پیوسته باشند و برای هر $\gamma, p \in [۰, P]$ و $v, u \in Y$ داشته باشیم

$$\|\eta(p, v) - \eta(p, u)\| \leq L_۱ \|v - u\|,$$
$$\|\mathcal{K}(p, \gamma, v(\gamma)) - \mathcal{K}(p, \gamma, u(\gamma))\| \leq L_۲ \|v - u\|,$$

و

$$\frac{۱}{\Gamma(\mu)} \int_۰^p \mathcal{Q}_\Psi^\mu(p, \gamma)\Omega(\gamma)d\gamma \leq L\Omega(p).$$

اگر $\rho : [۰, P] \to Y$ یک تابع مشتق‌پذیر باشد که برای $p \in [۰, P]$، در شرط زیر صدق می‌کند

$$\left\| {}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}\rho(p) - \eta(p, \rho(p)) - \int_۰^p \mathcal{K}(p, \gamma, \rho(\gamma))d\gamma \right\| \leq \Omega(p),$$

آن‌گاه تابع مشتق‌پذیر یکتای $\rho_۰ : [۰, P] \to Y$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $p \in [۰, P]$، داریم

$$\left\| {}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}\rho(p) - {}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}\rho_۰(p) \right\| + \|\rho(p) - \rho_۰(p)\| \leq \frac{۱ + L}{۱ - L_۱ + (L_۱ + L_۲ + L_۲L)L}\Omega(p).$$

اثبات. ابتدا مجموعه E را به‌صورت

$$E = \{v : [۰, P] \to Y, \quad v\text{ دیفرانسیل‌پذیر است.}\},$$

در نظر می‌گیریم. سپس نگاشت $\delta : E \times E \to [۰, \infty]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta(v, u) = \inf\{B \in [۰, \infty] : \left\| {}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}v(p) - {}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}u(p) \right\| + \|v(p) - u(p)\| \leq B\Omega(p), p \in [۰, P]\}.$$

و نشان می‌دهیم که (E, δ) یک فضای متریک کامل تعمیم یافته است. در ادامه نگاشت $\Lambda : E \to E$ را به‌صورت

$$\Lambda(v(p)) = {}^{H}\mathcal{I}_{۰+}^{\mu;\Psi}\eta(p, v(p)) + {}^{H}\mathcal{I}_{۰+}^{\mu;\Psi}\left[\int_۰^p \mathcal{K}(p, \gamma, v(\gamma))d\gamma\right].$$

در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم که Λ یک نگاشت انقباضی است. سپس نشان می‌دهیم که $\delta(\Lambda\rho, \rho) < \infty$، لذا تمام شرایط قضیه ۴.۲ برقرار است. بنابراین نگاشت Λ دارای نقطه ثابت یکتایی به نام $\rho_۰$ است، یعنی $\Lambda\rho_۰ = \rho_۰$ به‌طوری که

$${}^{HC}\mathcal{D}_{۰+}^{\mu,\lambda;\Psi}\rho_۰(p) = \eta(p, \rho_۰(p)) + \int_۰^p \mathcal{K}(p, \gamma, \rho_۰(\gamma))d\gamma.$$

و

$$\delta(\rho, \rho_۰) \leq \frac{۱}{۱ - [L_۱ + (L_۲ + L_۱ + L_۲L)L]}\delta(\Lambda\rho, \rho) \leq \frac{۱ + L}{۱ - [L_۱ + (L_۲ + L_۱ + L_۲L)L]}.$$

□

قضیه ۲.۳. فرض کنید که Y یک فضای باناخ و $L, L_۱, L_۲$ و T ثابت های مثبتی باشند که داریم $۰ < (L_۱ + L_۲)L < ۱$. فرض کنید $\eta : [۰, P]\times Y \longrightarrow Y$ و $\mathcal{K} : [۰, P] \times [۰, P] \times Y \to Y$ و $\Omega : [۰, P] \to (۰, \infty)$ توابع پیوسته‌ای باشند به‌طوری که

$$\|\eta(p, v) - \eta(p, u)\| \leq L_۱ \|v - u\|,$$
$$\|\mathcal{K}(p, \gamma, v) - \mathcal{K}(p, \gamma, u)\| \leq L_۲ \|v - u\|,$$

و

$$\frac{۱}{\Gamma(\mu)}\int_۰^p \mathcal{Q}_\Psi^\mu(p, \gamma)\Omega(\gamma)d\gamma \leq L\Omega(p).$$

برای هر $\gamma, p \in [۰, P]$ و $v, u \in Y$ اگر $\rho : [۰, P] \to Y$ یک تابع پیوسته باشد که

$$\left\|\rho(p) - \eta(p, \rho(p)) - \frac{۱}{\Gamma(\mu)}\int_۰^p \mathcal{Q}_\Psi^\mu(p, \gamma)\mathcal{K}(p, \gamma, \rho(\gamma))d\gamma\right\| \leq \Omega(p), \tag{۲}$$

$p \in [۰, P]$، آن‌گاه تابع پیوسته یکتای $\rho_۰ : [۰, P] \to Y$ وجود دارد به‌طوری که

$$\rho_۰(p) = \eta(p, \rho(p)) + \frac{۱}{\Gamma(\mu)}\int_۰^p \mathcal{Q}_\Psi^\mu(p, \gamma)\mathcal{K}(p, \gamma, \rho(\gamma))d\gamma,$$

و

$$\|\rho(p) - \rho_۰(p)\| \leq \frac{۱}{۱ - (L_۱ + L_۲)L}\Omega(p).$$

اثبات. ابتدا مجموعه E را به‌صورت $E = \{v : [\circ, P] \to Y, \ \ v\}$ پیوسته است. در نظر می‌گیریم. سپس نگاشت $\delta : E \times E \to [\circ, \infty]$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\delta(v, u) = \inf\{B \in [\circ, \infty] : \|v(p) - u(p)\| \leq B\Omega(p), p \in [\circ, P]\}.$$

همانند ایده قضیه قبل ابتدا نشان می‌دهیم که فضای (E, δ) یک فضای متریک تعمیم یافته کامل است. سپس نگاشت Λ را روی E در نظر می‌گیریم

$$\Lambda(v(p)) = \eta(p, v(p)) + \frac{1}{\Gamma(\mu)}\left[\int_{\circ}^{p} \mathcal{Q}_{\Psi}^{\mu}\mathcal{K}(p, \gamma, v(\gamma))d\gamma\right].$$

در ادامه می‌توان نشان داد که برای هر $u, v \in E$ داریم $\delta(\Lambda v, \Lambda u) \leq (L_1 + L_2)L\delta(v, u)$ که $\circ < (L_1 + L_2)L < 1$ و این نشان می‌دهد که Λ یک نگاشت انقباضی است. همچنین از معادله (۲) ما به‌دست می‌آوریم که $\delta(\Lambda\rho, \rho) \leq 1 \leq \infty$. لذا بنابر قضیه ۴.۲ Λ دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد $\rho_\circ$ در مجموعه $E^* = \{u \in E; \delta(\Lambda\rho, u) < \infty\}$ می‌باشد. □

مراجع

1. J. B. Diaz and B. A. Margolis, *A fixed point theorem of the alternative, for contractions on a generalized complete metric space*, Bull. Am. Math. Soc. **74** (2) (1968) 305–309.
2. C. Sousa and E. Olivera, *On the $\Psi-$ Hadamard fractional deritiv*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **145** (60) (2018) 72–91.
3. H. Mu. Fahada, A. Fernandezb, M. ur Rehmana and M. Siddiqia, *Tempered and Hadamard-type fractional calculus with respect to functions*, (2020). arXiv:1907.04551

پست الکترونیکی: safora.rezaei.۲۰۰۰@gmail.com
پست الکترونیکی: zahraeidinejad72@gmail.com
پست الکترونیکی: rsaadati@iust.ac.ir

حل عددی سیستم PDE مرز آزاد، غیرخطی برگرفته از عود سرطان سینه با روش طیفی هم‌مکانی و تفاضلات محدود

مرضیه مطهری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران
و محمدرضا اصلاحچی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس ، تهران، ایران

چکیده. هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش کارآمد برای حل یک سیستم کوپل دیفرانسیل جزیی با مرزی آزاد و غیرخطی می‌باشد. این سیستم برگرفته از یک مدل ریاضی بازگشت سرطان سینه می‌باشد و رابطه کمی میان عوامل تاثیر گذار در سرطان سینه و شعاع تومور را بررسی می‌کند. این مدل ریاضی مبتنی بر سیستم معادلات مشتقات جزیی کوپلُ غیرخطی با مرزی آزاد معرفی کرده است که شامل شش معادله بیضوی، یک معادله سهموی و یک معادله دیفرانسیل معمولی است.

واژه‌های کلیدی: سیستم PDEs ، غیرخطی، مرز آزاد، بیضوی، سهموی، روش‌های طیفی، روش هم‌مکانی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65M70, 65M12, 65M06.

۱. پیش‌گفتار

سرطان سینه شایع‌ترین سرطان در میان زنان است. هر سال ۱.۲ میلیون زن مبتلا به این بیماری می‌شود و همچنین بیشترین تعداد مرگ و میر ناشی از سرطان در بین زنان است. در سال ۲۰۱۸ تخمین زده می‌شود ۶۲۷۰۰۰ زن در اثر سرطان سینه جان خود را از دست داده‌اند (تقریباً ۱۵٪ از کل مرگ و میرهای سرطان در بین زنان) [۳]. این مدل به منظور برقراری رابطه کمی بین قطر تومور در حال رشد و غلظت عامل uPAR در تومور ایجاد شده است. این مدل شامل فعال کننده و مهارکننده پلاسمینوژن مانند uPA، uPAR و PAI-۱ و سلول‌های (سرطانی، فیبروبلاست‌ها) است. در این مدل فرض شده است که پس از درمان تومور سرطان سینه مراحل اولیه، مرحله‌ای که گره‌های لنفاوی هنوز درگیر نشده‌اند، برخی از سلول‌های سرطانی در همان مکان زنده مانده و ناحیه کوچکی از شعاع $R_\circ$ را اشغال می‌کنند و ضمن حفظ شکل کروی، سرطان شروع به رشد می‌کند. این نوع بازگشت را عود محلی می‌گویند. مدل توسط سیستم معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی (PDE) در تومور با شعاع متقارن و در حال رشد $R(t)$ شرح داده شده است. شعاع اولیه $R_\circ = R(\circ)$ پارامتر وابسته به بیمار است. چنین فرض شده است که تراکم کل سلول‌ها در هر نقطه از بافت ثابت باشد. از زمان تکثیر سلول‌های تومور، شعاع $R(t)$ با گذشت زمان در حال افزایش است و سلول‌ها با سرعت $\mathbf{u}$ در حال حرکت هستند که به زمان وابسته است. به‌طور کلی متغیرها به‌صورت شعاعی متقارن و توابعی از (r,t) هستند. در جدول ۱ نام متغیرهای مدل و اختصار آن‌ها آورده شده است.

* سخنران

جدول ۱. متغیرهای مدل؛ غلظت و تراکم در واحد $\frac{g}{cm^۳}$ است.

غلظت uPA غیرفعال	$u_P^i(r,t)$	غلظت uPAR	$u_{PR}(r,t)$
غلظت PAI-۱	$P_A(r,t)$	غلظت uPA فعال	$u_P^a(r,t)$
چگالی سلول‌های سرطانی	$C(r,t)$	چگالی فیبروبلاست	$f(r,t)$
سرعت سلول	$\mathbf{u}(r,t)$	شعاع تومور در زمان t	$R(t)$

مدل بازگشت سرطان سینه [۴] به شرح زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial t} - D_{u_{PR}}\Delta u_{PR} = \underbrace{\lambda_{u_{PR}}M + \lambda_{u_{PR}C}C}_{\text{production}}\underbrace{-d_{u_{PR}}u_{PR}}_{\text{degradation}}, \quad for \circ < r < R(t), \ \ t > \circ,$$

(۱)

$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial n} = \circ, \ \ at\, r = R(t)\, and\, r = \circ, \ \ t > \circ, \ \ \ u_{PR}(r,\circ) = u_{PR\circ}(r) \ \ for \circ \le r \le R_\circ, \ \ t = \circ.$$

$$\frac{\partial u_P^i}{\partial t} - D_{u_P}\Delta u_P^i = \underbrace{\lambda_{uf}f}_{\text{production}}\ \underbrace{-d_{u_p^i}u_p^i}_{\text{degradation}} \ \ for \circ < r < R(t), \ \ t > \circ, \tag{۲}$$

$$\frac{\partial u_P^i}{\partial n} = \circ, \ \ at\, r = R(t)\, and\, r = \circ, \ \ t > \circ, \ \ \ u_P^i(r,\circ) = u_{P\circ}^i(r) \ \ for \circ \le r \le R_\circ, \ \ t = \circ.$$

$$\frac{\partial u_P^a}{\partial t} - D_{u_P}\Delta u_P^a = \underbrace{\lambda_u u_P^i\left(\frac{u_{PR}}{K_{u_{PR}} + u_{PR}}\right)M}_{\text{production}}\ \underbrace{-d_{u_P^a}u_P^a}_{\text{degradation}} \ \ for \circ < r < R(t), \ \ t > \circ,$$

(۳)

$$\frac{\partial u_P^a}{\partial n} = \circ, \ \ at\, r = R(t)\, and\, r = \circ, \ \ t > \circ, \ \ \ u_P^a(r,\circ) = u_{P\circ}^a(r) \ \ for \circ \le r \le R_\circ, \ \ t = \circ.$$

$$\frac{\partial P_A}{\partial t} - D_{P_A}\Delta P_A = \underbrace{\lambda_{PC}C + \lambda_{Pf}f + \lambda_{PM}M}_{\text{production}}\ \underbrace{-d_{P_A}P_A}_{\text{degradation}} \ \ for \circ < r < R(t), \ \ t > \circ,$$

(۴)

$$\frac{\partial P_A}{\partial n} = \circ, \ \ at\, r = R(t)\, and\, r = \circ, \ \ t > \circ, \ \ \ P_A(r,\circ) = P_{A\circ}(r) \ \ for \circ \le r \le R_\circ, \ \ t = \circ.$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla.(uf) - D_f\Delta f = \underbrace{A_f + \lambda_{fC}f\frac{C}{K_C + C}}_{\text{proliferation}}\ \underbrace{-d_f f}_{\text{death}} \ \ for \circ < r < R(t), \ \ t > \circ, \tag{۵}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \circ, \ \ at\, r = R(t)\, and\, r = \circ, \ \ t > \circ, \ \ \ f(r,\circ) = f_\circ(r) \ \ for \ \circ \le r \le R_\circ, \ \ t = \circ.$$

(۶)

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla.(uC) - D_C\Delta C = \underbrace{\left(\lambda_C(w) + \lambda_{Cf}\frac{f}{K_f + f} + \lambda_{Cu_P}\frac{u_P^a}{K_{P_A} + P_A}\frac{u_{PR}}{K_{u_{PR}} + u_{PR}}\right)C\left(۱ - \frac{C}{C_\circ}\right)}_{\text{proliferation}}$$

$$\underbrace{-d_C C}_{\text{death}} \ \ for \circ < r < R(t), \ \ t > \circ,$$

$$\lambda_p(w)=\lambda_p\frac{w}{w_h},\ w<w_h\ and\ \lambda_p(w)=\lambda_p,\ w_h\le w,\quad \frac{\partial C}{\partial n}=0,\ \ at\ r=R(t),$$
$$and\ \ r=0,\ \ t>0, C(r,0)=C_0(r)\ \ for\ 0\le r\le R_0,\ \ t=0.$$

$$f+C=const=1, \tag{۷}$$

$$\nabla.\mathbf{u}=\sum(RHS\ of\ (5),(6))\quad 0<r<R(t),\ \ t>0,\quad u(0,t)=0,\ \ t>0,$$
$$\mathbf{u}=u(r,t)\,\mathbf{e}_r. \tag{۸}$$

$$\frac{dR(t)}{dt}=u(R(t),t)=\mathbf{u}\mathbf{e}_r,\ \ t>0,\ \ R(t)=r. \tag{۹}$$

شرایط اولیه ذیل را برای سلول‌های سرطانی و فیبروبلاست در واحد $\frac{g}{cm^3}$ در نظر می‌گیریم، $f=0/06$، $C=0/4$ و مقدار اولیه باقی متغیرها صفر در نظر گرفته شده است. شرایط اولیه بعد از چند هفته بر نتایج شبیه سازی تأثیر نمی‌گذارد. با این حال، مقدار بسیار کم $R(0)$ نقش مهمی در تکثیر و رشد تومور دارد.

برای توصیف کلی ضرایب، X و Y را به عنوان دو متغیر مدل فرض کنید. D_X ضریب انتشار X است. d_X نرخ تخریب X است. d_{XY} نرخ تخریب X توسط Y است. λ_X نرخ فعال سازی یا تکثیر X است. λ_{XY} نرخ فعال سازی یا تکثیر X توسط Y است. K_X ضریب نیمه اشباع X است. در ادامه برای پرهیز از تکرار مراحل حل معادله فوق را تنها بر یک معادله نشان می‌دهیم برای سادگی، مدل به‌جای استفاده از مختصات استوانه‌ای از مختصات کروی استفاده کرده و (۶) را به شرح زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial t}-D_{u_{PR}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u_{PR}}{\partial r}\right)=\lambda_{u_{PR}M}M+\lambda_{u_{PR}C}C-d_{u_{PR}}u_{PR},\ \ 0<r<R(t),\ t>0, \tag{۱۰}$$
$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial r}(r,t)=0\ at\ r=0,\ \ t>0,$$
$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial r}(r,t)=0,\ \ at\ r=R(t),\ \ t>0,$$
$$u_{PR}(r,0)=u_{PR_0}(r)\ \ for\ 0\le r\le R_0,\ \ t=0,$$

معادله مرزی آزاد یا متحرک مدل می‌تواند در اعمال روش‌های عددی کلاسیک بر روی آن‌ها مشکلاتی ایجاد کند. با به‌کارگیری تکنیک‌های مناسب می‌توان بر این مشکلات فائق آمد. یکی از این روش‌ها تبدیل مرز آزاد به دامنه‌ای ثابت است: $\{(\mathfrak{r},t)\mid 0\le\mathfrak{r}\le 1, t\ge 0\}$ که با تغییر متغیر ذیل ممکن می‌شود [۱].

$$\mathfrak{r}=\frac{r}{R(t)},\ \tau=\int_0^t\frac{ds}{R^2(s)},,\ u_{PR}(\rho,t)=u_{PR}(r,t),\ u_P^i(\mathfrak{r},t)=u_P^i(r,t),$$
$$u_P^a(\mathfrak{r},t)=u_P^a(r,t),\ P_A(\rho,t)=P_A(r,t), f(\mathfrak{r},t)=f(r,t),\ C(\rho,t)=C(r,t),$$
$$\mathfrak{u}(\mathfrak{r},\tau)=R(t)u(r,t),\ \eta(\tau)=R(t).$$

مسئله مرز آزاد (۱۰) به یک مسئله در یک دامنه ثابت تبدیل می‌شود:

$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial\tau}-\hat{r}\hat{u}(1,\tau)\frac{\partial u_{PR}}{\partial\hat{r}}-D_{u_{PR}}\frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\left(\hat{r}^2\frac{\partial u_{PR}}{\partial\hat{r}}\right)$$
$$=\eta^2 g^{u_{PR}}(u_{PR},C),\quad 0<\hat{r}<1,\quad \tau>0, \tag{۱۱}$$
$$\frac{\partial u_{PR}}{\partial\hat{r}}(0,\tau)=0,\quad \tau>0\quad \frac{\partial u_{PR}}{\partial\hat{r}}(1,\tau)=0,\quad \tau>0\quad u_{PR}(\hat{r},0)=u_{PR_0},\quad 0<\hat{r}<1.$$
$$g^{u_{PR}}(u_{PR},C)=\lambda_{u_{PR}C}C-d_{u_{PR}}u_{PR}$$

در این بخش، مسئله‌ی (۱۱) برای $0\le\hat{r}\le 1$ و $0\le\tau\le T$ به‌صورت عددی حل می‌شود. $t_i:=it^*\ (i=0,1,\ldots,M)$ گره‌های شبکه‌بندی زمانی است به‌طوری که $t^*:=\frac{T}{M}$ گام‌های زمانی می‌باشد و M یک عدد صحیح مثبت است. مسئله را با استفاده از روش تفاضلات-محدود و هم‌مکانی طیفی حل

می‌کنیم. برای گسسته‌سازی مشتق زمانی طرح مرتبه دوم (BDF۲/EP۲) را استفاده کرده‌ایم. فرمول گسسته‌سازی برای تقریب مشتق زمانی یک تابع خاص $u(\mathfrak{r},t)$ به‌صورت ذیل است:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\mathfrak{r},t_{n+1})=\frac{u_{n+1}-u_n+\frac{u_{n-1}-u_n}{3}}{\frac{2h}{3}}+e_t. \tag{۱۲}$$

فرمول تقریبی زیر برای خطی‌سازی عوامل غیرخطی به‌کار می‌رود:

$$u(\mathfrak{r},t_{n+1})=2u(\mathfrak{r},t_n)-u(\mathfrak{r},t_{n-1})+e^u. \tag{۱۳}$$

در ادامه، فرض می‌کنیم $u_n(\mathfrak{r})=u(\mathfrak{r},t_n)$. معادله (۱۱) را با توجه به (۱۲) و (۱۳) گسسته می‌کنیم:

(۱۴)

$$\frac{u_{PRn+1}-u_{PRn}+\frac{u_{PRn-1}-u_{PRn}}{3}}{\frac{2t^*}{3}}-\mathfrak{r}(2\mathfrak{u}_n(1)-\mathfrak{u}_{n-1}(1))\frac{\partial u_{PRn+1}}{\partial \mathfrak{r}}$$
$$-D_{u_{PR}}\frac{1}{\mathfrak{r}^2}\frac{\partial}{\partial \mathfrak{r}}\left(\mathfrak{r}^2\frac{\partial u_{PRn+1}}{\partial \mathfrak{r}}\right)=\eta_{n+1}^2\left(2g^{u_{PR}}(u_{PRn},C_n)-g^{u_{PR}}(u_{PRn-1},C_{n-1})\right)-e_t^{u_{PR}},$$
$$0<\mathfrak{r}<1,\quad \tau>0,$$

$$\frac{\partial u_{PRn+1}(0)}{\partial \mathfrak{r}}=0,\quad \tau>0,$$
$$\frac{\partial u_{PRn+1}(1)}{\partial \mathfrak{r}}=0,\quad \tau>0,$$
$$u_{PR0}(\mathfrak{r})=u_{PR0},\quad 0<\mathfrak{r}<1,$$

برای تقریب مسئله (۱۴) از روش طیفی هم‌مکانی استفاده می‌کنیم. در روش هم‌مکانی، از $\{\mathfrak{p}_j(\mathfrak{r})\}_{i=0}^{\infty}$ به عنوان تابع کوششی به‌صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$span\{\mathfrak{p}_0(\mathfrak{r}),\mathfrak{p}_1(\mathfrak{r}),\dots,\mathfrak{p}_k(\mathfrak{r})\}=\{u\in span\{1,\mathfrak{r},\mathfrak{r}^2,\dots,\mathfrak{r}^{k+2}\},\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{r}}\big|_{\mathfrak{r}=0}=0,\frac{\partial u}{\partial \mathfrak{r}}\big|_{\mathfrak{r}=1}=0\}.$$

سپس u_{PRn+1} را با $u_{PR}{}_{n+1}^N$ تقریب می‌زنیم:

$$u_{PR}{}_{n+1}^N(\mathfrak{r})=\sum_{i=0}^{N}co_{u_{PR}}{}_i^{n+1}\mathfrak{p}_i(\mathfrak{r}).$$

انتخاب مناسب توابع کوششی در حل عددی علاوه بر برطرف نمودن شرایط مرزی باید منجر به ماتریس‌های پایدار نیز شوند به‌طوری که عدد حالت به‌دست آمده از ماتریس عملگرها موجب بد وضعی نشود. به همین جهت ما ترکیبی از چندجمله‌ای‌های لژاندر را به‌گونه‌ای که شرایط مرزی در آن صدق کند، انتخاب کرده‌ایم. فرض کنید $L_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر از درجه n باشد و برای ساختن پایه‌های جواب یک معادله دیفرانسیل درجه دوم با شرایط مرزی در دو نقطه داریم [۲]:

$$\mathfrak{p}_n(x)=L_n(x)+a_nL_{n+1}(x)+b_nL_{n+2}(x),\quad 0\le n,$$

که در آن ثابت a_n و b_n به‌گونه‌ای تعیین می‌شوند که شرایط مرزی مسئله $(\frac{\partial \mathfrak{p}_n}{\partial \mathfrak{r}}(\pm1)=0,\ \forall 0\le n)$ را ارضا کنند. با توجه به ویژگی‌های چند جمله‌ای لژاندر که در اختیار داریم:

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_n}{\partial \mathfrak{r}}(\pm1)=\frac{\partial L_n}{\partial \mathfrak{r}}(\pm1)+a_n\frac{\partial L_{n+1}}{\partial \mathfrak{r}}(\pm1)+b_n\frac{\partial \mathfrak{p}_{n+2}}{\partial \mathfrak{r}}(\pm1)$$
$$=\frac{1}{2}(\pm1)^{n-1}n(n+1)+a_n\frac{1}{2}(\pm1)^n(n+1)(n+2)+b_n\frac{1}{2}(\pm1)^{n+1}(n+2)(n+3),$$

از حل این دستگاه دو معادله دو مجهولی خواهیم داشت:

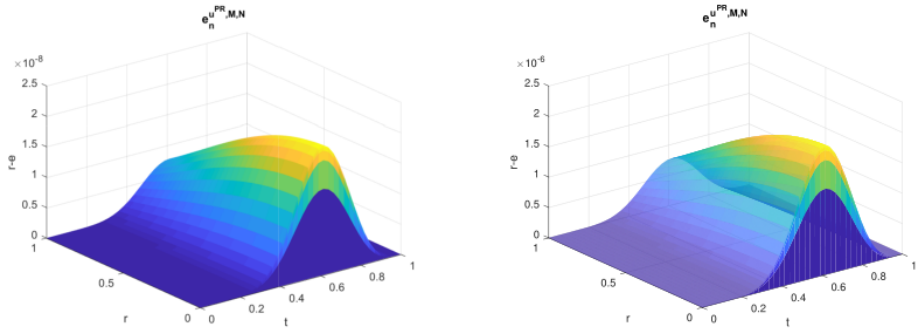
$$a_n = ۰, b_n = -\frac{n(n+۱)}{(n+۲)(n+۳)}.$$

در نتیجه داریم:

$$\mathfrak{p}_n(x) = L_n(x) - \frac{n(n+۱)}{(n+۲)(n+۳)} L_{n+۲}(x) \quad ۰ \leq n.$$

که در آن

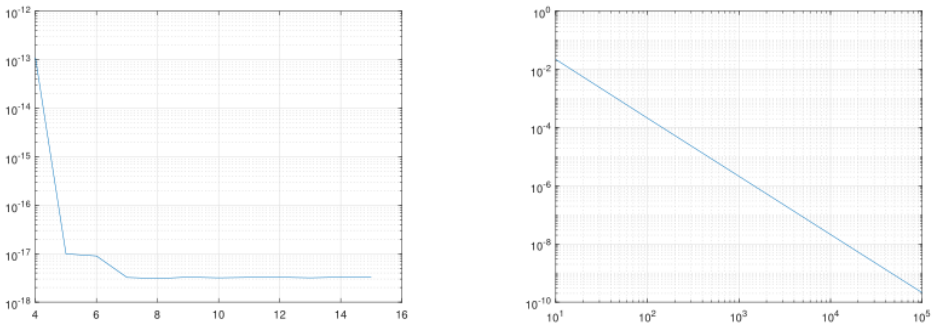
$$\mathfrak{p}_i(\mathfrak{r}) = L_i(\mathfrak{r}) - \frac{i(i+۱)}{(i+۲)(i+۳)} L_{n+۲}(\mathfrak{r}), \quad i = ۰, \ldots, N.$$



شکل ۱. سمت راست خطای نسبی MI=۱۰۰۰ و N=۲۰ و سمت چپ خطای نسبی MI=۱۰۰۰۰ و N=۴۰.

۲. نتایج اصلی

مزیت انتخاب روش حل عددی مزبور برای مدل مفروض، بالا بردن دقت نتایج عددی نسبت به دیگر روش‌های مرسوم، کاهش محاسبات عددی و در نتیجه کاهش زمان cpu می‌باشد. برنامه‌ها با استفاده از MATLAB ۲۰۱۷a



شکل ۲. سمت راست ماکزیمم خطای نسبی با MI= ۱۰, . . . , ۱۰۰۰۰۰ و N=۴۰ و سمت چپ ماکزیمم خطای نسبی با MI=۱۰۰۰۰۰ و N= ۴, ۵, . . . , ۱۵.

جدول ۲. خطای نسبی N=۴۰ و MI= ۱۰, ۱۰۰, . . . , ۱۰۰۰۰۰۰.

r-e	M=۱۰	M=۱۰۰	M=۱۰۰۰	M=۱۰۰۰۰	M=۱۰۰۰۰۰
u_{PR}	۰/۰۲۲۱۶	۰/۰۰۰۲۱	۲/۱۲۰۵۸e-۰۶	۲/۱۱۸۳۹e-۰۸	۲/۱۱۸۱۵e-۱۰

جدول ۳. خطای نسبی MI= ۱۰۰۰۰۰ و N= ۱۰, ۲۰, . . . , ۱۰۰.

r-e	N=۴	N=۵	N=۶	N=۷	N=۸	N=۹
u_{PR}	۷/۲۱e-۰۶	۶/۴۸e-۱۰	۵/۸۴e-۱۰	۲/۱۱e-۱۰	۲/۰۰e-۱۰	۲/۱۵e-۱۰
r-e	N=۱۰	N=۱۱	N=۱۲	N=۱۳	N=۱۴	N=۱۵
u_{PR}	۲/۰۷e-۱۰	۲/۱۲e-۱۰	۲/۱۴e-۱۰	۲/۰۷e-۱۰	۲/۱۴e-۱۰	۲/۱۲e-۱۰

و رایانه با پردازنده Intel Core i۵ (۲/۵۰ گیگاهرتز، ۴ هسته فیزیکی) انجام شده است.
در ابتدا برای مثال با استفاده از معادلات (۱)-(۹) مسئله‌ای می‌سازیم به‌طوری که توابع

$$u_{PR} = ۱۰^{-۶}(x^۲(۱-x)^۲x^۲\sin^۲(t)), R = \frac{e^t}{۲۰}, \quad u_P^a = ۱۰^{-۸}(\cos^۲(\pi x)t^۲(t+۱)),$$
$$u_P^i = ۱۰^{-۶}(\cos^۲(\pi x)t^۲\sin^۲(t)), \quad P_A = ۱۰^{-۷}(\cos^۲(\pi x)(t+۱)), \quad E = ۱۰^{-۳}(\cos^۲(\pi x)t^۲),$$
$$f = ۱۰^{-۲}(x^۲(۱-x)^۲(t+۱)), \quad C = ۱۰^{-۲}(x^۲(۱-x)^۲(t+۱)^۲), \quad u = ۱۰^{-۷}(x^۲(۱-x)^۲t^۲).$$

جواب تحلیلی این معادلات باشند. شکل ۱ نمایش ماکزیم خطای نسبی توابع هستند. توجه کنید N و MI به ترتیب نماینده تعداد نقاط هم‌مکانی، گام زمانی و r-e نماینده خطای نسبی است. شکل ۲ سمت راست برای نمایش خطای گسسته‌سازی زمان ترسیم شده است. توجه داشته باشید ماکزیم خطای نسبی مکانی در حضور روش تفاضلات محدود که خطایی در مرتبه $O(h^۲)$ ایجاد می‌کند رشد کمتری از خود نشان می‌دهد، بنابراین برای نمایش بهتر خطا (M=۱۰۰۰۰۰) قرار می‌دهیم (شکل ۲ سمت چپ). جدول ۲ برای ملاحظه دقیق‌تر تغییرات گسسته‌سازی زمان آورده شده است و جدول ۳ برای بررسی بهتر تغییرات گسسته‌سازی مکان آورده شده است. باقی متغیرها نیز به همین قرار تقریب زده شده‌اند و به دلیل محدودیت از آوردن آن‌ها خودداری شده است.

مراجع

1. S. Esmaili, F. Nasresfahani and M. R. Eslahchi, *Solving a fractional parabolic-hyperbolic free boundary problem which models the growth of tumor with drug application using finite difference-spectral method*, Chaos Solitons Fractals **132** (2020) 109538.
2. J. Shen, T. Tao and L. -L. Wang, *Spectral Methods Algorithms, Analysis and Applications*, Springer, Berlin, 2011.
3. World Health Organisation, *Breast cancer - Early diagnosis and screening* (2020) [online]. `Available at: http://www.who.int/cancer/prevention/diagnosis-screening/breast-cancer/en/`
4. H. Wenrui, and A. Friedman, *Serum upar as biomarker in breast cancer recurrence: A mathematical model*, PLoS One **11** (2016) e0153508.

پست الکترونیکی: motaharimarziyeh@modares.ac.ir
پست الکترونیکی: eslahchi@modares.ac.ir

الگوی بهینه شیمی‌درمانی تومور مغزی با مدلی ریاضی

محسن یوسف‌نژاد*
دانشکده علوم، گروه ریاضی، دانشگاه شیراز، شیراز، ایران
و سید عباس محمدی
دانشکده علوم، گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

چکیده. در این مقاله مسئله تعیین الگوی بهینه شیمی‌درمانی برای جلوگیری از رشد سلول‌های تومور مغزی در نظر گرفته می‌شود. بدین منظور یک مدل کنش-انتشار و مسئله بهینه‌سازی مرتبط با آن مطالعه می‌شود. وجود جواب برای مسئله بهینه‌سازی ثابت خواهد شد.
واژه‌های کلیدی: معادله کنش-انتشار، تومور مغز، الگوی بهینه.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35K57, 49J20, 35Q92.

۱. مقدمه

تومور مغزی یکی از خطرناک‌ترین بیماری‌هایی است که هر ساله باعث مرگ بسیاری در جهان می‌شود. به عنوان مثال، گلیوماها تومورهای مغزی بسیار تهاجمی هستند که به‌طور پراکنده از طریق مغز پخش می‌شوند. در مبتلایان به بالاترین درجه گلیوم که به گلیوبلاستومای چندشکلی[۱] موسوم است، امید به زندگی بین ۶ تا ۱۲ ماه است [۱].

با توجه به وضعیت تومور، یک درمان اساسی پس از عمل جراحی بیماران و برداشت بافت سرطانی، شیمی‌درمانی است. در واقع، بیشتر بیماران برای اهداف درمانی ابتدا تحت عمل جراحی قرار می‌گیرند و برای جلوگیری از پیشرفت تومور در این بیماران، شیمی‌درمانی و رادیودرمانی در نظر گرفته می‌شود [۲].

از مدل‌های ریاضی به عنوان ابزاری مناسب می‌توان برای درک بهتر چگونگی پارامترهای مختلف در رشد گلیوم استفاده کرد. علاوه بر پیش‌بینی پیشرفت بیماری، شبیه‌سازی می‌تواند در تجزیه و تحلیل عوامل موثر در رشد بیماری و کنترل آن بعد از عمل جراحی، بسیار مفید باشد [۲، ۳].

در این مقاله از یک مدل کنش-انتشار برای بررسی تغییرات چگالی تومور استفاده خواهد شد. این مدل علاوه بر اثرات تحولی شیمی‌درمانی، انتشار و تکثیر سلول‌های تومور را نیز توصیف می‌کند. بدین منظور، $u(\mathbf{x},t)$ را چگالی سلول‌های تومور در مکان $\mathbf{x}$ و زمان t و در ناحیه $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ که معرف مغز است، در نظر می‌گیریم. در این صورت تغییرات چگالی سلول‌های تومور با لحاظ کردن شیمی‌درمانی را می توان به روش زیر در نظر گرفت

$$(۱)\qquad \begin{cases} u_t - \nabla\cdot(D(\mathbf{x})\nabla u) = \rho\,(۱-u)\,u - C(t)u, & (\mathbf{x},t)\in\Omega\times(۰,T),\\ \dfrac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = ۰, & (\mathbf{x},t)\in\partial\Omega\times(۰,T),\\ u(\mathbf{x},۰) = u_۰(\mathbf{x}), & \mathbf{x}\in\Omega, \end{cases}$$

که ρ نرخ تکثیر تومور، $D(\mathbf{x})$ ضریب پخش تومور و $C(t)$ نشان دهنده‌ی چگونگی توزیع شیمی‌درمانی بر روی بافت مورد نظر در زمان t است. از نماد $u_C(\mathbf{x},t)$ برای نمایش جواب معادله (۱) متناظر الگوی شیمی‌درمانی $C(t)$ استفاده می‌کنیم.

بر مبنای واقعیت‌های پزشکی، مجموعه قابل قبول از الگوهای شیمی‌درمانی به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند

$$\mathcal{M} = \left\{ C(t)\in L^\infty(۰,T) \mid ۰\le C(t)\le A,\quad \int_۰^T C(t)\,dt = B \right\},$$

* سخنران
[۱] Glioblastoma Multiforme

که در آن A و B اعدادی حقیقی و مثبت به ترتیب متناظر کران بالا برای مقدار داروی تجویزی در شیمی‌درمانی و کل دارو در این روند، هستند.

تجربیات بالینی نشان می‌دهند که الگو یا به‌عبارتی نحوه اجرا و زمان‌بندی شیمی‌درمانی بر اندازه جمعیت سلول‌های تومور بسیار موثر است. به‌طور دقیق‌تر، هدف ما تعیین الگوهای شیمی‌درمانی مطلوب برای کندتر کردن رشد جمعیت تومور است. در واقع، می‌خواهیم الگوی شیمی‌درمانی بهینه را بیابیم که در آن اندازه جمعیت سلول‌های تومور پس از پایان اجرای شیمی‌درمانی کمینه باشد. بدین منظور تابعک زیر را بر مجموعه تمامی الگوهای شیمی درمانی در نظر می‌گیریم

$$\mathcal{J}(C) := \int_{\circ}^{T} \int_{\Omega} u_C(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} dt,$$

که نشان‌دهنده کل جمعیت سلول‌های تومور در طول دوره شیمی‌درمانی در مغز است. پس به‌عبارتی هدف یافتن پاسخی برای مسئله کمینه سازی

$$\min_{C \in \mathcal{M}} \mathcal{J}(C), \tag{۲}$$

است.

۲. وجود جواب

در این بخش، وجود جواب برای مسئله (۲) و برخی از ویژگی‌های تابعک $\mathcal{J}$ برای توسعه یک الگوریتم عددی برای حل این مسئله، بررسی خواهند شد. تمامی این نتایج در مقاله [۴] ثابت شده‌اند.

نخست، قضیه وجود کمینه‌ساز را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\circ < T < \infty$ و $\circ \leq u_\circ(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. جواب بهینه $C^* \in \mathcal{M}$ برای مسئله (۲) وجود دارد.

ثابت می‌کنیم تابعک $\mathcal{J}$ مشتق پذیر است. بدین منظور کافی است نشان دهیم نگاشت

$$\mathcal{L} : C \in \mathcal{M} \to u_C(\mathbf{x}, t), \tag{۳}$$

نسبت به C مشتق پذیر است.

قضیه ۲.۲. فرض کنید $C \in \mathcal{M}$ و u_C جواب متناظر آن از مسئله (۱) باشد. فرض کنید $C_\epsilon = C + \epsilon\eta$ که $\epsilon > \circ$ و $\eta \in L^\infty(\circ, T)$ است. نگاشت (۳) به مفهوم زیر مشتق پذیر است. تابع

$$\psi_\epsilon = \frac{u_{C_\epsilon} - u_C}{\epsilon},$$

را در نظر بگیرید. آن‌گاه تابع $\psi \in L^2(\circ, T; H^1(\Omega))$ وجود دارد که

$$\psi_\epsilon \rightharpoonup \psi,$$

و ψ در مسئله زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} \psi_t - \nabla \cdot (D(\mathbf{x}) \nabla \psi) - (\rho - 2\rho u - C(t))\, \psi = -\eta u, & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (\circ, T), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \circ, & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (\circ, T), \\ w(\mathbf{x}, \circ) = \circ, & \mathbf{x} \in \Omega. \end{cases}$$

برای محاسبه مشتق تابع هدف و شبیه‌سازی‌های عددی جهت یافتن بهینه‌ساز، به مسئله الحاقی متناظر نیاز داریم که به‌صورت زیر بیان می‌شود.

قضیه ۳.۲. فرض کنید $C \in \mathcal{M}$ و $u = u_C$. تابع $w = w_C \in L^2(\circ, T; H^1(\Omega))$ که $w_t \in L^2(\circ, T; H^1(\Omega)^*)$ وجود دارد چنان که در مسئله

$$\begin{cases} w_t + \nabla \cdot (D(\mathbf{x})\nabla w) + (\rho - ۲\rho u - C(t))\, w = ۱ & (\mathbf{x}, t) \in \Omega \times (۰, T), \\ \dfrac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = ۰ & (\mathbf{x}, t) \in \partial\Omega \times (۰, T), \\ w(\mathbf{x}, ۰) = ۰ & \mathbf{x} \in \Omega, \end{cases}$$

صدق می‌کند.

با استفاده از ابزارهای ریاضی بیان شده، می‌توان کمینه‌ساز را در برخی حالات خاص محاسبه نمود. همچنین، یک الگوریتم عددی برای محاسبه کمینه‌ساز در حالت کلی ارائه کرد. نتایج تحلیلی و عددی هر دو نشان می‌دهند که الگوی بهینه شیمی‌درمانی در یک دوره از درمان، با بالاترین مقدار داروی تجویزی ممکن آغاز شده و با یک دوره استراحت پایان می‌یابد [۴].

مراجع

1. M. E. Davis, *Glioblastoma: overview of disease and treatment*, Clin. J. Oncol. Nurs. **20** (5) (2016) S2–S8.
2. G. Powathil, M. Kohandel, S. Sivaloganathan, A. Oza and M. Milosevic, *Mathematical modeling of brain tumors: effects of radiotherapy and chemotherapy*, Phys. Med. Biol. **52** (11) (2007) 3291–3306.
3. R. Rockne, E. C. Alvord, J. K Rockhill and K. R. Swanson, *A mathematical model for brain tumor response to radiation therapy*, J. Math. Biol. **58** (4-5) (2009) 561–578.
4. M. Yousefnezhad, C. Y. Kao and S. A. Mohammadi, *Optimal Chemotherapy for Brain Tumor Growth in a Reaction-Diffusion Model*, submitted.

پست الکترونیکی: m.yousefnezhad@shirazu.ac.ir
پست الکترونیکی: mohammadi@yu.ac.ir

سخنرانی‌ها

ریاضیات فازی

به‌کارگیری سیستم استنتاج فازی مبتنی بر وب برای ارزیابی خطر بیماری‌های قلبی عروقی

رسول حیدری دستجردی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده. ابزار استنتاج فازی مبتنی بر وب برای ارزیابی خطر قلبی عروقی از قوانین استنباط پزشکی مبتنی بر شواهد برای طبقه‌بندی عضویت استفاده می‌کند. با وارد کردن داده‌های بالینی بیمار، این ابزار به متخصصان بهداشت اجازه می‌دهد تا پیش‌بینی خطر قلبی عروقی را به‌دست آورند. بعداً می‌توان از این ابزار برای پیش‌بینی انواع دیگر خطرات از جمله شرایط بیماری شناختی و جسمی استفاده کرد.
واژه‌های کلیدی: ارزیابی ریسک قلبی عروقی، پزشکی مبتنی بر شواهد، منطق فازی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

بیماری قلبی عروقی به طور سنتی یکی از دلایل اصلی مرگ و میر در ایالات متحده است و یک تهدید سلامتی در جمعیت به حساب می‌آید. با این حال، یک بیماری بسیار قابل پیشگیری است که با ایجاد تغییرات مربوط به سبک زندگی در رژیم و فعالیت بدنی و عوامل قابل اصلاح بیمار مانند دور کمر و سطح کلسترول می‌توان تا حدودی از بروز آن جلوگیری کرد که این عوامل به‌طور سنتی مشاهده شده است. با مطالعات معتبر بالینی بر روی جمعیت زیادی از مبتلایان روش‌های مدیریت مبتنی بر دارو در جلوگیری از بیماری قلبی عروقی همیشه مؤثر نیست و به نظر می‌رسد روندی طولانی و گران است. درمان سنتی بیماری قلبی عروقی و هم‌چنین خطر ابتلا به آن به تعداد متغیرها و عوامل دشوار برای ارزیابی و ارتباط با خطر بیماری بستگی دارد. بنابراین، به‌منظور مدیریت و به حداقل رساندن تعداد حوادث بیماری قلبی و عروقی در سال، باید یک برنامه‌ی مناسب برای پیشگیری از بیماری و جلوگیری از خطر ابتلا یا تشدید بیماری قلبی عروقی ارزیابی کرد. از نظر آماری، ارتقاء عمومی بهداشت و پیشگیری از برنامه‌های بیماری در کاهش تعداد حوادث بیماری قلبی عروقی مؤثر است، اما هر یک از آن‌ها را به‌طور کلی نمی‌توان هدف قرار داد. معمولاً شرایط و عوامل خطر شناخته یا ارزیابی نشده است. سوابق پزشکی الکترونیکی و برنامه‌های سلامتی دقیق برای هر فرد به‌راحتی انجام نمی‌شود. یک رویکرد کارآمدتر این است که از ابزارهای انفورماتیک آنلاین و پزشکی برای ارزیابی حالات و خطرات بیماری یا تشدید استفاده کرد.

رویکرد ما که در این کار شرح داده شده است، از ابزارهای محاسباتی و داروهای مبتنی بر شواهد استفاده می‌کند. با استفاده از این دانش و اقدامات مناسب مانند به‌دست آوردن فشار خون، سن، شاخص کلی بدن، جنس و عوامل رفتاری، می‌توان سیستمی را طراحی کرد تا این ورودی‌ها را در الگوریتمی قرار داده و نتایجی به‌دست آورد تا از خطر ابتلا به بیماری قلبی عروقی پیشگیری کند. سپس ما این الگوریتم را برای آگاهی از سلامتی به‌صورت آنلاین در دسترس قرار می‌دهیم که با استفاده از یک پایگاه دانش پزشکی و همچنین نقشه از یک مجموعه داده، دسترسی به سطح نمره خطر را میسر می‌سازد. سپس می‌توان ابزار را برای استنباط سطح خطر سایر بیماری‌ها تقویت کرد.

۲. اساس کلی

تشخیص فازی: عدم قطعیت در طبقه‌بندی بیماران به طبقه‌ای از حالت‌های سلامتی و شرایط بیماری نقش اساسی دارد. عدم قطعیت زبانی، تنوع طبیعی و ذهنیت در تشخیص پزشکی وجود دارد. به عنوان مثال کلمه "بالا"، در زمینه اندازه گیری فشار خون، بسته به سوابق پزشکی بیمار، پیامدهای متفاوتی دارد بنابراین در اندازه‌گیری فشار

* سخنران

خون، با عدم اطمینان آماری ناچیز، می‌توان تفسیر متفاوتی نسبت به معانی و دوره‌های مختلف عمل بسته به زمینه بالینی داشت. در این مقاله، نظریه‌ی فازی، روش ایده‌آلی برای رسیدگی به عدم قطعیت غیر آماری است.

طبقه‌بندی فازی به‌دلیل توانایی آن در رسیدگی به ابهام‌های غیر آماری، در زمینه‌های مختلف پزشکی مانند نظارت بر قلب گنجانیده شده است. در استفاده از مجموعه‌های فازی برای ارزیابی بیماری قلبی عروقی، افرادی مانند اسوارا رائو و گووِیندا رائو در تشخیص بیماری عروق کرونر پژوهش‌هایی انجام داده‌اند [۱]. خوزه آنتونیو سانز و همکاران رویکردی را برای تشخیص پزشکی بیماری‌های قلبی عروقی با استفاده از روش سیستم طبقه‌بندی مبتنی بر قانون فازی با مقدار بازه با قوانین پویا ارائه دادند [۲].

منطق فازی: منطق فازی معرفی شده توسط لطفی‌زاده در سال۱۹۶۵ روش جدیدی را جهت امکان طبقه‌بندی داده‌ها در هنگام عدم ابهام غیر آماری، فراهم می‌کند [۳]. قبل از معرفی روش‌ها از نظر منطق فازی، یک لیوان آب را به‌عنوان نمونه در نظر بگیرید در آن‌چه که یک روش دیجیتالی نامیده می‌شود یک لیوان آب خالی را عدد ۰ و پر را عدد ۱ نسبت می‌دهد. با این‌حال، از تفسیر انسان می‌توان دریافت که همیشه این‌طور نیست، در واقع، به‌ندرت چنین است. منطق فازی به ما این اجازه را می‌دهد که مقدار آب موجود در لیوان را با دو تابع مشخص کنیم سپس می‌توانیم شیشه را به‌عنوان ''عضوی'' با طبقه‌بندی درجات مختلف با درجه از ۰ تا ۱، که ۰ کمترین میزان عضویت و ۱ بالاترین میزان عضویت است، ببینیم.

روش فازی را می‌توان در مراقبت‌های بهداشتی هنگامی‌که ابهام در فرایند طبقه‌بندی وجود دارد به کار برد. به‌طور مثال، پس از طبقه‌بندی بیمار به عنوان ''پیر'' و ''جوان''، می‌توان از وجه تمایزی بین جوان و پیر قائل شد، بنابراین ابهام ناظر را از بین می‌برد. هنگام به‌کارگیری عواملی مانند سن یا فشارخون، فازی می‌تواند منحنی هموارتری را به‌وجود آورد. با این‌حال، در کار فعلی چارچوبی ایجاد کرده‌ایم که می‌تواند برای بیماری‌های دیگر شرایط اعمال شود و فقط به بیماری قلبی عروقی محدود نمی‌شود. صفحات زیر چگونگی استفاده از سیستم تشخیص بیماری قلب مبتنی بر فازی را تشریح می‌کند و هم‌چنین با به‌کارگیری مدل‌ها و نمودارهای ریاضی در برنامه متلب، نحوه استدلال سیستم استنتاج فازی را توضیح می‌دهد.

توابع عضویت: توابع عضویت یا توابع مورد استفاده برای نقشه‌برداری ورودی در دامنه از ۰ تا ۱ به طبقه‌بندی‌های مختلف از نظر شکل طبقه‌بندی می‌شوند. متداول‌ترین آن‌ها توابع مثلثی، ذوزنقه‌ای و گوسین هستند. یک تابع مثلثی دارای یک شیب ثابت است، که به‌طور مستقیم بر میزان عضویت تأثیر می‌گذارد و فقط یک نقطه در فاصله صفر تا یک را به‌خود می‌گیرد. توابع ذوزنقه شبیه توابع مثلثی هستند که دارای مقادیر کامل درجه‌ای می‌باشد. توابع گوسین که توسط سیستم تشخیص بیماری قلب مبتنی بر فازی مورد استفاده ما قرار گرفته است به‌دلیل انحنای توابع و دامنه‌ی متفاوت می‌باشد. فرمول ریاضی این توابع به‌صورت زیر است:

$$U(x) = e^{-\frac{۱}{۲}(\frac{x-c}{\sigma})^۲},$$

جایی‌که $U(x)$ نشانگر درجه‌ی عضویت U بر اساس مقدار ورودی x است و c نمایانگر مقدار میانگین برای ماکزیمم تابع گوسین یا درجه‌ی کامل از ۱ و هم‌چنین مقداری برای نشان دادن انحراف معیار است. توابع توزیع گوسین انتخاب مناسبی برای نشان دادن تغییرات به‌عنوان بسیاری از فرآیندهای فیزیکی و اجتماعی در طبیعت هستند. با استفاده از این تابع، ما دامنه‌ی مقداری از ۰ تا ۱ را برای فرآیندی که به‌عنوان فازی شناخته می‌شود نسبت می‌دهیم . برای محاسبه‌ی خطر بیماری قلبی عروقی ما فقط عوامل از جمله سن، شاخص کلی بدن، جنسیت، فشار خون و مصرف دارو را مورد بحث قرار خواهیم داد.

سیستم طراحی شده برای تشخیصی بیماری قلب مبتنی بر فازی از سن به‌عنوان فیلد ورودی استفاده می‌کند. از سن برای تشخیص بیماری‌های بیماری قلبی استفاده شده است، زیرا عامل مهمی در پیش‌بینی و پیشرفت بیماری قلبی عروقی است. مطالعات و داده‌های بالینی نشان داده‌اند زمانی‌که سن فرد افزایش می‌یابد، فشار خون به‌طور طبیعی به‌دلیل تنگ شدن رگ‌های خونی افزایش می‌یابد. بنابراین، ما آن را در سیستم فازی خود درنظر می‌گیریم. در مورد متغیر ورودی سن، عناوین جوان، میانسال، پیر و بسیار پیر به‌عنوان متغیر زبانی به چهار مجموعه‌ی فازی

توسط هر یک توابع عضویت اختصاص داده شده است که نقشه‌ی دقیق از ورودی به یک مجموعه‌ی فازی توسط جدول زیر نشان داده شده است.

جدول ۱. نقشه‌ی محدوده‌ی فازی سن.

Input	Range	Linguistic term
Age	< ۳۹	Young
	$۳۲ - ۴۷$	Mid-Age
	$۳۹ - ۵۹$	Old
	> ۵۱	Very Old

شاخص کلی بدن: ورودی دیگر شاخص کلی بدن است که به‌صورت محاسبه‌ی مستقیمی از قد و وزن بیمار به‌صورت زیر است:

$$\mathrm{BMI} = \frac{\mathrm{M(Kg)}}{\mathrm{H^{۲}(m)^{۲}}},$$

جایی‌که M وزن بیمار برحسب کیلوگرم و H ارتفاع برحسب متر اندازه‌گیری می‌شود و توابع عضویت را به‌عنوان کم‌وزن، طبیعی، اضافه وزن یا چاق طبقه‌بندی می‌کند. مطمئناً پیامدهای باریک شدن موثر رگ‌های خونی به‌عنوان لخته شدن چربی در دو دسته‌ی اخیر قرار می‌گیرد. البته، خطر وجود بیماری‌های قلبی یک فرد را نمی‌توان صرفاً با محاسبه شاخص کلی بدن پیوند داد، بنابراین این فقط یک نقطه‌ی مقایسه بین بیماران مختلف برای به‌دست آوردن رابطه است. متغیرهای زبانی گفته شده در بالا به شرح زیر است:

جدول ۲. نقشه‌ی محدوده‌ی فازی BMI.

Input	Range	Linguistic term
BMI	< ۲۲	Underweight
	$۱۷ - ۲۸$	Normal
	$۲۴ - ۳۲$	Overweight
	> ۲۸	Obese

جنسیت: ما هم‌چنین جنسیت را به‌عنوان یکی دیگر از پارامترها در محاسبه‌ی خطر بیماری قلبی احتمالی یک بیمار گنجانده‌ایم. از نظر آماری می‌توان ثابت کرد که جنسیت در احتمال ابتلای فرد به یک بیماری قلبی به‌خصوص در افراد با سن کمتر تأثیر دارد. جنسیت نیازی به تابع عضویت ندارد، زیرا به‌سادگی شامل دو مقدار متفاوت است. شخص فقط می‌تواند به یکی از این موارد تعلق داشته باشد، ماده با مقدار صفر و نر با مقدار یک نمایش داده می‌شود. بنابراین هیچ محدوده یا درجه‌ای از عضویت اختصاص داده نمی‌شود. به‌منظور دیدن نقش جنسیت در رابطه با فشارخون، سن و BMI در قوانین استفاده شده برای ارزیابی خطر بیماری های قلبی مجموعه‌ای از این موارد را ارائه می دهیم.

فشار خون: ورودی بعدی یکی از مهم‌ترین عوامل در تشخیص بیماری‌های قلبی است. برای ارزیابی دقیق‌تر خطر بیماری قلبی، فشار خون شرایط قلب در حال استراحت بیمار را هنگامی‌که با عوامل مختلفی از جمله دارو یا شاخص کلی بدن مخلوط می‌شود را به ما می‌گوید. در سیستم فازی، فشار خون همانند سن به چهار اصطلاح زبانی مختلف تقسیم می‌شود که هر یک مربوط به یک تابع عضویت است. شرایط و دامنه‌های مربوطه به شرح زیر است:

خطر بیماری قلبی: در یک سیستم فازی، خروجی نیز به توابع عضویت مرتبط است و به این ترتیب است که نتیجه دقیق‌تری را از ورودی به دست می‌آوریم. کاربر ممکن است با درجات مختلف عضویت در محدوده‌ی ریسک‌های مختلف قرار بگیرد و در محاسبه‌ی آن‌چه که خروجی واضح نامیده می‌شود با سطح ریسک همراه شود. متغیرهای زبانی برای توصیف خطرات و دامنه‌ی مربوط به آن‌ها به شرح زیر است:

جدول ۳. نقشه‌ی محدوده‌ی فازی فشار خون.

Input	Range	Linguistic term
Blood Pressure	< ۱۳۶	Low
	$۱۲۷ - ۱۵۳$	Medium
	$۱۴۳ - ۱۷۲$	High
	> ۱۵۳	Very High

جدول ۴. نقشه‌ی محدوده‌ی فازی خطر بیماری قلب.

Input	Range	Linguistic term
Risk	< ۴۴	Healthy
	$۱۵ - ۶۴$	Mild
	$۴۲ - ۸۳$	Moderate
	$۶۵ - ۱۱۱$	Severe
	> ۸۴	Very Severe

۳. نتایج اصلی

قوانین و خروجی: رویکرد فازی برای هر نوع مسئله‌ای به یک قانون تعیین شده به‌عنوان نقطه‌ی اصلی برای ایجاد رابطه‌ای بین ورودی و خروجی نیاز دارد. در سیستم تشخیص بیماری‌های قلبی مبتنی بر فازی در کل ۲۷ قانون شامل گروهی از ورودی و خروجی داریم. ساختار قانون به شکل زیر است: ''اگر ورودی ۱ در محدوده‌ی ۱باشد و/یا ورودی ۲ در محدوده‌ی ۲ باشد دراین‌صورت خروجی در محدوده‌ی ۳ است.''

فرمول سوم(قانون نحو): هر یک از ورودی‌های فوق الذکر سن، فشار خون، دارو و غیره، دارای یک اصطلاح زبانی مانند جوان، اضافه وزن شدید و غیره است که برای توصیف استفاده می‌شود و هر خروجی ما براساس ورودی که خود انتخاب می‌کنیم، به‌دست می‌آید که لازم نیست نسبت به تک خروجی بودن نگران این موضوع باشیم. کلمات OR و AND قابل تعویض نیستند، همان‌طورکه منطقی می‌توان استنباط کرد و حتی در نحوه‌ی محاسبه‌ی قاعده در سیستم تفاوت وجود دارد قوانینی که با استفاده از AND و OR ساخته شده است، براساس اولویت فنی و هدف از سیستم دارای تمایز اصلی می‌باشد، زمانی‌که از OR استفاده می‌شود از یک تابع حداکثر درحالی‌که AND از تابع مینیمم برای محاسبه‌ی بازده حاصل از عملکرد فردی استفاده می‌شود. اجازه دهید برای کشف این معنی از نظر درجه‌ی عضویت از مثال بالا استفاده کنیم. اگر ورودی ۱ متعلق به دامنه‌ی ۱ با درجه‌ی ۰/۷ و ورودی ۲ متعلق به دامنه‌ی ۲ با درجه‌ی ۰/۸ باشد و تعیین‌کننده ''و'' در قانون استفاده شود، تابع مینیمم فعال می‌شود و در این مورد پایین‌ترین میزان عضویت یعنی ۰/۷ استفاده می‌شود. در صورت استفاده از OR ، از بالاترین میزان عضویت یعنی ۰/۸ به‌کار گرفته می‌شود. سپس از این درجه برای بیان این‌که خروجی متعلق به آن است استفاده می‌شود در صورت استفاده از '' و ''، دامنه ۳ با درجه ۰/۷ ، در صورت استفاده از ''یا'' ۰/۸ به‌کار می‌رود. قوانین مندرج در سیستم تشخیصی بیماری قلبی مبتنی بر فازی به‌صورت تصویر آنی از سیستم استنتاج فازی متلب در زیر آورده شده است. نحوه‌ی ارائه آن در بالا آورده شده و شامل یک عدد در پرانتز در انتهای هر خط متناسب با وزن قانون مرتبط می‌باشد. هرچه مقدار وزن کمتر باشد، از نقشی که قانون در محاسبه‌ی بازده ایفا می‌کند کمتر می‌شود. پس از هر قاعده‌ی فردی در مورد این‌که آیا الزامات این قوانین برآورده شده است یا خیر، پردازش و پایه‌گذاری صورت می‌گیرد که ما طیف وسیعی از میزان عضویت را در هر یک ازتابع‌های عضویت خروجی به‌دست می‌آوریم.

دو قانون ممکن است میزان مختلفی از عضویت در عملکرد مشابه خروجی را فراهم کند. برای مقابله با این اختلاف در قوانین، منطق فازی به ما اجازه می‌دهد که آیا ما می‌خواهیم از مینیمم یا ماکزیمم انتخاب کنیم و یا با به‌کارگیری روش‌های دیگر برای محاسبه‌ی درجه‌ی نهایی هر یک از خروجی‌ها کار کرد. در این سیستم از حداکثر عملکرد مرتبط با هر یک از عملکردهای عضویت استفاده می‌کنیم که حداکثر میزان عضویت را حفظ می‌کند. اکنون

که برای هر تابع عضویت در خروجی درجه‌ای داریم، به معادله دیگر برای ارزیابی خروجی نهایی یا آن‌چه در پایان به عنوان مرحله‌ی فازی سازی نامیده می‌شود نیاز داریم. فرمول مورد استفاده در این مرحله به شرح زیر است:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}.$$

فرمول چهارم(خروجی واضح): M_i یا همان درجه‌ی عضویت از قوانین به‌دست می‌آید. برای توابع n-n بودن ۱ برای اولین تابع مربوط به سالم بودن است و ۲ برای تابع دوم یا همان حالت ملایم و به‌همین صورت ادامه دارد، c_i مقدار c است که در فرمول ۱ برای ایجاد تابع عضویت استفاده می‌شود یا به‌عبارت دیگر، مقداری که میزان عضویت در آن ۱ است و y ، خروجی واضح یا همان میزان نهایی خطر بیماری قلبی است.

۴. دست‌آوردهای پژوهش

اجرای وب: با استفاده از سیستم استنتاج فازی متلب، می‌توان یک رویکرد فازی را ایجاد کرد که این سیستم به ما امکان می دهد رابطه‌ی بین ورودی و خروجی را به‌وضوح مشاهده کنیم و انواع محاسبات انجام شده توسط قوانین و نقشه برداری از درجه‌ی خروجی را اصلاح کنیم. مدل‌های گرافیکی که در نشان دادن تابع عضویت مفید است به‌عنوان یک گروه از نمودارهای دو بعدی و سه بعدی عمل می‌کند. در رویکرد وب برای سیستم تشخیصی بیماری قلب مبتنی بر فازی ما از زبان برنامه نویسی PHP و هم‌چنین یک سرور Apache برای توسعه استفاده کرده‌ایم. یک فرم ساده HTML که برای دست‌یابی به ورودی به‌همراه یک کنترل کننده فرم PHP و چندین تابع برای ایجاد درجه‌ی عضویت، قوانین و خروجی واضح برنامه ریزی شده است تا وب سایت به‌راحتی در دسترس بیماران قرار گیرد.

مراجع

1. M. Eswara Rao and Dr. S. Govinda Rao, *Expert systems for heart problems*, Int. J. Sci. Eng. Comput. Tech. **4** (10) (2014) 266–271.
2. J. A. Sanz, M. Galar, A. Jurio, A. Brugos, M. Pagola and H. Bustince, *Medical diagnosis of cardiovascular diseases using an interval-valued fuzzy rule-based classification system*, Appl. Soft Comput. **20** (2014) 103–111.
3. L. A. Zadeh, *Fuzzy sets*, Info. Control **8** (1965) 338–353.

پست الکترونیکی: Rasoul59heidary@yahoo.com

نامساوی دیاز-متکالف برای انتگرال‌های فازی

محمدرضا کریم‌زاده*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
و بیاض دارابی
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

چکیده. در این مقاله، حالت فازی نامساوی انتگرالی دیاز-متکالف که قبلاً در آنالیز کلاسیک روی بازه دلخواه X اثبات شده است، را با مثالی برای انتگرال‌های فازی رد کرده و سپس حالت فازی این نامساوی را روی بازه $[0,1]$ مطرح می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: انتگرال سوگینو، نامساوی انتگرالی، نامساوی دیاز-متکالف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 03E72, 26E50.

۱. مقدمات

نظریه فازی اولین بار توسط پروفسور لطفی عسگرزاده در سال ۱۹۶۵ در مقاله‌ای به نام «مجموعه‌های فازی» معرفی گردید. پس از مدتی کوتاه این نظریه در همه‌ی علوم، از جمله شاخه‌ی آنالیز در زمینه فضاهای متریک، فضاهای نرم‌دار و فضاهای برداری توپولوژیکی ورود پیدا کرد. نظریه اندازه و انتگرال فازی توسط سوگینو در رساله دکتری او تحت عنوان نظریه انتگرال فازی و کاربردهای آن در سال ۱۹۷۴ معرفی شده است. ویژگی‌ها و کاربرد انتگرال سوگینو به وسیله مولفان زیادی بررسی شده است. در این میان، رالسکو و آدامز در سال ۱۹۸۰، چندین تعریف معادل با انتگرال فازی را بیان کرده‌اند. رومن-فلورس و همکارانش پیوستگی انتگرال فازی و $H-$پیوستگی اندازه‌های فازی را تعریف کرده‌اند. وانگ و کلیر، در کتاب تئوری اندازه فازی به بررسی اندازه‌های فازی و نظریه انتگرال فازی پرداخته‌اند. اخیراً مطالعه روی برخی از نامساوی‌های انتگرالی فازی توسط دارابی و همکاران صورت گرفته است.

در ادامه به بیان برخی تعاریف و نتایج شناخته شده از نظریه اندازه می‌پردازیم.

فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی، Σ یک $\sigma-$جبر روی مجموعه X و $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ یک تابع مجموعه‌ای نامنفی، حقیقی مقدار توسعه یافته روی Σ باشد.

تعریف ۱.۱. تابع مجموعه‌ای $\mu : \Sigma \to [0,\infty]$ یک اندازه‌ی فازی روی (X,Σ) نامیده می‌شود اگر و تنها اگر:

(۱) اگر $\emptyset \in \Sigma$ در این‌صورت $\mu(\emptyset) = 0$ (میل کردن به صفر در $\emptyset$)،
(۲) اگر $E \in \Sigma$ و $F \in \Sigma$ و $E \subseteq F$، در این‌صورت $\mu(E) \leq \mu(F)$ (یکنوایی)،
(۳) $\{E_n\} \subset \Sigma$، $E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$، در این‌صورت $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n)$ (پیوستگی از پایین)،
(۴) $\{E_n\} \subset \Sigma$، $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$، $\mu(E_1) < \infty$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \Sigma$، در این‌صورت $\lim_n \mu(E_n) = \mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)$ (پیوستگی از بالا).

در این‌صورت سه‌تایی (X,Σ,μ) را یک فضای اندازه فازی می‌نامند.
اگر f یک تابع حقیقی مثبت تعریف شده روی X باشد، $\alpha-$برش f را با

$$L_\alpha f = \{x \in X : \ f(x) \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha\},$$

* سخنران

نشان می‌دهیم.
اگر $\alpha \leq \beta$ باشد، آنگاه $L_\beta f \subseteq L_\alpha f$.
مجموعه تمام توابع $\mu-$اندازه‌پذیر نامنفی f را با نماد $\mathcal{F}^\mu(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۱. فرض کنید μ یک اندازه فازی روی (X,Σ) باشد. اگر $f \in \mathcal{F}^\mu(X)$ و $A \in \Sigma$، انتگرال فازی f روی A نسبت به اندازه فازی μ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\oint_A f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} \left[\alpha \wedge \mu\left(A \cap \{f \geq \alpha\}\right)\right].$$

وقتی $\vee$ و $\wedge$ به ترتیب عملگرهای sup و inf روی $[0,\infty]$ را نشان می‌دهند.
اگر $A = X$ باشد، آنگاه

$$\oint_A f d\mu = \bigvee_{\alpha \geq 0} \left[\alpha \wedge \mu\left(\{f \geq \alpha\}\right)\right].$$

در ادامه به بیان چند ویژگی مهم انتگرال فازی می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنید $A, B \in \Sigma$ و μ اندازه فازی باشد. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $f \in \mathcal{F}^\mu(X)$، $\oint_A f d\mu \leq \mu(A)$.
(۲) اگر $\mu(A) = 0$ آنگاه برای هر $f \in \mathcal{F}^\mu(X)$، $\oint_A f d\mu = 0$.
(۳) اگر $\oint_A f d\mu = 0$ آنگاه $\mu(A \cap \{x | f(x) > 0\}) = 0$.
(۴) اگر $f_2 \leq f_1$، آنگاه $\oint_A f_1 d\mu \leq \oint_A f_2 d\mu$.
(۵) اگر χ_A تابع مشخصه‌ی A باشد، آنگاه $\oint_A f d\mu = \oint f.\chi_A d\mu$.
(۶) برای هر ثابت $a \in [0,\infty]$، $\oint_A a d\mu = a \wedge \mu(A)$.
(۷) برای هر ثابت $a \in [0,\infty]$،

$$\oint_A (f+a) d\mu \leq \oint_A f d\mu + \oint_A a d\mu.$$

(۸) اگر $A \supset B$، آنگاه

$$\oint_A f d\mu \geq \oint_B f d\mu.$$

۲. نتایج اصلی

در این قسمت به بیان نامساوی دیاز-متکالف برای انتگرال‌های فازی می‌پردازیم.
حالت کلاسیک نامساوی دیاز-متکالف: فرض کنید (X,μ) یک فضای احتمال و $f, g \in L^2(X,\mu)$، $0 < m < M$ و $mg \leq f \leq Mg$، آنگاه

$$\int_X f^2 d\mu \cdot \int_X g^2 d\mu \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \left(\int_X (f \cdot g)\, d\mu\right)^2. \qquad (1)$$

نامساوی فوق در حالت کلاسیک، برای انتگرال‌های فازی برقرار نمی‌باشد. این مطلب را در ادامه با مثالی نشان می‌دهیم.

مثال ۱.۲. فرض کنیم $f(x) = \frac{x}{۲}$، $g(x) = x$ و $۰ \leq \frac{f}{g} \leq ۱$ باشند. در این‌صورت با یک محاسبه ساده داریم:

$$\oint_{۰}^{۱} f d\mu = ۰/۳۳, \qquad \oint_{۰}^{۱} f^{۲} d\mu = ۰/۱۸, \qquad \oint_{۰}^{۱} g d\mu = ۰/۵,$$
$$\oint_{۰}^{۱} g^{۲} d\mu = ۰/۶۱۸, \qquad \left(\oint_{۰}^{۱} (f \cdot g) d\mu\right)^{۲} = ۰/۰۷۲.$$

حال با انتخاب $M = ۱$ و $m = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آوریم:

$$\oint_{۰}^{۱} f^{۲} d\mu \cdot \oint_{۰}^{۱} g^{۲} d\mu \not\leq \frac{(M+m)^{۲}}{۴Mm} \left(\oint_{۰}^{۱} (f \cdot g)\, d\mu\right)^{۲}.$$

در ادامه به بیان حالت فازی نامساوی دیاز–متکالف می‌پردازیم.

قضیه ۲.۲. (حالت فازی نامساوی دیاز–متکالف): فرض کنید $f, g : [۰, ۱] \to [۰, ۱]$، $۰ < m < M$، $mg \leq g \leq Mg$ و μ اندازه لبگ باشد. در این‌صورت نامساوی

$$\oint_{۰}^{۱} f^{۲} d\mu \cdot \oint_{۰}^{۱} g^{۲} d\mu \leq \frac{(M+m)^{۲}}{۴Mm} \oint_{۰}^{۱} (f \cdot g)^{۲}\, d\mu,$$

برقرار است.

مراجع

1. H. Agahi, R. Mesiar and Y. Ouyang, *General Minkowski type inequalities for Sugeno integrals*, Fuzzy Sets Syst. **161** (5) (2010) 708–715.
2. B. Daraby, *Generalization of the Stolarsky type inequality for pseudo-integrals*, Fuzzy Sets Syst. **194** (2012) 90–96.
3. B. Daraby and L. Arabi, *Related Fritz Carlson type inequalities for Sugeno integrals*, Soft Comput . **17** (2013) 1745–1750.
4. M. S. Moslehian, R. Nakamoto and Y. Seo, *A Diaz Metealf type inequality for positive linear maps and its applications*, Electron. J. Linear Algebra **22** (2011) 179–190.
5. A. Flores-Franulič and H. Román-Flores, *A Chebyshev type inequality for fuzzy integrals*, Appl. Math. Comput. **190** (2) (2007) 1178–1184.
6. Y. Ouyang, R. Mesiar and J. Li, *On the comonotonic-$*$-property for sugeno integral*, Appl. Math. Comput. **211** (2) (2009) 450–458.
7. P. S. Bullen, *A Dictionary of Inequalities*, Longman, New York, 1998.
8. M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, **1974**.
9. Z. Wang and G. J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Springer-Verlag, US, 1992.

پست الکترونیکی: bdaraby@maragheh.ac.ir
پست الکترونیکی: mkmk150@gmail.com

سخنرانی‌ها

نظریه گراف و ترکیبیات

پیرامون طیف ماتریس سایدل گراف‌ها

مرجان حکیمی‌نژاد[†] *
دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران
و مجتبی قربانی
دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران

چکیده. فرض می‌کنیم G گراف ساده n رأسی با ماتریس مجاورت $A(G)$ است. در این‌صورت مجموعه مقادیر ویژه ماتریس سایدل $S(G) = J - I - ۲A(G)$ که در آن I ماتریس همانی و J ماتریس واحد است را طیف ماتریس سایدل می‌نامیم. در این مقاله قصد داریم به مطالعه طیف سایدل گراف‌ها پرداخته و با فرض این‌که $\mathcal{G}(n,r)$ مجموعه گراف‌های n رأسی دارای یک مقدار ویژه با ضریب تکرار r در ماتریس سایدل است، گراف‌های متعلق به $\mathcal{G}(n,n-i)$، $(۳ \leq i \leq ۱)$ را بر اساس طیف ماتریس سایدل رده‌بندی کنیم.
واژه‌های کلیدی: ماتریس سایدل، طیف ماتریس سایدل، سایدل سوئچینگ.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C50, 05C35.

۱. پیش‌گفتار

فرض می‌کنیم G گراف ساده n رأسی با ماتریس مجاورت $A(G)$ است. مقادیر ویژه ماتریس مجاورت گراف G را به‌صورت $\lambda_۱ \geq \lambda_۲ \geq \cdots \geq \lambda_n$ مرتب می‌کنیم. گراف خطی، گرافی است که در آن مجموعه رئوس برابر مجموعه یال‌های گراف G است و دو رأس با هم مجاورند، هرگاه یال‌های متناظر آن‌ها در G، در یک رأس مشترک باشند. گراف $\overline{G}$ را مکمل گراف G گوییم. گراف کامل، تهی، مسیر، دور، ستاره و دوبخشی کامل از مرتبه n را به‌ترتیب با K_n، $\overline{K}_n$، P_n، C_n و S_n و $K_{n_۱,n_۲}$ $(n_۱ + n_۲ = n)$ نشان می‌دهیم. گرافی که از حذف یک جورسازی کامل از گراف دوبخشی کامل حاصل شود را با $K^-_{n_۱,n_۲}$ نشان می‌دهیم. گراف $G \circledast J_m$، از جایگزین کردن هر رأس از G با خوشه m رأسی به‌دست می‌آید که در آن هر دو خوشه به هم متصل می‌شوند اگر و تنها اگر رئوس متناظر با آن‌ها در G با هم مجاور باشند. فرض می‌کنیم $G_۱$ و $G_۲$ دو گراف با مجموعه رئوس و یال‌های مجزا هستند. در این‌صورت اجتماع دو گراف که با علامت $G_۱ \cup G_۲$ نشان می‌دهیم، گرافی است که از کنار هم قرار دادن دو گراف بدون انطباق رأس‌ها و یال‌ها حاصل می‌شود. همچنین، اجتماع m کپی از گراف G را به وسیله mG نشان می‌دهیم، یعنی

$$mG = \underbrace{G \cup \cdots \cup G}_{m\text{بار}}.$$

ماتریس سایدل S، یک $(۰, \pm ۱)$-ماتریس است که درایه‌های روی قطر اصلی آن صفر و بقیه درایه‌ها ۱ یا -۱ هستند. برای اولین بار در سال ۱۹۶۶ ماتریس سایدل، توسط ریاضیدانانی در زمینه هندسه و ترکیبیات به نام‌های وان لینت و سایدل مطرح شد. در سال ۱۹۸۰ سوتکوویچ و همکارانش در [۳]، ماتریس سایدل متناظر با گراف G را با عنوان ماتریس اصلاح شده ماتریس مجاورت به‌صورت زیر معرفی کردند و زمینه ساز ورود آن به نظریه طیف گراف‌ها شدند.

[†] این مقاله گزارش قسمتی از رساله دکتری اینجانب است که تحت راهنمایی آقای دکتر مجتبی قربانی و در دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی انجام شده است [۱].
* سخنران

تعریف ۱.۱. فرض می‌کنیم G گراف n رأسی است. در این‌صورت ماتریس سایدل $S(G)$، یک ماتریس متقارن از مرتبه n است که به‌صورت $S(G) = J - I - ۲A(G)$ تعریف می‌شود و درایه‌های آن عبارتند از:

$$S_{ij} = \begin{cases} -۱ & v_i \text{ و } v_j \text{ مجاور باشند}, i \neq j \\ ۱ & v_i \text{ و } v_j \text{ مجاور نباشند}, i \neq j \\ ۰ & i = j \end{cases},$$

که در آن $۱ \leq i, j \leq n$، I ماتریس همانی و J ماتریس واحد است.

در ادامه، طیف سایدل گراف G را با $\mathrm{Spec}_S(G)$ نشان داده و آن‌ها را به‌صورت $\mu_۱ \geq \mu_۲ \geq \cdots \geq \mu_n$ مرتب می‌کنیم. به تعداد سطرهای (یا ستون‌های) مستقل خطی از ماتریس مربعی S رتبه ماتریس می‌گوییم و آن‌را با $\mathrm{rank}(S)$ نشان می‌دهیم. به‌سادگی مشاهده می‌شود، ماتریس سایدل گراف G به‌صورت $S(G) = A(\overline{G}) - A(G)$ و $S(G) = A(K_n) - ۲A(G)$ نیز قابل نمایش است. بنابراین اگر S ماتریس سایدل گراف G و $\overline{S}$ ماتریس سایدل گراف $\overline{G}$ باشد، آن‌گاه $S(\overline{G}) = -S(G)$ است. ماتریس سایدل نقش مهمی در مطالعه ویژگی‌های طیفی گراف‌های منظم و به‌خصوص گراف‌های قویاً منظم دارد. خاصیت اصلی ماتریس‌های سایدل، از توصیف فرایند سوئچینگ گراف به‌دست می‌آید که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۲.۱. فرض می‌کنیم G گرافی از مرتبه n است. مجموعه رئوس $V(G)$ را به دو مجموعه $F_۱$ و $F_۲ = V(G) \setminus F_۱$ به‌طور دلخواه افراز کنید. با در نظر گرفتن این دو مجموعه، گراف G' را این‌گونه بسازید: ابتدا تمام یال‌های میان $F_۱$ و $F_۲$ را که متعلق به مجموعه یال‌های گراف G هستند، حذف کرده و سپس میان $F_۱$ و $F_۲$ یال‌هایی‌که متعلق به مجموعه یال‌های گراف G نیستند را اضافه کنید. در این‌صورت گراف‌های G و G' را سایدل سوئچینگ یکدیگر متناظر با $F_۱$ می‌نامند.

اگر گراف G' سایدل سوئچینگ گراف G باشد، آن‌گاه ماتریس‌های $S(G)$ و $S(G')$ هم‌طیف هستند، [۶]. ویژگی سایدل سوئیچینگ یک رابطه هم ارزی است و کلاس‌های هم ارزی آن، کلاس‌های سوئیچینگ نامیده می‌شوند.

۲. نتایج اصلی

در این بخش به مطالعه ویژگی‌های طیف ماتریس سایدل می‌پردازیم.

لم ۱.۲. [۲] فرض می‌کنیم گراف G از مرتبه n است. در این‌صورت روابط زیر برقرار هستند:

۱) $\sum_{i=۱}^{n} \mu_i = ۰$،

۲) $\sum_{i=۱}^{n} \mu_i^۲ = n(n-۱)$.

لم ۲.۲. [۵] فرض می‌کنیم G گرافی k-منظم از مرتبه n است. در این‌صورت

$$\mathrm{Spec}_S(G) = \{n - ۱ - ۲k, -۱ - ۲\lambda_۲, \ldots, -۱ - ۲\lambda_n\},$$

که در آن $k \geq \lambda_۲ \geq \cdots \geq \lambda_n$ مقادیر ویژه G هستند.

قضیه ۳.۲. [۵] فرض می‌کنیم $d \geq ۱$ و ماتریس سایدل S از مرتبه $n \geq ۲$ دارای کوچک‌ترین مقدار ویژه μ_n با ضریب تکرار $n - d \geq ۱$ است. هم‌چنین، فرض می‌کنیم $\mu_n^۲ \geq d + ۲$. در این‌صورت

$$n \leq \frac{d(\mu_n^۲ - ۱)}{\mu_n^۲ - d},$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر S دارای طیف $\{[\mu_n]^{n-d}, [\frac{\mu_n}{d}(n-d)]^d\}$ باشد.

قضیه ۴.۲. [۴] فرض می‌کنیم S ماتریس سایدل از مرتبه n با طیف زیر است:

$$\{[\mu_1]^{n-a}, [\mu_2]^b, [\mu_3]^{a-b}\},$$

که در آن $1 \leq a \leq n-1$ و $2 \leq b \leq a-1$. در این‌صورت $b = n-a = a-b$ غیرممکن است.

نتیجه ۵.۲. [۴] هر ماتریس سایدل با سه مقدار ویژه متمایز دارای یک مقدار ویژه صحیح است.

قضیه ۶.۲. [۵] فرض می‌کنیم ماتریس سایدل S از مرتبه n با طیف $\{[\mu_1]^a, [\mu_2]^b, [\mu_3]^1\}$ است که در آن a و b اعداد صحیح مثبت هستند. در این‌صورت دسته سوئچینگ S شامل یک گراف (قویاً) منظم با طیف مجاورت زیر است:

$$\mathrm{Spes}_S(G) = \left\{\left[\frac{-1-\mu_1}{2}\right]^a, \left[\frac{-1-\mu_2}{2}\right]^b, \left[\frac{n-1-\mu_3}{2}\right]^1\right\}.$$

۱.۲. **تعیین گراف‌ها با یک مقدار ویژه سایدل تکراری.** فرض می‌کنیم $\mathcal{G}(n,r)$ مجموعه گراف‌های n رأسی دارای یک مقدار ویژه با ضریب تکرار r در ماتریس سایدل است. در این بخش، قصد داریم گراف‌های متعلق به $\mathcal{G}(n,n-i)$، $(1 \leq i \leq 3)$ را بر اساس طیف ماتریس سایدل رده‌بندی کنیم. شایان ذکر است، این موضوع در تعیین منحصر به‌فردی گراف‌های متعلق به این مجموعه توسط طیف‌شان حائز اهمیت است.
در قضیه زیر، گراف‌های متعلق به مجموعه‌های $\mathcal{G}(n,n-1)$ و $\mathcal{G}(n,n-2)$ را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۷.۲. [۷] فرض می‌کنیم G گرافی از مرتبه n است. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) برای هر عدد صحیح $n \geq 2$، داریم:

$$\mathcal{G}(n,n-1) = \{K_n, \overline{K}_n, K_{n_1,n_2}, K_{n_1} \cup K_{n_2}\},$$

که در آن $n_1 + n_2 = n$ است.

۲) برای هر عدد صحیح $n \geq 3$، داریم:

$$\mathcal{G}(n,n-2) = \{K_3, \overline{K}_3, P_3, K_2 \cup K_1\}.$$

به‌سادگی می‌توان دید، هر گراف G متعلق به $\mathcal{G}(n,n-3)$، دارای حداکثر چهار مقدار ویژه متمایز سایدل است. بنابراین، از لحاظ تعداد و مرتبه تکرار مقادیر ویژه سایدل به سه دسته زیر تقسیم بندی می‌شود:

$$\mathcal{G}_1(n,n-3) = \{G \in \mathcal{G}(n,n-3) \mid \mathrm{Spec}_S(G) = \{[\alpha]^{n-3}, [\beta]^3\}\},$$
$$\mathcal{G}_2(n,n-3) = \{G \in \mathcal{G}(n,n-3) \mid \mathrm{Spec}_S(G) = \{[\alpha]^{n-3}, [\beta]^2, [\gamma]^1\}\},$$
$$\mathcal{G}_3(n,n-3) = \{G \in \mathcal{G}(n,n-3) \mid \mathrm{Spec}_S(G) = \{[\alpha]^{n-3}, [\beta]^1, [\gamma]^1, [\rho]^1\}\},$$

قضیه ۸.۲. [۷] فرض می‌کنیم $G \in \mathcal{G}(n,n-3)$ از مرتبه $n \geq 6$ است. اگر $\mathrm{rank}(S(G)) = n-1$ آن‌گاه $\mathcal{G}(n,n-3)$ تهی است.

قضیه ۹.۲. [۷] فرض می‌کنیم $G \in \mathcal{G}_1(n,n-3)$ از مرتبه $n \geq 4$ است. در این‌صورت

$$\mathcal{G}_1(n,n-3) = \{K_4, \overline{K}_4, C_4, S_4, 2K_2, K_3 \cup K_1, C_5 \cup K_1, H_1, H_2, H_3\},$$

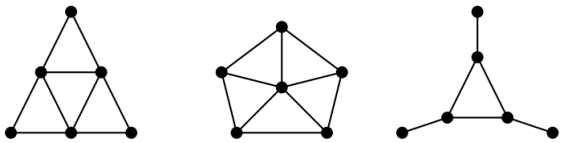
که در آن H_i، $(1 \leq i \leq 3)$ در شکل ۱ رسم شده است.

قضیه ۱۰.۲. [۷] هیچ گرافی متعلق به $\mathcal{G}_2(n,n-3)$ از مرتبه $n \geq 4$ با طیف سایدل $\{[\alpha]^{n-3}, [\beta]^2, [\gamma]^1\}$ وجود ندارد که در آن α, β, γ در شرایط زیر صدق می‌کنند:

۱) $\alpha < \beta < 0 < \gamma$ یا $\beta < \alpha < 0 < \gamma$ یا $\gamma < 0 < \beta < \alpha$ یا $\gamma < 0 < \alpha < \beta$.

۲) $\gamma < \beta < 0 < \alpha$ یا $\alpha < 0 < \beta < \gamma$.

۳) $\alpha < \gamma < 0 < \beta$ یا $\beta < 0 < \gamma < \alpha$.



شکل ۱. تعدادی از گراف‌های متعلق به مجموعه $\mathcal{G}_1(n, n-3)$.

۴) $\alpha < 0 < \gamma < \beta$ یا $\beta < \gamma < 0 < \alpha$.

قضیه ۱۱.۲. [۷] فرض می‌کنیم گراف $G \in \mathcal{G}_2(n, n-3)$ همبند منظم از مرتبه ۴ $n \geq$ است. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) اگر $\gamma < \alpha < \beta$، آن‌گاه G با یکی از گراف‌های $K_{\frac{n}{3},\frac{n}{3},\frac{n}{3}}$، $(0 \overset{3}{\equiv} n)$ و $\overline{K_{3,3}^- \circledast J_{\frac{n}{6}}}$، $(0 \overset{6}{\equiv} n)$ یکریخت است.

۲) اگر $\beta < \alpha < \gamma$، آن‌گاه G با گراف $K_{3,3}^- \circledast J_{\frac{n}{6}}$، $(0 \overset{6}{\equiv} n)$ است.

قضیه ۱۲.۲. [۷] فرض کنید $G \in \mathcal{G}_3(n, n-3)$ از مرتبه است. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

۱) هیچ گرافی متعلق به $\mathcal{G}_3(n, n-3)$ وجود ندارد هرگاه در یکی از شرایط زیر صدق کند.

$\alpha < \beta < \gamma < 0 < \rho$ یا $\beta < \alpha < \gamma < 0 < \rho$ یا $\beta < \gamma < \alpha < 0 < \rho$
یا $\rho < 0 < \gamma < \beta < \alpha$ یا $\rho < 0 < \gamma < \alpha < \beta$ یا $\rho < 0 < \alpha < \gamma < \beta$
$\alpha < \beta < 0 < \gamma < \rho$ یا $\rho < \gamma < 0 < \beta < \alpha$.

۲) اگر $\rho < \gamma < \beta < 0 < \alpha$ یا $\alpha < 0 < \beta < \gamma < \rho$، آن‌گاه G سایدل هم ارز با گراف mK_2 $(m \geq 2)$ یا $\overline{T(8)}$ (مکمل گراف خطی K_8) است.

مراجع

1. M. Hakimi-Nezhaad, *On the Spectrum and Co-spectrality Distance in Draphs*, Ph.D. Thesis, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran, 2019.
2. A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Universitext, Springer, New York, 2012.
3. D. Cvetković, M. Doob and H. Sachs, *Spectra of Graphs-Theory and Application*, Academic Press, New York, 1980.
4. G. Greaves, J. H. Koolen, A. Munemasa and F. Szöllősi, *Equiangular lines in Euclidean spaces*, J. Combin. Theory Ser. A **138** (2016) 208–235.
5. G. R. W. Greaves, *Equiangular line systems and switching classes containing regular graphs*, Linear Algebra Appl. **536** (2018) 31–51.
6. W. H. Haemers, *Seidel switching and graph energy*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. **68** (2012) 653–659.
7. M. Ghorbani, M Hakimi-Nezhaad and B. Zhou, *Graphs with at most four Seidel eigenvalues*, Kragujevac J. Math. **47** (2) (2023) 173–186.

پست الکترونیکی: m.hakiminezhaad@sru.ac.ir
پست الکترونیکی: mghorbani@sru.ac.ir

بازی‌هایی براساس برچسب‌گذاری گراف‌ها

امیر خمسه*
دانشکده ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران
و مهیار قاصدیان
دانشکده ریاضی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران

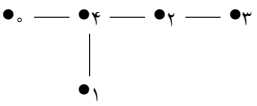
چکیده. مطالعه بازی‌های ترکیبیاتی یکی از موضوعات مهم در ریاضیات گسسته و نظریه بازی‌ها است. به‌طور خاص، بازی‌های مرتبط با چسب‌گذاری گراف‌ها یکی از موضوعات جذاب در این زمینه است که کمتر مورد توجه قرار گرفته است. هدف ما در این یادداشت معرفیِ چند بازی مرتبط با برچسب‌گذاری گراف‌ها و ارائه چند نتیجه اولیه درباره آن‌ها است. به‌علاوه، چندین مسئله جذاب تحقیقاتی در ارتباط با برچسب‌گذاری گراف‌ها ارائه می‌شود.
واژه‌های کلیدی: بازی‌های ترکیبیاتی، برچسب‌گذاری دل‌پذیر، برچسب‌گذاری رأس جادویی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C78, 05C57.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنیم $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رأس‌های V و مجموعه یال‌های E باشد. یک برچسب‌گذاری، نگاشتی مانند ϕ از مجموعه مشخص به مجموعه برچسب‌ها یعنی L است. معمولاً مجموعه $L = \{1, \ldots, s\}$ به‌عنوان برچسب‌ها در نظر گرفته می‌شود. به‌عنوان نمونه $\phi : V \longrightarrow L$ برچسب‌گذاری رأسی، $\phi : E \longrightarrow L$ برچسب‌گذاری یالی و $\phi : (V \cup E) \longrightarrow L$ برچسب‌گذاری رأس‌ها و یال‌های گراف است. معمولاً برچسب‌گذاری‌ها باید دارای خاصیت‌هایی باشند که یکی از معروفترین آن‌ها برچسب‌گذاری دل‌پذیر است که مثالی از برچسب‌گذاری رأس‌های گراف می‌باشد. یک برچسب‌گذاری دل‌پذیر برای گراف G نگاشتی مانند ϕ از مجموعه رأس‌های گراف به مجموعه برچسب‌ها $\{0, \ldots, |E|\}$ است به‌طوری که رأس‌های مختلف برچسب متمایز داشته باشند و

$$\{|\phi(u) - \phi(v)| : u, v \in V(G)\} = \{1, \ldots, |E|\}.$$

شکل زیر یک گراف همراه با برچسب‌گذاری دل‌پذیر آن را نشان می‌دهد:



نمونه دیگر، برچسب‌گذاری یالی گراف با مقدارِ ثابت برای رأس‌ها است که در ادامه به آن می‌پردازیم. یک برچسب‌گذاری یالی رأس جادویی نگاشت یک به یک و پوشای $\phi : E \longrightarrow \{1, 2, \ldots, |E|\}$ است به‌طوری که در هر رأس گراف، مجموع برچسب‌های نسبت داده شده به یال‌های مجاور آن مقدار ثابت k باشد. معمولاً مسئله مشخص کردن گراف‌هایی است که چنین برچسب‌گذاری‌هایی دارند. البته انواع مختلفی از برچسب‌گذاری‌های گراف وجود دارد که برای مطالعه آن‌ها خواننده را به مراجع [۳، ۴] ارجاع می‌دهیم. در این یادداشت هدف ما بیان برخی برچسب‌گذاری‌ها به زبان بازی‌ها است که تا به حال کمتر مورد توجه قرار گرفته است.

* سخنران

۲. بازی رأس جادویی

بازی رأس جادویی یک بازی است که براساس برچسب‌گذاری یالی گراف با مقدار ثابت برای رأس ها در [۶] معرفی شده است. این یک بازی دو نفره است که بر گراف G انجام می‌شود. مجموعه برچسب‌ها $L = \{۱, ۲, \dots, |E|\}$ است. دو بازیکن به ترتیب هر کدام حرکت می‌کنند و در هر حرکت، مقداری که قبلاً استفاده نشده باشد را به یک یال بدون برچسب نسبت می‌دهند. یک رأس را کامل گوییم هرگاه تمام یال‌های مجاور آن برچسب داشته باشند. وزن یک رأس کامل، مجموع برچسب یال‌های مجاور آن رأس است. مقدار ثابت و جادویی k وقتی تعریف می‌شود که اولین رأس کامل در گراف به‌دست آید. در واقع k وزن اولین رأس کامل در گراف است. قانون اصلی در این بازی، این است که تمام رأس‌های کامل باید وزن یکسان یعنی k داشته باشند. به خصوص اگر vw یک یال برچسب‌گذاری نشده در گراف باشد که برچسب‌گذاری آن باعث کامل شدن هر دو رأس v و w با وزن‌های متفاوت شود، بازیکن‌ها مجاز به برچسب‌گذاری این یال نیستند. هر بازیکنی که بتواند آخرین حرکت را انجام دهد، برنده این بازی خواهد بود. در اکثر مواقع، قبل از این‌که همه یال‌ها برچسب‌گذاری شوند، بازی تمام می‌شود. زیرا برای خیلی از گراف‌ها ارائه برچسب‌گذاری یال‌ها به‌طوری که وزن تمام رأس‌ها مقدار ثابت k شود، امکان‌پذیر نیست. ولی اگر چنین کاری امکان‌پذیر باشد، به برچسب‌گذاری حاصل، برچسب‌گذاری رأس جادویی گراف می‌گوییم. در این‌جا به چند تعریف که در ادامه مفید هستند، اشاره می‌کنیم. رأس درجه یک در گراف برگ نامیده می‌شود. برگ همراه با تنها یال مجاور به آن را بازو می‌نامیم. رأسی که با حداقل یک برگ مجاور باشد، ساقه گفته می‌شود. زیرگراف حاصل از حذف تمام بازوهای گراف را هسته گراف می‌گوییم. در ادامه، استراتژی برد را در این بازی برای برخی از گراف‌ها بررسی می‌کنیم. در این مقاله، همواره منظور از بازیکن اول، بازیکن شروع کننده بازی است.

لم ۱.۲. فرض کنیم G گرافی باشد که تمام رأس‌های آن برگ یا ساقه باشند و ساقه‌ای داشته باشد که دقیقاً یک برگ متصل دارد. اگر بازوی متصل به آن ساقه برچسب‌گذاری شده باشد، حتماً باید یکی از یال‌های متصل به آن ساقه در هسته گراف بدون برچسب‌گذاری باقی بماند.

اثبات. اگر همه یال‌های متصل به آن ساقه در هسته گراف برچسب گذاری شوند، وزن آن ساقه و برگش دو عدد متفاوت خواهند شد که این طبق شرایط برچسب‌گذاری رأس جادویی امکان‌پذیر نیست. □

قضیه ۲.۲. فرض کنیم G گرافی باشد که تمام رأس‌های آن برگ یا ساقه باشند.

(۱) فرض کنیم هسته گراف تعداد زوج یال دارد. در این‌صورت بازیکن اول برنده می‌شود اگر و تنها اگر ساقه‌ای وجود داشته باشد که حداقل به دو برگ متصل است.

(۲) فرض کنیم هسته گراف تعداد فرد یال دارد. در این‌صورت بازیکن اول برنده می‌شود اگر و تنها اگر ساقه‌ای وجود داشته باشد که دقیقاً به یک برگ متصل است.

اثبات. (۱) فرض کنیم ساقه‌ای وجود دارد که حداقل به دو برگ متصل است. آن را s می‌نامیم. بازیکن اول روی یکی از بازوهای متصل به s برچسب‌گذاری می‌کند. با این کار، ثابت جادویی k مشخص می‌شود و یال‌های بازوهای باقیمانده گراف غیر قابل برچسب‌گذاری می‌شوند. در نتیجه همه یال‌های داخل هسته گراف قابل برچسب‌گذاری خواهند بود. چون هسته گراف تعداد زوج یال دارد و بازیکن دوم اولین یال هسته گراف را برچسب‌گذاری می‌کند، در نتیجه بازیکن اول برنده می‌شود.

برای اثبات عکس، فرض کنیم که همه ساقه‌ها دقیقاً به یک برگ متصل باشند. نشان می‌دهیم بازیکن دوم می‌تواند برنده شود. اگر بازیکن اول یالی از داخل هسته گراف را برچسب‌گذاری کند، بازیکن دوم می‌تواند یکی از ساقه ها را برگزیند و یال بازوی متصل به آن ساقه را برچسب‌گذاری کند که در این‌صورت تمامی یال‌های بازوهای باقیمانده غیر قابل برچسب‌گذاری می‌شوند. بنابراین طبق لم ۱.۲ نمی‌توان تمامی یال‌های داخل هسته که با ساقه موردنظر برخورد دارند را برچسب‌گذاری کرد. پس در ادامه بازی، تعداد زوج حرکت انجام خواهد شد و بازیکن دوم برنده می‌شود. اما اگر بازیکن اول به جای این‌که یالی از داخل هسته گراف را برچسب‌گذاری کند، یال یکی

از بازوهای گراف را برچسب‌گذاری کند، بنابر لم ۱.۲ فقط یال‌های داخل هسته گراف به‌جز یکی از آن‌ها قابل برچسب‌گذاری‌اند. در نتیجه در ادامه بازی تعداد فرد حرکت انجام خواهد شد و بازیکن دوم برنده می‌شود.

(۲) ساقه‌ای که دقیقاً به یک برگ متصل است را s می‌نامیم. بازیکن اول اگر یال بازوی متصل به s را برچسب‌گذاری کند، بازوهای باقیمانده گراف غیر قابل برچسب‌گذاری خواهند شد. در نتیجه بنابر لم ۱.۲ ، در ادامه بازی تعداد زوج حرکت روی هسته گراف انجام خواهد شد و بازیکن اول برنده می‌شود. توجه به این نکته مهم است که اگر بازیکن اول، یالی از هسته گراف را برچسب‌گذاری می‌کرد، بازیکن دوم می‌توانست یکی از بازوهای ساقه‌ای که حداقل به دو برگ متصل است را برچسب‌گذاری کند. در نتیجه در ادامه بازی تعداد زوج حرکت روی هسته گراف انجام خواهد شد و بازیکن دوم برنده می‌شود.

برای اثبات عکس، فرض کنیم که همه ساقه‌ها حداقل به دو برگ متصل باشند. اگر بازیکن اول، یال یکی از بازوهای گراف را برچسب‌گذاری کند، همه یال‌های هسته گراف برچسب‌گذاری خواهند شد و چون تعداد فرد حرکت در ادامه انجام خواهد شد بازیکن دوم برنده می‌شود. حتی اگر فقط یک ساقه با حداقل دو برگ متصل موجود باشد، اگر بازیکن اول یکی از بازوهای آن ساقه را برچسب‌گذاری کند، اتفاق بالا مجددا تکرار می‌شود. اما اگر بازیکن اول به جای این‌که یکی از یال‌های بازوهای گراف را برچسب‌گذاری کند، یالی از داخل هسته گراف را برچسب‌گذاری کند، آن‌گاه بازیکن دوم می‌تواند یال یکی از بازوهای گراف را برچسب‌گذاری کند و چون در ادامه بازی تعداد زوج حرکت روی هسته گراف انجام خواهد شد بازیکن دوم برنده می‌شود. □

۱.۲. **استراتژی‌های برد حین بازی.** در این بخش، استراتژی‌های برد را برای گراف G که تمام رأس‌های آن برگ یا ساقه باشند، به‌طور کامل مورد بررسی قرار می‌دهیم. این استراتژی‌های برد را برای گرافی که تعداد یال‌های هسته آن فرد است ارائه می‌کنیم. برای گرافی که تعداد یال‌های هسته آن زوج است، نتایج دقیقاً برعکس خواهد شد. استراتژی‌های برد را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

۱.۱.۲. حالتی که ساقه‌ای مانند s با دقیقاً یک برگ متصل موجود باشد.

(۱) اگر در همان ابتدا، بازیکن اول یال بازوی متصل به s را برچسب‌گذاری کند بازیکن اول برنده می‌شود.

(۲) اگر در همان ابتدا، بازیکن اول ساقه‌ای که حداقل دو یال دارد را انتخاب کند و یکی از یال‌های بازوهای متصل به آن ساقه را برچسب‌گذاری کند، بازیکن دوم برنده می‌شود.

(۳) در غیر این‌صورت:

(آ) اگر بازی به‌گونه‌ای پیش برود که در مرحله‌ای از بازی، یکی از بازیکنان یال بازوی متصل به s را برچسب‌گذاری کند.

(i) اگر بازیکن اول این برچسب‌گذاری را انجام دهد،

با توجه به حرکت اول بازیکن اول و این‌که تعداد فرد حرکت در هسته گراف باید انجام شود تا بازیکن اول بتواند برچسب‌گذاری مذکور را انجام دهد، بنابر لم ۱.۲ تعداد حرکات باقی مانده در هسته گراف، زوج خواهد بود و بازیکن اول برنده می‌شود.

(ii) اگر بازیکن دوم این برچسب‌گذاری را انجام دهد،

با توجه به حرکت اول بازیکن اول و این‌که تعداد زوج حرکت در هسته گراف باید انجام شود تا بازیکن دوم بتواند برچسب‌گذاری مذکور را انجام دهد، بنابر لم ۱.۲ تعداد حرکات باقی‌مانده در هسته گراف، فرد خواهد بود و بازیکن اول برنده می‌شود.

(ب) اگر بازی به‌گونه‌ای پیش برود که در مرحله‌ای از بازی، یکی از بازیکنان یکی از بازوهای ساقه‌ای که حداقل به دو برگ متصل است را برچسب‌گذاری کند.

(i) اگر بازیکن اول این برچسب‌گذاری را انجام دهد،

با توجه به حرکت اول بازیکن اول و این‌که تعداد فرد حرکت در هسته گراف باید انجام شود تا بازیکن اول بتواند برچسب‌گذاری مذکور را انجام دهد، تعداد حرکات باقی مانده در هسته گراف، فرد خواهد بود و بازیکن دوم برنده می‌شود.

(ii) اگر بازیکن دوم این برچسب‌گذاری را انجام دهد،

با توجه به حرکت اول بازیکن اول و این‌که تعداد زوج حرکت در هسته گراف باید انجام شود تا بازیکن دوم بتواند برچسب‌گذاری مذکور را انجام دهد، تعداد حرکات باقی‌مانده در هسته گراف، زوج خواهد بود و بازیکن دوم برنده می‌شود.

۲.۱.۲. حالتی که همه ساقه‌ها حداقل دو برگ متصل دارند.

(۱) اگر در همان ابتدا، بازیکن اول یکی از یال‌های بازوهای گراف را برچسب‌گذاری کند، بازیکن دوم برنده می‌شود.

(۲) اگر بازی به‌گونه‌ای پیش برود که در مرحله‌ای از بازی، یکی از بازیکنان یکی از یال‌های بازوهای گراف را برچسب‌گذاری کند.

(آ) اگر بازیکن اول این برچسب‌گذاری را انجام دهد،

با توجه به حرکت اول بازیکن اول و این‌که تعداد فرد حرکت در هسته گراف باید انجام شود تا بازیکن اول بتواند برچسب‌گذاری مذکور را انجام دهد، تعداد حرکات باقی‌مانده در هسته گراف، فرد خواهد بود و بازیکن دوم برنده می‌شود.

(ب) اگر بازیکن دوم این برچسب‌گذاری را انجام دهد،

با توجه به حرکت اول بازیکن اول و این‌که تعداد زوج حرکت در هسته گراف باید انجام شود تا بازیکن دوم بتواند برچسب‌گذاری مذکور را انجام دهد، تعداد حرکات باقی‌مانده در هسته گراف، زوج خواهد بود و بازیکن دوم برنده می‌شود.

سوال ۳.۲. استراتژی برد را برای دسته‌های دیگری از گراف‌ها در بازی فوق به‌دست آورید.

نسخه تام این بازی در [۱] بیان شده است که در آن هم رأس و هم یال را برچسب‌گذاری می‌کنیم و $L = \{۱, ۲, \ldots, |V| + |E|\}$. در هر مرحله، بازیکن می‌تواند یک رأس یا یال بدون برچسب را با عددی که قبلاً استفاده نشده برچسب‌گذاری کند. وزن یک رأس، مجموع برچسب آن رأس و برچسب یال‌های مجاور با آن است. قانون همان است؛ نباید رأس‌هایی ایجاد کرد که وزن آن‌ها با مقدار جادویی k متفاوت باشد.

سوال ۴.۲. استراتژی برد را برای انواع گراف‌ها در بازی فوق بیان کنید.

تا این‌جا بازیکنی که آخرین حرکت را انجام می‌داد به‌عنوان برنده معرفی می‌کردیم ولی همان‌گونه که در مرجع [۵] بیان شده می‌توان تغییر کوچکی اعمال کرد و آخرین حرکت منطقی را به‌عنوان بازنده معرفی کنیم.

سوال ۵.۲. بازی‌های فوق را در صورتی که آخرین حرکت، بازنده در نظر گرفته شود تحلیل کنید.

سوال ۶.۲. تعیین برنده بازی‌های فوق برای گراف G از چه پیچیدگی برخوردار است؟ در این‌جا گراف G عضو کلاس معینی در نظر گرفته می‌شود.

۳. چند بازی دیگر

۱.۳. **بازی** $L(d, ۱)$. این بازی در سال ۲۰۱۲ در [۲] معرفی شده است. فرض کنیم $L = \{۰, ۱, \ldots, s\}$ مجموعه برچسب باشد که s مقدار ثابتی است. دو بازیکن به ترتیب مقدار $\phi(v) \in L$ را به رأس $v \in V$ که قبلاً برچسب‌گذاری نشده است، نسبت می‌دهند. برچسب رأس‌ها می‌تواند تکراری باشد ولی باید دو قانون زیر رعایت شوند:

- اگر $vw \in E$ آن‌گاه $|\phi(v) - \phi(w)| \geq d$.
- اگر فاصله دو رأس v و w برابر با ۲ باشد، آن‌گاه $\phi(v) \neq \phi(w)$.

در این بازی، هدف بازیکن اول این است که کل گراف G برچسب‌گذاری شود در صورتی‌که بازیکن دوم باید جلوی این‌کار را بگیرد. مسئله پیدا کردن کوچکترین مقدار برای s است به‌طوری که بازیکن اول استراتژی برد داشته باشد. در [۲]، فرمول دقیق برای حالتی که G گراف کامل K_n یا کامل دو بخشی $K_{n,m}$ باشد ارائه شده است.

۲.۳. **بازی دل‌پذیر.** این بازی در سال ۲۰۱۷ در [۷] بر اساس برچسب‌گذاری دل‌پذیر معرفی شده است. در این بازی، دو بازیکن به ترتیب مقدار $\phi(v) \in L = \{۱, \dots, s\}$ را به رأس بدون برچسب v در گراف مفروض $G = (V, E)$ نسبت می‌دهند. وزن یال vw برابر $|\phi(v) - \phi(w)|$ است و یک حرکت قابل قبول است هرگاه وزن یالی که در این حرکت معین می‌شود متمایز از وزن یال‌های دیگر باشد. در این‌جا بازیکن اول می‌خواهد کل گراف برچسب‌گذاری شود در صورتی‌که بازیکن دوم باید مانع این کار شود.

۳.۳. **بازی دل‌پذیر مجموع.** در بازی دل‌پذیر، دو بازیکن به ترتیب در هر حرکت رأس بدون برچسب $v \in V$ را با مقادیر قبلاً استفاده نشدی $\phi(v) \in L = \{۱, \dots, s\}$ برچسب‌گذاری می‌کنند. بازی دل‌پذیر مجموع نیز مشابه است با این تفاوت که بعد از این‌که هر دو رأس انتهایی یال vw برچسب‌گذاری شد، وزن آن یال مقدار $\phi(v) + \phi(w)$ تعریف می‌شود. قانون همان است؛ حرکتی مجاز است که باعث ایجاد وزن تکراری برای یال‌ها نشود. بازیکن اول می‌خواهد کل گراف برچسب‌گذاری شود در صورتی‌که بازیکن دوم مانع این کار می‌شود. این مسئله برای دورها مطالعه شده است [۷].

سوال ۱.۳. برای گراف G عضو کلاس‌های دیگری از گراف‌ها مقادیری از s یا کمترین مقدار s را تعیین کنید که بازیکن اول در بازی‌های فوق استراتژی برد داشته باشد.

می‌توان نسخه دیگری از این بازی را این‌گونه در نظر گرفت که s را از همان ابتدای بازی، ثابت در نظر بگیریم و بازیکنی که آخرین حرکت مجاز را انجام می‌دهد به‌عنوان برنده (یا بازنده) معرفی کنیم. در هر یک از این دو حالت تحلیل استراتژی برد برای بازیکن‌ها می‌تواند یک مسئله جذاب تحقیقاتی باشد. در بازی دل‌پذیر، در حالت $s = |E| + ۱$ مسئله برای گراف‌های کامل و ستاره‌ها در [۷] مطالعه شده است.

سوال ۲.۳. تعیین کنید محاسبه s در بازی‌های فوق از چه پیچیدگی محاسباتی برخوردار است؟

مراجع

1. E. Boudreau, B. Hartnell, K. Schmeisser and J. Whiteley, *A game based on vertex-magic total labelings*, Australas. J. Comb. **29** (2004) 67–73.
2. M. -L. Chia, H. -N. Hsu, D. Kuo, Sh. -Ch. Liaw and Z. Xu, *The game $L(d, 1)$-labeling problem of graphs*, Discrete Math. **312** (2012) 3037–3045.
3. J. Gallian, *A dynamic survey of graph labeling*, Elect. J. Combin. **6** (2000) DS6.
4. W. D. Wallis, *Magic Graphs*, Birkhaüser, Boston, 2001.
5. F. Harary and Zs. Tuza, *Two graph-colouring games*, Bull. Austral. Math. Soc. **48** (1993) 141–149.
6. B. Hartnell and D. Rall, *A vertex-magic edge labeling game*, Congr. Numer. **161** (2003) 163–167.
7. Z. Tuza, *Graph labeling games*, 9th International Workshop on Graph Labelings (IWOGL 2016), 61–68, Electron. Notes Discrete Math., 60, Elsevier Sci. B. V., Amsterdam, 2017.

پست الکترونیکی: khamseh@khu.ac.ir
پست الکترونیکی: mahyar_ghasedian2@yahoo.com

ضرائب چندجمله‌ای‌های لاپلاسی و جورسازی یک گراف

علی قلاوند[†] *
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. دراین مقاله گزارشی از آخرین کارهای نویسنده در ارتباط با ضرائب چندجمله‌ای‌های لاپلاسی و جورسازی یک گراف و ارتباط آن‌ها با یکدیگر داده خواهد شد.
واژه‌های کلیدی: ماتریس لاپلاسی، چندجمله‌ای لاپلاسی، جورسازی، چندجمله‌ای جورسازی، گراف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C50, 05C31, 05C70.

۱. مقدمه

فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ گرافی ساده و متناهی با مجموعه رأس $V(G)$ و مجموعه یال $E(G)$ باشد. دو رأس از G را مجاور گوییم هرگاه بین آن‌ها یال باشد. دو یال که در یک رأس مشترک باشند را نیز مجاور نامیم. نماد $\sim$ بین دو رأس یا دو یال نشان دهنده مجاور بودن آن‌ها در گراف است. درجه رأس $v \in V(G)$، $d_G(v)$، برابر تعداد یال‌های مجاور به آن است و درجه یال $e = uv \in E(G)$، $d_G(e)$، برابر درجه رأس نظیر آن در گراف یالی G است، یعنی $d_G(e) = d_G(u) + d_G(v) - ۲$. فاصله دو رأس $u, v \in V(G)$، $d_G(u, v)$، برابر طول کوتاه‌ترین مسیر موجود بین آن‌هاست، اگر بین آن‌ها هیچ مسیری نباشد این مقدار را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم. کمر گراف G، $g(G)$، برابر طول کوتاه‌ترین دور در G است، اگر G بی‌دور باشد کمر آن را بی‌نهایت در نظر می‌گیریم. فرض کنید $V' \subseteq V(G)$. در این‌صورت $G - V'$ را زیرگراف القایی G، تولید شده توسط $V(G) \setminus V'$ در نظر می‌گیریم. یک جورسازی از گراف G، یک زیرمجموعه از یال‌هایش است به‌طوری که هیچ دو عضو متمایز آن در G مجاور نباشند. نماد $m_k(G)$ نشان دهنده تعداد جورسازی‌های متفاوت با اندازه k است. $m_۰(G)$ را ۱ در نظر می‌گیریم و از تعریف داریم $m_۱(G) = |E(G)|$. چندجمله‌ای جورسازی گراف n رأسی G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\alpha(G, x) = \sum_{k=۰}^{\lfloor \frac{n}{۲} \rfloor} (-۱)^k m_k(G) x^{n-۲k}.$$

فرض کنید $L(G)$ ماتریس لاپلاسی گراف G است. در این‌صورت چندجمله‌ای لاپلاسی G، $L(G, x)$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L(G, x) = \det(I_n x - L(G)) = \sum_{k=۰}^{n} (-۱)^{n-k} c_k(G) x^k,$$

جایی‌که $۰ \leq k \leq n$، $c_k(G)$، قدرمطلق ضریب x^k در $\det(I_n x - L(G))$ است.

یک شاخص توپولوژیک، تابعی حقیقی مقدار روی گراف‌هاست که تحت یکریختی آن‌ها پایا بوده و با کمیتی شیمیایی همبستگی نشان دهد. ریشه اصلی تعریف شاخص‌های توپولوژیک، کاربردهای آن‌ها در شیمی، بیوشیمی و حتی علوم کامپیوتر است. ما از شاخص‌های توپولوژیک برای به‌دست آوردن ضرائب چندجمله‌ای‌های لاپلاسی و جورسازی گراف‌ها استفاده می‌کنیم. فرض کنید G یک گراف، λ و μ دو عدد حقیقی مخالف با صفر و $\sum_{u \sim v \sim w}$

[†] این مقاله گزارشی از رساله دکتری اینجانب است که تحت راهنمایی آقای دکتر سید علی‌رضا اشرفی و در دانشگاه کاشان در حال انجام می‌باشد.
* سخنران

و $\sum_{u\sim v\sim w\sim x}$ به‌ترتیب حاصل‌جمع روی همه مسیرهای به طول دو و سه در G باشند. در این‌صورت شاخص‌های توپولوژیک مورد استفاده در این نوشتار به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$W=\sum_{\{u,v\}\subset V(G)} d_G(u,v),\ WW=\frac{1}{2}W+\frac{1}{2}\sum_{\{u,v\}\subset V(G)} d_G(u,v)^2,\ M_1=\sum_{v\in V(G)} deg_G(v)^2,$$

$$M_2=\sum_{uv\in E(G)} d_G(u)d_G(v),\ M_1^\lambda=\sum_{u\in V(G)} d_G(u)^\lambda,\ F=\sum_{v\in V(G)} d_G(v)^3,\ EM_1=\sum_{e\in E(G)} d_G(e)^2,$$

$$EM_2=\sum_{e,f\in E(G),e\sim f} d_G(e)d_G(f),\ M_2^\lambda=\sum_{uv\in E(G)}\Big(d_G(u)d_G(v)\Big)^\lambda,$$

$$\Theta_1=\sum_{u\sim v\sim w}\Big[d_G(u)d_G(v)d_G(w)\Big],$$

$$\alpha_{\lambda,\mu}=\sum_{uv\in E(G)}\Big[d_G(u)^\lambda d_G(v)^\mu+d_G(u)^\mu d_G(v)^\lambda\Big],\ \Theta_2^+=\sum_{u\sim v\sim w}\Big[d_G(u)+d_G(w)\Big],$$

$$\Theta_2=\sum_{u\sim v\sim w}\Big[d_G(u)d_G(w)\Big],\ \Theta_3=\sum_{u\sim v\sim w\sim x}\Big[d_G(u)d_G(x)\Big],\Theta_3^+=\sum_{u\sim v\sim w\sim x}\Big[d_G(u)+d_G(x)\Big],$$

$$\Theta_3^{+,2}=\sum_{u\sim v\sim w\sim x}\Big[d_G(u)^2+d_G(x)^2\Big],\ \Theta_4=\sum_{u\sim v\sim w}\Big[d_G(u)^2d_G(w)+d_G(u)d_G(w)^2\Big],$$

$$\Theta_5=\sum_{u\sim v\sim w} d_G(v)^2\Big[d_G(u)+d_G(w)\Big],\ \Theta_6=\sum_{u\sim v\sim w\sim x}\Big[d_G(u)d_G(v)+d_G(w)d_G(x)\Big].$$

فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال است. همچنین فرض کنید $S(G)$ و $\tau(G)$ به‌ترتیب گراف زیرتقسیم و تعداد درخت‌های فراگیر G باشند. نویسندگان در [۳، ۴، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱] نشان دادند $c_{n-k}=m_k(S(G))$، $c_0=0,\ c_1=n\cdot\tau(G),\ c_n=1, c_{n-1}=2m$ و برای حالتی که G بی دور باشد $0\le k\le n$. آن‌ها همچنین در حالتی که G درخت باشد ثابت کردند $c_{n-2}=2n^2-5n+3-\frac{1}{2}M_1$، $c_{n-3}=\frac{1}{3}[4n^3-18n^2+24n-10+F-3(n-2)M_1]$، $c_2=W$ و $c_3=WW$.

۲. نتایج اصلی

این بخش شامل تحقیقات ما روی ضرائب لاپلاسی و جورسازی گراف است [۱، ۲، ۵، ۶، ۷]. فرض کنید G گرافی با n رأس و m یال باشد. در این صورت گزاره‌های زیر درست هستند:

۱.
$$m_k(G)=\frac{1}{k}\sum_{uv\in E(G)} m_{k-1}(G-\{u,v\}).$$

۲.
$$m_2(G)=\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}M_1.$$

۳. اگر $g(G)>3$، آن‌گاه
$$m_3(G)=\frac{1}{6}m^3+\frac{1}{2}m^2+\frac{2}{3}m-\frac{1}{2}mM_1-M_1+\frac{1}{3}F+M_2.$$

۴. اگر $g(G)>4$، آن‌گاه
$$m_4(G)=\frac{1}{24}m^4+\frac{1}{4}m^3+\frac{19}{24}m^2-\frac{11}{4}m+\frac{1}{8}(M_1)^2+\frac{1}{3}mF-\frac{1}{4}m^2M_1+mM_2+\frac{1}{4}M_1^4-2M_2-\frac{5}{4}mM_1+\frac{7}{2}M_1-EM_2-\frac{3}{2}F.$$

۵. اگر $g(G)>5$، آن‌گاه
$$m_5(G)=\frac{1}{120}m^5+\frac{1}{12}m^4+\frac{1}{120}(-10M_1+55)m^3+\frac{1}{120}(-90M_1+60M_2+20F+190)m^2+\frac{1}{120}(15(M_1)^2+140F-376M_1-30M_1^4+492M_2-120\alpha_{1,2}-120\Theta_2+240\Theta_2^+ +336)m+\frac{1}{2}(M_1)^2+\frac{1}{120}(-60M_2-20F-768)M_1-M_1^4+\frac{1}{5}M_1^5+M_2^2-\frac{21}{5}\alpha_{1,2}+\frac{4}{5}\alpha_{1,3}+\frac{1}{5}\Theta_2^+-\frac{2}{5}\Theta_3^+ +\frac{4}{5}\Theta_4+\frac{1}{5}\Theta_3^{+,2}+\frac{14}{5}F+12M_2+\frac{6}{5}\Theta_1-\frac{26}{5}\Theta_2+\Theta_3+\frac{1}{5}\Theta_5+\frac{2}{5}\Theta_6.$$

۶. اگر G درخت باشد آن‌گاه

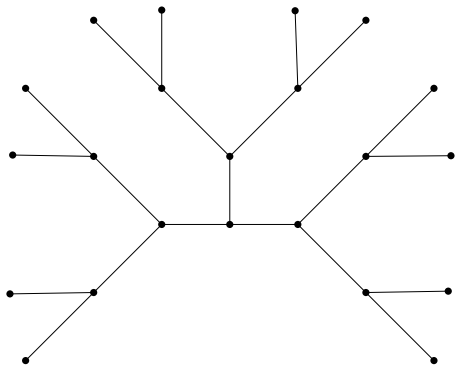
$$c_{n-۴} = (n-۱)(\tfrac{۱۶}{۲۴}n^۳ - ۴n^۲ + \tfrac{۳۴۸}{۲۴}n - \tfrac{۵۳۲}{۶}) + \tfrac{۱۷}{۸}(M_۱)^۲ + (\tfrac{۴}{۶}n - \tfrac{۴۱۲}{۲۴})F + \tfrac{۳۹}{۲}EM_۱ - \tfrac{۱۰۸}{۴۸}M_۱^۴ - ۴۰M_۲ - (n^۲ + \tfrac{۷}{۲}n - \tfrac{۱۹۲۰}{۲۴})M_۱ - ۱۶\sum_{\{u,v\}\subset V(G)}\binom{d_G(u)}{۲}\binom{d_G(v)}{۲}$$
$$= \tfrac{۱}{۶}(n-۱)(۴n^۳ - ۲۴n^۲ + ۳۹n - ۱۶) + \tfrac{۱}{۳}F(۲n-۵) + \tfrac{۱}{۸}M_۱(-۸n^۲ + M_۱ + ۳۶n - ۳۲) - \tfrac{۱}{۴}M_۱^۴ - M_۲,$$

$$c_{n-۵} = \tfrac{۱}{۱۵}\Big[n-۱\Big]^۲\Big[۴n^۳ - ۳۲n^۲ + ۶۷n - ۲۴\Big] + \tfrac{۱}{۱۲}n\Big[۸nF - ۸n^۲M_۱ + ۳(M_۱)^۲ + ۶۰nM_۱ - ۴۴F - ۱۲۰M_۱ - ۶M_۱^۴ - ۲۴M_۲\Big] - \tfrac{۱}{۱۲}M_۱\Big[۲F + ۹M_۱ - ۵۶\Big] + \alpha_{۱,۲} + \tfrac{۱}{۵}M_۱^۵ + \tfrac{۳}{۲}M_۱^۴ + ۴M_۲ + ۴F,$$

$$c_{n-۶} = -\Big(\tfrac{۱}{۶}M_۱^۴ + \tfrac{۸}{۳}n - \tfrac{۸}{۳}\Big)(n-۱)^۲ + \tfrac{۴}{۴۵}n^۶ - \tfrac{۶}{۵}n^۵ - \tfrac{۱}{۳}(M_۱ - ۱۷)n^۴ + \tfrac{۱}{۱۸}\Big(۶۶M_۱ + ۸F - ۱۶۱\Big)n^۳ - \tfrac{۱}{۱۲}\Big(۴۸F - ۳(M_۱)^۲ + ۱۴۷M_۱ + ۴M_۱^۴ + ۲۴M_۲ - ۳۶\Big)n^۲ - \tfrac{۱}{۱۲۰}\Big(۴۰FM_۱ + ۱۹۵(M_۱)^۲ - ۱۱۶۰F - ۱۵۷۰M_۱ - ۳۵۰M_۱^۴ - ۴۸M_۱^۵ - ۱۰۸۰M_۲ - ۲۴۰\alpha_{۱,۲} - ۳۵۶\Big)n - \tfrac{۱}{۴۸}(M_۱)^۳ + \tfrac{۱۷}{۸}(M_۱)^۲ + \tfrac{۱}{۲۴}\Big(۲۸F + ۱۲M_۲ + ۳M_۱^۴ - ۷۶\Big)M_۱ + \tfrac{۱}{۱۸}(F)^۲ - \tfrac{۴۹}{۹}F - ۵\alpha_{۱,۲} - \alpha_{۱,۳} - ۶M_۲ - \tfrac{۴۹}{۱۲}M_۱^۴ - \tfrac{۷}{۵}M_۱^۵ - \tfrac{۱}{۶}M_۱^۶ - M_۲^۲ - \Theta_۲ - \tfrac{۷۱}{۴۵}.$$

۳. کاربردها

فرض کنید $T(k,t)$ یک درخت ریشه‌دار با دنباله درجه $k, k, \ldots, k, ۱, ۱, \ldots, ۱$ باشد به‌طوری که فاصله هر رأس آویخته از رأس مرکزی برابر t باشد (شکل ۱ را ببینید).



شکل ۱. درخت ریشه‌دار $T(۳,۳)$.

در این‌صورت باتوجه به گفته‌های قبل نتایج زیر را داریم:

$$
\begin{aligned}
c_{n-۱}(T(۳,t)) =& ۶\times ۲^t - ۶,\\
c_{n-۲}(T(۳,t)) =& -\frac{۹۳}{۲}۲^t + ۱۸\times ۲^{۲t} + ۳۰,\\
c_{n-۳}(T(۳,t)) =& ۲۷۲\times ۲^t - ۱۷۱\times ۲^{۲t} + ۳۶\times ۲^{۳t} - ۱۴۴,\\
c_{n-۴}(T(۳,t)) =& -\frac{۵۷۹۹}{۴}۲^t + \frac{۹۱۷۷}{۸}۲^{۲t} - ۴۰۵\times ۲^{۳t} + ۵۴\times ۲^{۴t} + ۶۸۷,\\
c_{n-۵}(T(۳,t)) =& \frac{۷۴۴۲۷}{۱۰}۲^t - \frac{۲۶۹۶۷}{۴}۲^{۲t} + \frac{۱۲۲۶۷}{۴}۲^{۳t} - ۷۰۲\times ۲^{۴t} + \frac{۳۲۴}{۵}۲^{۵t} - ۳۲۹۴,\\
c_{n-۶}(T(۳,t)) =& -\frac{۳۷۶۲۴۷}{۱۰}۲^t + \frac{۱۴۸۸۲۹۳}{۴۰}۲^{۲t} - \frac{۳۱۵۷۱۱}{۱۶}۲^{۳t} + \frac{۲۳۶۹۷}{۴}۲^{۴t} - \frac{۴۷۷۹}{۵}۲^{۵t}\\
&+\frac{۳۲۴}{۵}۲^{۶t} + ۱۵۹۳۲,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{n-۱}(T(۴,t)) =& ۴\times ۳^t - ۴,\\
c_{n-۲}(T(۴,t)) =& -۲۴\times ۳^t + ۸\times ۳^{۲t} + ۱۸,\\
c_{n-۳}(T(۴,t)) =& \frac{۳۹۲}{۳}۳^t - ۶۴\times ۳^{۲t} + \frac{۳۲}{۳}۳^{۳t} - ۸۸,\\
c_{n-۴}(T(۴,t)) =& -\frac{۲۱۳۲}{۳}۳^t + \frac{۱۲۳۲}{۳}۳^{۲t} - \frac{۳۲۰}{۳}۳^{۳t} + \frac{۳۲}{۳}۳^{۴t} + ۴۵۷,\\
c_{n-۵}(T(۴,t)) =& \frac{۱۹۶۴۴}{۵}۳^t - ۲۴۸۰\times ۳^{۲t} + \frac{۲۳۶۸}{۳}۳^{۳t} - ۱۲۸\times ۳^{۴t} + \frac{۱۲۸}{۱۵}۳^{۵t} - ۲۴۸۴,\\
c_{n-۶}(T(۴,t)) =& -\frac{۱۱۰۷۵۶}{۵}۳^t + \frac{۶۶۱۸۶۴}{۴۵}۳^{۲t} - \frac{۱۵۷۷۶}{۳}۳^{۳t} + \frac{۹۶۶۴}{۹}۳^{۴t} - \frac{۱۷۹۲}{۱۵}۳^{۵t}\\
&+\frac{۲۵۶}{۴۵}۳^{۶t} + ۱۳۹۹۰.
\end{aligned}
$$

جدول ۱. ضرائب لاپلاسی $c_{n-x}\big(T(۳,t)\big)$، برای $x,t\in\{۲,۳,۴,۵,۶\}$.

x \ t	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۱۳۲	۸۱۰	۳۸۹۴	۱۶۹۷۴	۷۰۷۸۲
۳	۵۱۲	۹۵۲۰	۱۰۷۸۸۸	۱۰۱۳۱۰۴	۸۷۵۴۰۳۲
۴	۱۱۴۶	۷۶۳۲۹	۲۱۵۱۲۱۹	۴۴۴۸۱۰۱۵	۸۰۴۴۰۷۸۷۱
۵	۱۵۲۴	۴۴۲۹۲۶	۳۲۸۹۲۷۶۲	۱۵۳۲۰۴۹۴۲۶	۵۸۵۷۷۶۵۳۵۰۶
۶	۱۱۹۶	۱۹۲۶۴۵۶	۴۰۱۳۰۳۳۰۰	۴۳۱۰۹۵۰۶۵۷۲	۳۵۲۱۱۰۹۴۷۹۱۳۲

جدول ۲. ضرائب لاپلاسی $c_{n-x}\big(T(۴,t)\big)$، برای $x,t\in\{۲,۳,۴,۵,۶\}$.

x \ t	۲	۳	۴	۵	۶
۲	۴۵۰	۵۲۰۲	۵۰۵۶۲	۴۶۶۵۷۸	۴۲۳۴۰۵۰
۳	۳۶۸۰	۱۶۶۷۳۶	۵۲۵۹۲۹۶	۱۴۹۳۰۷۵۳۶	۴۰۹۸۵۶۸۱۶۰
۴	۱۹۵۴۹	۳۸۴۹۸۲۹	۴۰۵۱۱۵۲۶۱	۳۵۶۸۵۸۹۴۰۸۵	۲۹۷۱۴۷۴۵۹۷۷۸۹
۵	۷۱۴۹۶	۶۸۲۵۱۶۸۰	۲۴۶۴۷۴۴۱۸۳۲	۶۷۹۵۰۶۸۳۱۱۸۷۲	۱۷۲۱۰۹۱۱۶۸۶۶۵۳۵۲
۶	۱۸۶۳۹۴	۹۶۷۰۵۷۳۳۰	۱۲۳۳۶۷۸۴۰۳۰۶۶	۱۰۷۳۷۳۸۴۶۶۴۳۵۱۵۴	۸۲۹۵۷۵۸۱۲۸۲۰۵۵۱۳۸۶

مراجع

1. A. R. Ashrafi, M. Eliasi and A. Ghalavand, *Laplacian coefficients and Zagreb indices of trees*, Linear Multilin. Algebra **67** (9) (2019) 1736–1749.
2. K. C. Das, A. Ghalavand, A. R. Ashrafi, *On the number of $k-$matchings in graphs*, submitted.
3. E. J. Farrell, *An introduction to matching polynomials*, J. Comb. Theory Ser. B **27** (1) (1979) 75–86.
4. I. Gutman, *Hyper-Wiener index and Laplacian spectrum*, J. Serb. Chem. Soc. **68** (12) (2003) 949–952.
5. A. Ghalavand and A. R. Ashrafi, *Laplacian coefficients of trees*, Rad HAZU, Matematicke znanosti, accepted.
6. A. Ghalavand and A. R. Ashrafi, *Laplacian coefficients of a forest in terms of the number of closed walks in the forest and its line graph* , submitted.
7. A. Ghalavand and A. R. Ashrafi, *On the Laplacian coefficients of trees*, submitted.
8. R. Merris, *A survey of graph Laplacians*, Linear Multilin. Algebra **39** (1995) 19–31.
9. B. Mohar, *The Laplacian spectrum of graphs*, In: Y. Alavi, G. Chartrand, O. R. Ollermann and A. J. Schwenk (Eds), Graph Theory, Combinatorics, and Applications (Wiley: New York) (1991) 871–898.
10. C. S. Oliveira, N. M. M. de Abreu and S. Jurkewicz, *The characteristic polynomial of the Laplacian of graphs in $(a, b)-$linear classes*, Linear Algebra Appl. **356** (2002) 113–121.
11. B. Zhou and I. Gutman, *A connection between ordinary and Laplacian spectra of bipartite graphs*, Linear Multilin. Algebra **56** (3) (2008) 305–310.

پست الکترونیکی: alighalavand@grad.kashanu.ac.ir

سخنرانی‌ها

معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی

نگاهی به عمل برنولی

سعید شعبانیان*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. نام سیستم دینامیکی و ارگودیک همواره با مثالی معروف پیوند خورده است. عمل برنولی را می‌توان از کلیدی‌ترین مثال‌های این مباحث دانست که علاوه بر نقش آفرینی حیاتی در علم سیستم دینامیکی، مطالعه آن نیز درک بالایی از موضوع‌های ذکر شده را به همراه دارد. ارگودیک بودن عمل برنولی نتایج و گشایش‌های وسیعی را به بار می‌نشاند. غایت نوشته پیشرو نیز اثبات ارگودیک بودن عمل برنولی است.
واژه‌های کلیدی: عمل برنولی، ارگودیک، نگاشت برنولی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 22D40, 35Q51.

۱. پیش گفتار

یکی از مهم‌ترین مثال‌ها در مبحث سیستم دینامیکی و ارگودیک، عمل برنولی است که شهود و درک بالایی از این مطالب را برای ما به همراه دارد. در این مقاله سعی بر بررسی و شناخت رفتار آن داریم و از این رو به نتایج مفیدی خواهیم رسید. در تمامی این تحقیق فضای (X,μ)را فضای احتمال استاندارد در نظر می‌گیریم. همچنین گروه Γ را، گروهی شمارا و نامتناهی فرض می‌کنیم. عمل گروه Γ روی X را با نماد $\Gamma\curvearrowright X$ نمایش می‌دهیم. برای هر عضو X مانند x، مجموعه $\Gamma x=\{\gamma x:\gamma\in\Gamma\}$ را Γ-مدار نقطه x گوییم. در میان عمل‌ها، نوعی از آن‌ها اهمیت ویژه‌تری دارد. عمل Γ روی (X,μ)را حافظ اندازه احتمال نامند هرگاه : $\forall s\in\Gamma,\ A\subseteq\beta_X$ $\mu(sA)=\mu(A)$. علاوه بر این‌که چه عملی اندازه را حفظ می‌کند، مطلب دیگری نیز جذاب است. این‌که چه مجموعه‌ای تحت عمل، ثابت و پایا می‌ماند. ما آن‌ها را در اصطلاح Γ پایا خوانیم. مجموعه $A\subseteq X$ را برای عمل $\Gamma\curvearrowright X$، Γپایا گوییم هرگاه $\Gamma A=A$. همین مجموعه‌های Γپایا نوعی خاص از عمل‌ها را برای ما مشخص می‌کنند. در واقع ناپایداری مجموعه‌های اندازه‌پذیر غیربدیهی اساس تعریف عملی به نام **ارگودیک** است: عمل $\Gamma\curvearrowright X$ را ارگودیک گوییم هرگاه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر Γپایا مانند $A\subseteq X$ داشته باشیم $\mu(A)\in\{0,1\}$. اگر با مفهوم استقلال در فضای احتمال X آشنا باشید، عدم تاثیرپذیری دو مجموعه A و B در این فضا را با شرط $\mu(A\cap B)=\mu(A)\mu(B)$ قلمداد می‌کنند. این مفهوم ما را در معرفی عملی مهم راهنمایی می‌کند. عمل $\Gamma\curvearrowright X$ را امتزاج گویند هرگاه برای هر دو مجموعه اندازه‌پذیر مانند $A,B\subseteq X$ داشته باشیم

$$\lim_{\gamma\to\infty}|\mu(A\cap\gamma B)\backslash\mu(A)\mu(B)|=0.$$

عمل امتزاج بسیار قوی است و چون برای یافتن این ساختار با مشکل مواجه می‌شویم الزاماً بعد ضعیف‌تری از آن را نیز تعریف می‌کنیم. عمل $\Gamma\curvearrowright X$ را امتزاج ضعیف گویند هرگاه به ازاء هر زیرمجموعه متناهی سره F از β داشته باشیم

$$\lim_{\gamma\to\infty}\sum_{A,B\in F}|\mu(A\cap\gamma B)\backslash\mu(A)\mu(B)|=0.$$

مشخصاً هر عملی که امتزاج باشد، قطعاً امتزاج ضعیف است و بنابر تعریف عمل ارگودیک با جایگذاری A در B می‌توان به این نتیجه رسید که هر عمل امتزاج ضعیف نیز، عملی ارگودیک است. لذا هر عمل امتزاجی، ارگودیک است. اکنون که الفبای بحث تا حدودی در دستمان قرار دارد لازم است وارد مقصود اصلی شویم.

* سخنران

مطالعه هر مبحث نیازمند درک شهودی است. جدای از این موضوع که ریشه ارگودیک چه هست و برای چه هدفی برآمده است به مثالی از آن نیاز داریم. اما برای این‌که این مثال به خوبی در ذهن خواننده جای بگیرد، از عمل برنولی برای گروه $\mathbb{Z}$ شروع می‌کنیم، حالتی شهودی که درک مسئله را برای ما راحت‌تر می‌کند. مجموعه $\sum(۲) = \{(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}: a_i \in \{۰,۱\}\}$ و فضای توپولوژیک $(\{۰,۱\}, \tau_d)$ را در نظر بگیرید که τ_d همان توپولوژی گسسته است. σ جبر بورل روی این فضا به همراه اندازه μ با تعریف روبرو تشکیل فضای اندازه احتمال می‌دهد.

$$\mu(\emptyset) = ۰, \quad \mu(\{۰\}) = \mu(\{۱\}) = \frac{۱}{۲}, \quad \mu(\{۰,۱\}) = ۱,$$

حال می‌توان $\sum(۲)$ را بدین صورت نوشت: $\sum(۲) = \prod_{-\infty}^{\infty} X_i \quad : \quad X_i = \{۰,۱\}$ که i دلخواه است. پس $\sum(۲)$ فضای حاصلضربی است. حال متر d با تعریف زیر را روی این فضا تعریف می‌کنیم $d\left((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}, (b_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|a_i - b_i|}{۲^{|i|}}$.
همسایگی‌های به‌وجود آمده این متر مانند

$$N_\varepsilon\left((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) = \{(b_i)_{i\in\mathbb{Z}} : a_i = b_i \quad s\cdot t \ \exists N \ : \ i \in \{-N, \dots, N\}\},$$

در حقیقت دنباله‌هایی می‌باشند که در $\{-N, \dots, N\}$ با (a_i) مشترک هستند و هر جایی جز آن، مؤلفه‌هایی متفاوت دارند. این همسایگی‌ها را **سیلندر** نامیم و با نماد $[U]$ معرفی می‌کنیم. فرض کنیم $l \in \mathbb{Z}$ مؤلفه‌ای باشد که در سیلندر $[U]$ همسایگی را مشخص می‌کند لذا می‌توان نوشت

$$U_l = (a_{-l}, a_{-l+۱}, a_{-l+۲}, \dots, a_۰, a_۱ \dots, a_l).$$

بنابراین، $[U_l]$ زیرمجموعه‌های بازی از $\sum(۲)$ می‌باشند و $\{[U_l]\}_{l\in\mathbb{Z}}$، σجبر بورل فضای توپولوژیکی $(\Sigma(۲), \tau_{prod})$ است که با $\beta_{\Sigma(۲)}$ نشان می‌دهیم. اندازه‌ای را روی $\beta_{\Sigma(۲)}$ تعریف می‌کنیم

$$\tilde{m} : \beta_{\Sigma(۲)} \to [۰,\infty) \ : \tilde{m}(U_l) = \prod_{-l}^{l} \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}^{۲l}.$$

کولموگروف ریاضیدان برجسته، قضیه‌ای مطرح می‌کند که $\tilde{m}$ اندازه‌ای روی فضای بورل $\Sigma(۲)$ می‌شود [۲]. می‌توان m را همان $\tilde{m}$ محدود به $\beta_{\Sigma(۲)}$ در نظر گرفت. σ با تعریف زیر را نگاشت برنولی می‌نامیم و اکنون تمام هدف ما نشان دادن ارگودیک بودن این نگاشت است

$$\sigma : \Sigma(۲) \to \Sigma(۲) \quad \sigma\left((a_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right) = (b_i)_{i\in\mathbb{Z}} \quad : b_i = a_{i+۱} \ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

عضو $B \in \beta_{\Sigma(۲)}$ که σ-پایا نیز می‌باشد را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم برای هر $\varepsilon > ۰$ گردایه متناهی دوبه دو مجزا از مجموعه‌های سیلندر مانند $C_۱, \dots, C_M$ وجود دارد که $m(B \triangle \bigcup_{j=۱}^{M} C_j) < \varepsilon$. قرار می‌دهیم $D = \coprod_{j=۱}^{M} C_j$ چون C_jها عضوهایی از σ-جبرند، D اندازه‌پذیر است و داریم: $|m(D) \setminus m(B)| < \varepsilon$.
از طرفی اگر $D = [a_{-l}, \dots, a_l]$ را بدین صورت در نظر بگیریم داریم

$$D \cap \sigma^{-n}(D) = \{x \in \Sigma(۲) : \ x_i = a_i, \ x_{-i+n} = a_i \quad s\cdot t\cdot \quad -l \le i \le l\}.$$

$m(D \cap \sigma^{-n}(D)) = m(D) \times m(\sigma^{-n}(D)) = m^۲(D)$ پس D و $\sigma^{-۱}(D)$ مستقل هستند لذا
و همچنین

$$m\left(B \triangle \sigma^{-n}(D)\right) = m\left(\sigma^{-n}(B) \triangle \sigma^{-n}(D)\right) = m\left(\sigma^{-n}(B \triangle D)\right) = m(B \triangle D) < \varepsilon.$$

قرار می‌دهیم $F = \sigma^{-n}(D)$ و در ادامه نشان می‌دهیم که $m(B) = m^{۲}(B)$:

$$\begin{aligned}\left|m(B) - m^{۲}(B)\right| &\leq |m(B) - m(D \cap F)| + \left|m(D \cap F) - m^{۲}(B)\right| \\ &\leq m(B \triangle (D \cap F)) + \left|m^{۲}(D) - m^{۲}(B)\right| \\ &\leq m(B \triangle D) + m(B \triangle F) + (m(D) + m(B))\,|m(D) - m(B)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + ۲\varepsilon.\end{aligned}$$

چون ε را دلخواه در نظر گرفته بودیم پس $m(B) = m^{۲}(B) \Rightarrow m(B) \in \{۰, ۱\}$ که نشان می‌دهد σ ارگودیک است.

مشاهده کردیم نگاشت برنولی در فضای ملموس $\sum(۲)$ ارگودیک است. عمده دلیل بیان این مطلب لمس و شناخت مراحل پیش‌روی در اثبات ارگودیک بودن عمل برنولی است چرا که با مشاهده این مورد، درک برهان عمل برنولی در فضای جامع‌تر آسان خواهد بود. اکنون به بیان عمل برنولی در فضای کلی‌تر و نحوه عملکرد آن می‌پردازیم.

Y را فضای لهستانی در نظر می‌گیریم. اگر Γ گروه شمارا باشد، فضای لهستانی زیر را با توپولوژی حاصلضربی تشکیل می‌دهیم:

$$Y^{\Gamma} = \prod_{i \in I} Y_i \quad : \; Y_i = Y.$$

حال مجموعه‌های باز حاصل از توپولوژی بالا را سیلندر نامیم که می‌توان آن‌ها را چنین در نظر گرفت $\prod_{s \in \Gamma} A_s$ به‌طوری‌که $A_s = Y$ و s خارج از مجموعه‌ای متناهی از Γ است. این سیلندرها که هر مجموعه باز در Y^{Γ} را به‌صورت اجتماع شمارا از خود نمایش می‌دهند، σ جبر بورلی روی Y^{Γ} تشکیل می‌دهند که با $\beta_{Y^{\Gamma}}$ نمایش می‌دهیم. پس فضای $\left(Y^{\Gamma}, \beta_{Y^{\Gamma}}\right)$ فضایی بورل است. اگر ν را اندازه احتمال بورل Y در نظر بگیریم پس υ^{Γ} است که رفتاری مثل اندازه حاصلضربی روی $\beta_{Y^{\Gamma}}$ دارد در حقیقت اندازه به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\upsilon^{\Gamma} : \beta_{Y^{\Gamma}} \to [۰, \infty) \quad : \pi_F^{-۱}\left(\prod_{s \in F} A_s\right) \mapsto \prod_{s \in F} \upsilon(A_s),$$

برای هر زیرمجموعه متناهی F از Γ و هر $\{A_s\}_{s \in F}$. یادآور می‌شویم که مجموعه‌های باز طبق توپولوژی حاصلضربی به‌صورت $\pi_F^{-۱}(\prod_{s \in F} A_s)$ می‌باشند که $F \subseteq \Gamma$ متناهی و $\pi_F : \; Y^{\Gamma} \to Y^F$ نگاشت تصویر به مؤلفه‌های F است. حال که فضای اندازه احتمال استاندارد $(Y^{\Gamma}, \beta_{Y^{\Gamma}}, \upsilon^{\Gamma})$ را ساختیم عمل زیر را روی آن فرض می‌کنیم:

$$\Gamma \curvearrowright \left(Y^{\Gamma}, \beta_{Y^{\Gamma}}\right) : \Gamma \times Y^{\Gamma} \to Y^{\Gamma} \quad : \quad \left(s, (x_t)_{t \in \Gamma}\right) \mapsto s.(x_t)_{t \in \Gamma} = (x_{s^{-۱}t})_{t \in \Gamma}.$$

آیا عمل فوق حافظ اندازه است؟ برای این کار نشان می‌دهیم:

$$\upsilon^{\Gamma}(\pi^{-۱}{}_F(\prod_{s \in F} A_s)) = \upsilon^{\Gamma}(t \cdot \pi^{-۱}{}_F(\prod_{s \in F} A_s))$$

.

حال به تشریح سمت راست تساوی می‌پردازیم چرا که سمت چپ اندازه واضحی دارد. طبق تعریف عناصر پایه در توپولوژی حاصلضربی داریم:

$$(\pi^{-۱}{}_F(\prod_{s \in F} A_s) = \{(x_r)_{r \in \Gamma} : \; x_s \in A_s, \; s \in \; F, \text{ زیرمجموعه متناهی } \Gamma \text{ است } F\},$$

بنابراین:

$$t \cdot (\pi^{-۱}{}_F(\prod_{s \in F} A_s) = \{(x_r)_{r \in \Gamma} : m_s = t^{-۱}s, \; x_{ms} \in A_{ms}, \; m_s \in \; M, \text{ زیرمجموعه متناهی } \Gamma \text{ است } M\}.$$

همان‌طور که مشخص است، تأثیر عمل بر روی عناصرσ-جبر به‌گونه‌ای است که تنها اندیس مؤلفه‌هایی که در F هستند را جا به جا می‌کند و چون Γ دلخواه است و ترتیب روی آن الزاماً برقرار نیست لذا اندیس‌های جدید که از تأثیر عضو دلخواه t روی اعضای F به‌دست می‌آید دقیقاً همان تعداد را دارند و به نوعی فقط جای اندیس‌ها را تغییر می‌دهیم پس $|M|=|F|$ و $A_s = A_{m_s} \Rightarrow \upsilon(A_s) = \upsilon(A_{m_s})$ که نتیجه می‌دهد

$$\upsilon^{\Gamma}(t \cdot \pi^{-1}{}_F(\prod_{s\in F} A_s)) = \prod_{m_s\in M} \upsilon(A_{m_s}) = \prod_{s\in F} \upsilon(A_s) = \upsilon^{\Gamma}(\pi^{-1}{}_F(\prod_{s\in F} A_s)),$$

پس عمل حافظ اندازه است که این عمل را برنولی می‌نامیم. اکنون ارگودیک بودن آن را بررسی می‌کنیم. می‌دانیم اگر فضای احتمال (X,μ) با σ-جبر ρ باشد که $\mathcal{A}$ جبری است شامل زیرمجموعه‌های اندازه‌پذیر X که ρ را تولید می‌کند آن‌گاه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $B \subseteq X$ و $\varepsilon>0$ عضوی چون $A \in \mathcal{A}$ وجود دارد که $\mu(A\triangle B) < 0$. حال آماده‌ایم تا ارگودیک بودن عمل برنولی را به اثبات برسانیم. دو سیلندر بورل در Y^{Γ} را در نظر می‌گیریم: $A = \prod_{s\in\Gamma} A_s$ که به ازاء s خارج از مجموعه متناهی E داریم $A_s = Y$ و $B = \prod_{s\in\Gamma} B_s$ که به ازاء s خارج از مجموعه متناهی F داریم $B_s = Y$. آن‌گاه مشابه استدلالی که در نگاشت برنولی دیدیم داریم $\mu(sA\cap B) = \mu(A)\mu(B)$ که خبر از مستقل بودن دو مجموعه sA و B به ازاء $s \in \Gamma\backslash FE^{-1}$ می‌دهد. پس اگر A و B اجتماع متناهی از مجموعه‌های سیلندر باشند آن‌گاه به ازاء sای خارج از زیرمجموعه متناهی از Γ داریم: $\mu(sA\cap B) = \mu(A)\mu(B)$. چون این مجموعه‌ها جبری را تشکیل می‌دهند که مولدی برای σ-جبر است لذا داریم: برای هر $\varepsilon > 0$ و هر زیرمجموعه بورل مثل A و B از X زیرمجموعه‌های A' و B' از جبر مذکور وجود دارند که $\upsilon^{\Gamma}(A\triangle A') < \varepsilon,\ \upsilon^{\Gamma}(B\triangle B') < \varepsilon$. حال چون

$$\left|\upsilon^{\Gamma}(sA\cap B)\backslash\upsilon^{\Gamma}(sA'\cap B')\right| \le \left|\upsilon^{\Gamma}\left((sA\cap B)\backslash sA'\right) + \upsilon^{\Gamma}((sA\cap B)\backslash B')\right| < 2\varepsilon,$$

و همچنین

$$\left|\upsilon^{\Gamma}(A')\upsilon^{\Gamma}(B')\backslash\upsilon^{\Gamma}(A)\upsilon^{\Gamma}(B)\right| < 2\varepsilon,$$

و از طرفی طبق رابطه‌ای که A' و B' در جبر دارند:

$$\left|\upsilon^{\Gamma}(sA'\cap B')\backslash\upsilon^{\Gamma}(A')\upsilon^{\Gamma}(B')\right| < \varepsilon.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\left|\upsilon^{\Gamma}(sA'\cap B')\backslash\upsilon^{\Gamma}(A)\upsilon^{\Gamma}(B)\right| &\le \left|\upsilon^{\Gamma}(sA'\cap B')\backslash\upsilon^{\Gamma}(A')\upsilon^{\Gamma}(B')\right| \\ &+ \left|\upsilon^{\Gamma}(A')\upsilon^{\Gamma}(B')\backslash\upsilon^{\Gamma}(A)\upsilon^{\Gamma}(B)\right| \\ &< \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon,\end{aligned}$$

و لذا داریم:

$$\begin{aligned}\left|\upsilon^{\Gamma}(sA\cap B)\backslash\upsilon^{\Gamma}(A)\upsilon^{\Gamma}(B)\right| &\le \left|\upsilon^{\Gamma}(sA\cap B)\backslash\upsilon^{\Gamma}(sA'\cap B')\right| \\ &+ \left|\upsilon^{\Gamma}(sA'\cap B')\backslash\upsilon^{\Gamma}(A)\upsilon^{\Gamma}(B)\right| \\ &< 2\varepsilon+3\varepsilon= 5\varepsilon.\end{aligned}$$

چون ε دلخواه بود و Γ را همواره نامتناهی فرض کردیم: $\lim_{s\to\infty}\upsilon^{\Gamma}(sA\cap B) = \upsilon^{\Gamma}(A)\upsilon^{\Gamma}(B)$ که A و B زیرمجموعه‌های بورل از X می‌باشند. بنابراین عمل برنولی برای گروه‌های نامتناهی امتزاج است و چون هر عمل امتزاجی، امتزاج ضعیف است و هر عمل امتزاج ضعیف نیز عملی ارگودیک است، لذا عمل برنولی برای گروه‌های نامتناهی ارگودیک است.

۲. نتیجه‌گیری

همان‌طور که ملاحظه شد عمل برنولی ارگودیک است. ارگودیک بودن عمل برنولی در نظریه هم‌ارزی مدارها و میانگین‌پذیری نقش کلیدی را بازی می‌کند ([۱] را ببینید) و از همین رو است که پرداختن به آن ارزشمند تلقی می‌شود.

مراجع

1. D. Kerr and H. Li, *Ergodic Theory: Independence and Dichotomies*, Springer, Cham, 2016.
2. P. Walters, *An Introduction to Ergodic Theory*, Vol. 79, Springer-Verlag, New York, 2000.

پست الکترونیکی: saeedshaabanian@gmail.com; saeed.shaabanian@modares.ac.ir

بررسی فردهلم بودن معادله بیضوی کوشی-ریمان شامل پارامتر در شرایط مرزی موضعی و غیرموضعی

جواد عبادپور گلنبر*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران
و فرزاد فرزانفر
دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه پیام‌نور، تهران، ایران

چکیده. در این مقاله دو مسئله مقدار مرزی شامل معادله کوشی-ریمان با دو شرط مرزی متفاوت شامل پارامتر λ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت اول، شرط مرزی از نوع موضعی است که ابتدا به کمک جواب اساسی معادله کوشی-ریمان، شرایط ضروری را به‌دست آورده و به کمک شرایط مرزی داده شده، تکینی این نوع مسائل را از بین برده و مسئله را به دستگاه معادلات انتگرالی نوع دوم فردهلم تبدیل می‌کنیم. سپس روند مشابهی با شرط مرزی غیرموضعی با جملات انتگرالی انجام می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: معادله کوشی-ریمان، شرایط ضروری، جواب اساسی، منظم سازی، دستگاه معادلات انتگرالی فردهلم، مسأله استکلف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 45B05, 35J56, 35F15.

۱. پیش‌گفتار

معادلات دیفرانسیل جزئی لاپلاس و کوشی-ریمان از مهمترین معادلات بیضوی هستند. در مباحث کلاسیک تحت شرایط مرزی موضعی دیریکله (نوع اول)، نیومن (نوع دوم) و پوآنکاره (نوع سوم) مورد بررسی واقع می‌شوند. در [۶]، معادله لاپلاس با شرط مرزی غیرموضعی شامل پارامتر مورد بررسی واقع شده و شرایط کافی برای فردهلم نیز بررسی شده است. معمولاً در یک معادله جزئی اگر پارامتر در شرط مرزی ظاهر شود این نوع مسأله، به مسأله استکلف معروف است اما اگر پارامتر در خود معادله ظاهر شود معادله اشتورم-لیوویل نامیده می‌شود.

۲. بیان ریاضی مسئله

مسئله مقدار مرزی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial x_1} = 0, \qquad x=(x_1,x_2)\in D\subseteq \mathbb{R}^2,\ t>0, \tag{۱}$$

با شرط مرزی موضعی

$$u\left(x_1,\gamma_2(x_1),\lambda\right) - \lambda u\left(x_1,\gamma_1(x_1),\lambda\right) = 0, \qquad x=(x_1,x_2)\in \Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2, \tag{۲}$$

که Γ خم لیاپانف بوده و $\Gamma_1,\Gamma_2\in\Gamma$ و نیز $i=\sqrt{-1}$ و $\lambda\in C$. منظور از جواب مسأله (۱) و (۲) جواب کلاسیک است. یعنی $u(x_1,x_2)\in C^1(D)\cap(\overline{D})$ و ناحیه مسطح $D\subseteq R^2$ کراندار، همبند و مرز آن از نوع لیاپانوف است.

می‌دانیم جواب اساسی معادله (۱) به‌صورت زیر است [۱]:

$$U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}, \tag{۳}$$

* سخنران

اکنون رابطه (۳) را در معادله معادله کوشی-ریمان همگن (۱) ضرب کرده و در ناحیه D انتگرال می‌گیریم و از دستور گاوس- آستراگرادسکی برای باز کردن انتگرال دوگانه استفاده می‌کنیم [۵]. لذا خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
\circ &= \int\int_D \left(\frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial x_1}\right) U(x-\xi)\mathrm{d}x \\
&= \int\int_D \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial x_2} U(x-\xi)\mathrm{d}x + i\int\int_D \frac{\partial u(x,\lambda)}{\partial x_1} U(x-\xi)\mathrm{d}x \\
&= \int_\Gamma u(x,\lambda)U(x-\xi)\cos(\nu,x_2)\mathrm{d}x - \int\int_D u(x,\lambda)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_2}\mathrm{d}x \\
&+ i\int_\Gamma u(x,\lambda)U(x-\xi)\cos(\nu,x_1)\mathrm{d}x - \int\int_D u(x,\lambda)\frac{\partial U(x-\xi)}{\partial x_1}\mathrm{d}x \\
&= \int_\Gamma u(x)U(x-\xi)\big\{\cos(\nu,x_2) + i\cos(\nu,x_1)\big\}\mathrm{d}x - \int\int_D u(x)\delta(x-\xi)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

مرز Γ را به مرزهای Γ_1 و Γ_2 افراز کرده و با توجه به خاصیت تابع دلتای دیراک می‌توان نوشت:

$$
\int_{\Gamma_1} u(x,\lambda)U(x-\xi)\cos(\nu,x_2)\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_2} u(x,\lambda)U(x-\xi)\cos(\nu,x_2)\mathrm{d}x = \begin{cases} u(\xi,\lambda);\ \xi\in D \\ \frac{1}{2}u(\xi,\lambda);\ \xi\in\Gamma \end{cases},
$$

که υ نرمال خارجی روی مرز Γ است. با توجه به تجزیه بردارها و جواب اساسی، رابطه فوق را می‌توان به‌صورت زیر نوشت [۴]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{-1+i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)} u(x_1,\gamma_1(x_1),\lambda)\mathrm{d}x_1 \\
&+\frac{1}{2\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)} u(x_1,\gamma_2(x_1),\lambda)\mathrm{d}x_1 = \begin{cases} u(\xi,\lambda);\ \xi\in D \\ \frac{1}{2}u(\xi,\lambda);\ \xi\in\Gamma \end{cases},
\end{aligned}
$$

برای $k=1,2$ ، $\gamma_k(x_1)=\dfrac{sin(x_1,\tau_k)}{cos(x_1,\tau_k)}$ برای حالت‌های $\xi_1,\xi_2\in\Gamma$ رابطه فوق را بعد از ساده کردن به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$
(۴)\quad \begin{cases}
u(\xi_1,\gamma_1(\xi_1),\lambda) &= \frac{-1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)} u(x_1,\gamma_1(x_1),\lambda)\mathrm{d}x_1 \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_1(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)} u(x_1,\gamma_2(x_1),\lambda)\mathrm{d}x_1, \\
u(\xi_1,\gamma_2(\xi_1),\lambda) &= \frac{-1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1-i\gamma_1'(x_1)}{\gamma_1(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)} u(x_1,\gamma_1(x_1),\lambda)\mathrm{d}x_1 \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1} \frac{1-i\gamma_2'(x_1)}{\gamma_2(x_1)-\gamma_2(\xi_1)+i(x_1-\xi_1)} u(x_1,\gamma_2(x_1),\lambda)\mathrm{d}x_1.
\end{cases}
$$

رابطه (۴) را شرایط ضروری معادله (۱) نامیم.

قضیه ۱.۲. فرض کنید ناحیه $D\subseteq R^2$ یک ناحیه کراندار و همبند باشد و هر خط موازی با محور عرض‌ها، مرز D را حداکثر در دو نقطه قطع کند. در این‌صورت روابط (۴) شرایط ضروری معادله (۱) هستند.

در رابطه (۴) انتگرال‌هایی که دارای تکینی قوی هستند را به تکینی ضعیف تبدیل می‌کنیم برای این کار از قضیه مقدار میانگین برای مشتق استفاده می‌کنیم. هسته انتگرال جمله اول در دستگاه (۴) انتگرال‌هایی که دارای تکینی هستند را مشخص می‌کنیم. لذا برای راحتی، فقط آن قسمت از هسته که دارای تکینی می باشند را در نظر

می‌گیریم. توجه شود که جمله دوم هسته رابطه نخست تکینی ندارد و جمله اول آن تکینی دارد. همچنین هسته جمله اول رابطه دوم (۴) تکینی ندارد و جمله دوم آن رابطه تکینی دارد. لذا برای $k = ۱, ۲$ هسته جملات انتگرالی را به‌صورت زیر تغییر می‌دهیم:

$$\begin{aligned}\frac{۱ - i\gamma_k'(x_۱)}{\gamma_k(x_۱) - \gamma_k(\xi_۱) + i(x_۱ - \xi_۱)} &= \frac{۱ - i\gamma_k'(x_۱)}{\{\gamma_k'(\sigma_k) + i\}(x_۱ - \xi_۱)} = \frac{۱}{i(x_۱ - \xi_۱)} \cdot \frac{\gamma_k'(x_۱) + i}{\gamma_k'(\sigma_۱) + i} \\ &= \frac{۱}{i(x_۱ - \xi_۱)} \cdot \left\{ ۱ + \left(\frac{\gamma_k'(x_۱) + i}{\gamma_k'(\sigma_۱) + i}\right) \right\} \\ &= \frac{۱}{i(x_۱ - \xi_۱)} \cdot \{ ۱ + \frac{\gamma_k'(x_۱) - \gamma_k'(\sigma_k)}{\gamma_k'(\sigma_k) + i} \}.\end{aligned}$$

با اعمال تغییرات فوق و به‌دست آوردن یک ترکیب خطی از دستگاه (۴) رابطه زیر را با اعمال محاسباتی می‌توان به‌دست آورد:

(۵)
$$\begin{cases} u(\xi_۱, \gamma_۲(\xi_۱), \lambda) - \lambda u(\xi_۱, \gamma_۱(\xi_۱), \lambda) &= ۰ \\ u(\xi_۱, \gamma_۲(\xi_۱), \lambda) + \lambda u(\xi_۱, \gamma_۱(\xi_۱), \lambda) &= \frac{۱}{\pi i} \int_{a_۱}^{b_۱} u(x_۱, \gamma_۲(x_۱), \lambda) \frac{\gamma_۲'(x_۱) - \gamma_۲'(\sigma_۱)}{\gamma_۲'(\sigma_۱) + i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_۱}{x_۱ - \xi_۱} \\ &\quad - \frac{۱}{\pi} \int_{a_۱}^{b_۱} u(x_۱, \gamma_۱(x_۱), \lambda) \frac{۱ - i\gamma_۱'(x_۱)}{\gamma_۱(x_۱) - \gamma_۲(\xi_۱) + i(x_۱ - \xi_۱)} \mathrm{d}x_۱ \\ &\quad - \frac{\lambda}{\pi i} \int_{a_۱}^{b_۱} u(x_۱, \gamma_۱(x_۱), \lambda) \frac{\gamma_۱'(x_۱) - \gamma_۱'(\sigma_۱)}{\gamma_۱'(\sigma_۱) + i} \cdot \frac{\mathrm{d}x_۱}{x_۱ - \xi_۱} \\ &\quad + \frac{\lambda}{\pi} \int_{a_۱}^{b_۱} u(x_۱, \gamma_۲(x_۱), \lambda) \frac{۱ - i\gamma_۲'(x_۱)}{\gamma_۲(x_۱) - \gamma_۱(\xi_۱) + i(x_۱ - \xi_۱)} \mathrm{d}x_۱. \end{cases}$$

دستگاه (۵) را حل کرده و جواب آن را به فرم فشرده زیر می‌توان نوشت:

(۶)
$$\begin{cases} u(\xi_۱, \gamma_۱(\xi_۱), \lambda) = \int_{a_۱}^{b_۱} K_{۱۱}(\xi_۱, x_۱, \lambda) u(x_۱, \gamma_۱(x_۱), \lambda) \mathrm{d}x_۱ \\ \qquad\qquad + \int_{a_۱}^{b_۱} K_{۱۲}(\xi_۱, x_۱, \lambda) u(x_۱, \gamma_۲(x_۱), \lambda) \mathrm{d}x_۱, \\ u(\xi_۱, \gamma_۲(\xi_۱), \lambda) = \int_{a_۱}^{b_۱} K_{۲۱}(\xi_۱, x_۱, \lambda) u(x_۱, \gamma_۱(x_۱), \lambda) \mathrm{d}x_۱ \\ \qquad\qquad + \int_{a_۱}^{b_۱} K_{۲۲}(\xi_۱, x_۱, \lambda) u(x_۱, \gamma_۲(x_۱), \lambda) \mathrm{d}x_۱, \end{cases}$$

که برای $i, j = ۱, ۲$، K_{ij} توابع معلومی هستند. دستگاه (۶) را به فرم ماتریسی معادله انتگرال فردهلم نوع اول زیر نوشت:

(۷)
$$V(\xi_۱, \xi_۲, \lambda) = \int_{a_۱}^{b_۱} K(\xi_۱, x_۱, \lambda) V(x_۱, x_۲, \lambda) \mathrm{d}X,$$

که

$$V(\xi_۱, \xi_۲, \lambda) = \begin{bmatrix} u(\xi_۱, \gamma_۱(\xi_۱), \lambda) \\ u(\xi_۱, \gamma_۲(\xi_۱), \lambda) \end{bmatrix}, \; K(\xi_۱, x_۱, \lambda) = \begin{bmatrix} k_{۱۱}(\xi_۱, x_۱, \lambda) & k_{۱۲}(\xi_۱, x_۱, \lambda) \\ k_{۲۱}(\xi_۱, x_۱, \lambda) & k_{۲۲}(\xi_۱, x_۱, \lambda) \end{bmatrix}.$$

در نتیجه قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲.۲. تحت شرایط قضیه ۱.۲ اگر $u(\xi_۱, \gamma_p(\xi_۱), \lambda), \; p = ۱, ۲$ از دستگاه (۵) به‌صورت یگانه نوشته شود آن‌گاه مسأله (۱) و (۲) فردهلم است و به‌صورت معادله انتگرال فردهلم نوع اول (۷) تبدیل می شود.

توجه کنید که معادله (۱) با شرایط مرزی غیر موضعی زیر

$$a_۲(x_۱) u(x_۱, \gamma_۲(x_۱), \lambda) - a_۱(x_۱) u(x_۱, \gamma_۱(x_۱), \lambda) = \lambda \int_D a(x_۱, z) u(z, \lambda) \mathrm{d}z,$$

به معادله انتگرال فردهلم نوع دوم تبدیل می‌شود.

مراجع

1. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics*, Mir Publishers, Moscow, 1984.
2. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.
3. J. Kondo, *Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
4. M. Jahanshahi, J. Ebadpour Golanbar and N. Aliev, *Spectral problem for an initial- boundary value problems involving first order two dimensional generalized non-gomogenous Cauchy – Riemann equation with general non-local boundary conditions*, Proc. 6th Int. Conf. control and optim. Ind. Appl. **1** (2018) pp. 212–215.
5. M. Jahanshahi and M. Fatehi, *Analytic solution for the Cauchy–Riemann equation with non-local boundary conditions in the first quarter*, Int. J. Pure Appl. Math. **46** (2) (2008) 245–249.
6. J. Ebadpour Golanbar, N. Aliev and M. Jahanshahi, *Transportation of a BVP including generalized Cauchy Riemann equation to Fredholm integral equation*, TWMS J. Pure Appl. Math. **11** (1) (2020) 30–42.

پست الکترونیکی: ebadpour.j@gmail.com
پست الکترونیکی: farzanfar@pnu.ac.ir

کاربردهای همزمان‌سازی شبکه عصبی بم در سیگنال‌های نوار قلب

زهرا محمدزاده*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
و اسد عازمی
دانشکده مهندسی، دانشگاه پنسلوانیا، پنسلوانیا، آمریکا

چکیده. در این پژوهش اهمیت همزمان‌سازی سیستم‌های نوسان‌گر وندرپل در شبکه عصبی بم را بررسی می‌کنیم. با استفاده از کنترل تطبیقی برای دستیابی به همزمان‌سازی فرض‌هایی در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از تابع لیاپانف کنترل‌کننده مورد استفاده را طراحی و شرایطی را برای پایداری سیستم همزمان شده به‌دست می‌آوریم. در ادامه نمونه کاربردی که نمایانگر اهمیت بررسی این سیستم ها می‌باشد را در نظر گرفته و با استفاده از سیمولینک نرم افزار متلب شبیه سازی می‌کنیم. نتایج حاصل از این شبیه‌سازی کارایی روش ارائه شده را تایید می‌کند.
واژه‌های کلیدی: همزمان‌سازی، کنترل تطبیقی، تابع لیاپانف، معادلات وندرپل.

۱. پیش‌گفتار

به‌عنوان یکی از کاربردهای همزمان‌سازی شبکه عصبی بم می‌توان از پدیده‌های بیولوژیکی نام برد، در همزمان‌سازی بعضی پدیده‌های بیولوژیکی مانند شدت و ضربان اسیلاتورهای قلب، میزان ترشح انسولین و غیره می‌باشد، کنترل‌کننده‌ای که در این پدیده‌ها مورد استفاده قرار گرفته است، بسیار مورد توجه می‌باشد [۷]. در این مقاله به بررسی بیماری کند تپشی در بیمارانی که دچار نارسایی قلبی می‌باشند، می‌پردازیم. بدین منظور از ضربان‌سازی دوحفره‌ای بر اساس مدل‌سازی سیگنال نوار قلب با استفاده از معادلات وندرپل می‌باشد، استفاده می‌کنیم. یکی از علل اصلی ایجاد کننده نارسایی قلبی، انقباض ناهماهنگ دهلیزها و بطن‌ها می‌باشد. این ناهماهنگی به پمپ قلبی آسیب می‌رساند، خون رسانی مختل می‌شود و علائمی مانند خستگی، تنگی نفس سطحی و کوتاه بروز می‌کند. مهم‌ترین عوامل تعیین‌کننده‌های مرگ در بیماران مبتلا به نارسایی قلب، کند تپشی، سکته قلبی با بالا رفتن قطعه s، فیبریلاسیون دهلیزی و غیره می‌باشد [۴]. نارسایی قلبی زمانی رخ می‌دهد که قلب قادر به پمپاژ کافی نیست و نمی‌تواند جریان خون کافی را به اعضای بدن برساند. برای ایجاد ضربان‌ساز در دهلیز و بطن، از طریق منحنی فاز و یا نوسان کننده (اسیلاتورهای) غیرخطی وندرپل استفاده می‌کنیم. معادلات غیرخطی وندر پل دارای دو خاصیت مهم است که باعث می‌شود تا از آن به عنوان مدل سلول‌های قلب استفاده نماییم. اولاً نوسان کننده وندرپل فرکانس ذاتی خود را با فرکانس سیگنال ورودی بدون تغییر در دامنه نوسانات تنظیم می‌کند. ثانیاً این نوسان کننده می‌تواند فرکانس نوسان خود را با فرکانس سیگنال ورودی تنظیم کند. این خاصیت بسیار مهمی می‌باشد. زیرا اسیلاتور پیرو با فرکانس پایین باید خود را با ضربان‌ساز غالب قلب که دارای بالاترین فرکانس می‌باشد تطبیق دهد.

طرز کار ضربان‌ساز دوحفره‌ای، پیس میکر یا همان ''باطری قلب'' می‌تواند کندی ضربان قلب را تشخیص دهد و با فرستادن جریان الکتریکی یک ضربان طبیعی و منظم را مجدداً برقرار کند. پیس میکر از قطعات کوچک کامپیوتری و یک باطری کوچک ولی با طول عمر طولانی تشکیل شده است. در این حالت دو عدد لید مورد نیاز است. یک لید در دهلیز راست و دیگری در بطن راست قرار داده می‌شود. پیس میکر فعالیت الکتریکی دهلیز و بطن را حس کرده و تعیین می‌کند که آیا تولید ضربان الزام است یا نه. همچنین پیس میکر تضمین می‌کند که انقباض بطن در پی انقباض دهلیز باشد. پیس میکرهای دوحفره‌ای به انقباض منظم دهلیزها و بطن‌ها کمک می‌کنند. بدین طریق ضربان تولید شده توسط پیس میکر شبیه ضربان طبیعی قلب است. کارها انجام شده بر اساس ضربان‌سازی یک حفره‌ای در دهلیز که بر اساس کنترل مدلغزشی، شبکه عصبی، الگوریتم ذرات همچنین تئوری اندازه انجام شده است [۱، ۲، ۳، ۶]. در این تحقیق از پیس میکرهای دوحفره ای برای ضربان‌ساز استفاده

* سخنران

می‌کنیم. در این مقاله به طراحی یک کنترل‌کننده‌ای که بتواند این اختلال را از بین برد تا مجموعه مورد نظر دچار اختلال نشود می‌پردازیم. برای انجام این کار از کنترل تطبیقی که بتواند در مقابل تغییرات آرام در سیستم و همچنین خطاهای مدل‌سازی پاسخ مناسب بدهد که این کنترل‌کننده بر مبنای تابع لیاپانف به منظور همزمان‌سازی استفاده گردید. بقیه این مقاله بدین شرح سازماندهی شده است: بخش ۲ مدل و مقدمات لازم، بخش۳ تعیین کنترل‌کننده، بخش ۴ شبیه‌سازی‌های عددی در انتها نتیجه‌گیری می‌باشد.

۲. معرفی مدل و مقدمات ریاضی

ابتدا به معرفی مدل و قضایا مورد نیاز می‌پردازیم. سیستم مورد بررسی را بدین صورت در نظر می‌گیریم یک شبکه عصبی بم که در هر لایه یک نرون قرار دارد:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) + \alpha_1(y(t) - x(t)) + u_1, \\ \dot{y}(t) &= y(t) + \alpha_2(x(t) - y(t)) + u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

α_1 و α_2 وزن اتصالات بین لایه‌ای می‌باشد. همچنین u ورودی کنترل برای همزمان‌سازی می‌باشد. با قرار دادن معادلات وندرپل در هر نرون معادله (۳) به‌صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= -\omega_1^2 x_1(t) + \mu_1(1 - x_1^2(t))x_2(t) + \alpha_1(y(t) - x(t)) + u_1, \\ \dot{y}_1(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= -\omega_2^2 y_1(t) + \mu_2(1 - y_1^2(t))y_2(t) + \alpha_2(x(t) - y(t)) + u_2. \end{aligned} \tag{2}$$

در این معادلات ω فرکانس زاویه‌ای، μ ضریب میرایی و α ضریب اتصالات بین لایه‌ای می‌باشد. فرض کنیم $s(t)$ جواب همزمان‌سازی باشد که در معادلات زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} \dot{s}_{x1}(t) &= s_{x2}(t), \\ \dot{s}_{x2}(t) &= -\omega_1^2 s_{x1}(t) + \mu_1(1 - s_{x1}^2(t))s_{x2}(t), \\ \dot{s}_{y1}(t) &= y_2(t), \\ \dot{s}_{y2}(t) &= -\omega_2^2 y_1(t) + \mu_2(1 - s_{y1}^2(t))s_{y2}(t). \end{aligned} \tag{3}$$

فرض ۲.۱. فرض کنیم توابع f و h که در شرایط نرم کراندار صدق می‌کند ثابت‌های نامنفی a_1, a_2 وجود دارد به‌طوری که

$$\|f_i(k_1(t), k_2(t)) - f_i(s_{k1}(t), s_{k2}(t))\| \leq a_1\|e_{k1}(t)\| + a_2\|e_{k2}(t)\|.$$

قضیه ۱.۲. [۵] سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{x} = f(x), x \in R^n.$$

فرض کنید $\bar{x}$ یک نقطه تعادل دستگاه فوق باشد، همچنین فرض کنید $V : U \to R$ یک تابع پیوسته مشتق پذیر روی همسایگی U از $\bar{x}$ باشد، به‌طوری که $V(x) > 0$ برای $\bar{x} \neq x$. در این‌صورت

- اگر به ازای هر $x \in U - \bar{x}$ داشته باشیم $\dot{V}(x) \leqslant 0$ آنگاه $\bar{x}$نقطه‌ی تعادل پایدار و
- اگر به ازای هر $x \in U - \bar{x}$ داشته باشیم $\dot{V}(x) < 0$ آنگاه $\bar{x}$ به‌طور مجانبی پایدار است.

۳. تعیین کنترل‌کننده

ابتدا تابع لیاپانف از جنس خطا تعریف می‌کنیم به این دلیل‌که پایداری و همگرایی خطا به سمت صفر سبب همزمان‌سازی سیستم می‌شود. با طراحی کنترل‌کننده ($u_i(t)$) مناسب به این هدف می‌رسیم.

$$e_i(t) = \begin{cases} e_{xi}(t) = & x_i(t) - s_{xi}(t) \\ e_{yi}(t) = & y_i(t) - s_{yi}(t) \end{cases} \Rightarrow \dot{e}_i(t) = \begin{cases} \dot{e}_{xi}(t) = & \dot{x}_i(t) - \dot{s}_{xi}(t) \\ \dot{e}_{yi}(t) = & \dot{y}_i(t) - \dot{s}_{yi}(t) \end{cases}.$$

قضیه ۱.۳. با انتخاب کنترل‌کننده تطبیقی به‌صورت معادله حداقل ضریب کنترل‌کننده به‌صورت $k_۱ > ۰, k_۲ > ۰$ همزمان‌سازی سیستم را داریم.

اثبات. ابتدا تابع لیاپانف به‌صورت معادله (۴) طراحی می‌کنیم.

$$V(t) = \frac{۱}{۲}\sum_{i=۱}^{N}(e_i(t))^۲. \tag{۴}$$

مشتق تابع لیاپانف به‌صورت معادله (۵) می‌باشد.

$$\dot{V}(t) = \begin{cases} \dot{V}_x(t) = & \sum_{i=۱}^{۲}(\dot{e}_{xi}(t)^t e_{xi}(t)), \\ \dot{V}_y(t) = & \sum_{i=۱}^{۲}(\dot{e}_{yi}(t)^t e_{yi}(t)). \end{cases} \tag{۵}$$

ابتدا معادله $\dot{e}(t)$ به‌دست می‌آوریم، در مشتق تابع لیاپانف قرار می‌دهیم.

$$\dot{e}_x(t) = \begin{cases} \dot{e}_{x۱}(t) = & e_{x۲}(t), \\ \dot{e}_{x۲}(t) = & f_۱(x_۱(t), x_۲(t)) - f_۱(s_{x۱}(t), s_{x۲}(t)) + \alpha_۱ y_۲(t) - \alpha_۱ x_۲(t) + u_۱(t), \\ u_۱(t) = & -\beta_۱ e_{x۱}(t) - \beta_۲ e_{x۲}(t) - \alpha_۱ y_۲(t) + \alpha_۱ x_۲(t) - k e_{x۲}(t) - e_{x۱}(t). \end{cases}$$

$$\dot{e}_y(t) = \begin{cases} \dot{e}_{y۱}(t) = & e_{y۲}(t), \\ \dot{e}_{y۲}(t) = & f_۱(y_۱(t), y_۲(t)) - f_۱(s_{y۱}(t), s_{y۲}(t)) + \alpha_۲ y_۲(t) - \alpha_۱ y_۲(t) + u_۱(t), \\ u_۲(t) = & -\gamma_۱ e_{y۱}(t) - \gamma_۲ e_{y۲}(t) - \alpha_۲ x_۲(t) + \alpha_۲ y_۲(t) - k e_{y۲}(t) - e_{y۱}(t). \end{cases}$$

با اعمال کنترل‌کننده مشتق خطا به‌صورت معادله (۶) می‌شود:

(۶)

$$\dot{e}_x(t) = \begin{cases} \dot{e}_{x۱}(t) = & e_{x۲}(t), \\ \dot{e}_{x۲}(t) = & -k_۱ e_{x۲}(t) - e_{x۱}(t), \end{cases} \qquad \dot{e}_y(t) = \begin{cases} \dot{e}_{y۱}(t) = & e_{y۲}(t), \\ \dot{e}_{y۲}(t) = & -k_۲ e_{y۲}(t) - e_{y۱}(t). \end{cases}$$

با قرار دادن معادله $\dot{e}(t)$ در مشتق تابع لیاپانف داریم.

$$\dot{V}(t) = \begin{cases} \dot{V}_x(t) & = \sum_{i=۱}^{۲} \dot{e}_{xi}(t)^t e_{xi}(t) \le -k_۱ \|e_x(t)\|_۲^۲, \\ \dot{V}_y(t) & = \sum_{i=۱}^{۲} \dot{e}_{yi}(t)^t e_{yi}(t) \le -k_۲ \|e_y(t)\|_۲^۲, \end{cases}$$

با توجه به قضیه تابع لیاپانف حداقل ضریب که سیستم پایدار شود، برابر است با:

$$k_۱ > ۰, k_۲ > ۰. \tag{۷}$$

□

حال با انتخاب $k_۱$ و $k_۲$ به‌صورت رابطه (۷) مشتق تابع لیاپانف منفی می‌شود. بنابراین سیستم پایدار مجانبی می‌باشد.

۴. شبیه‌سازی

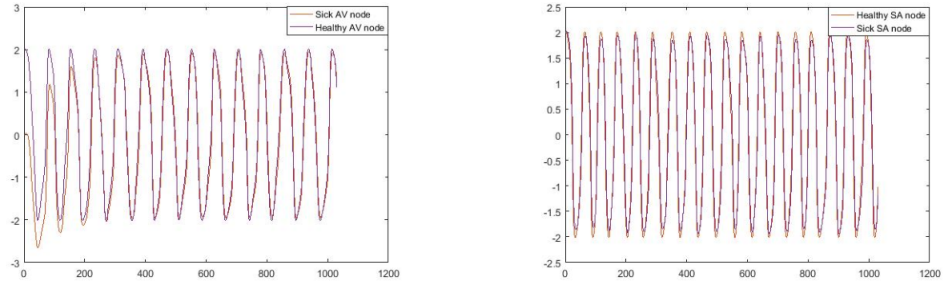
در این قسمت به شبیه‌سازی شخصی که دچار بیماری کند تپشی است، می‌پردازیم:

$$SA = \begin{cases} \dot{x}_۱(t) = x_۲(t) \\ \dot{x}_۲(t) = -(۴/۵)^۲ x_۱(t) + ۹(۱ - x_۱^۲(t))x_۲(t) + u_۱ \end{cases},$$

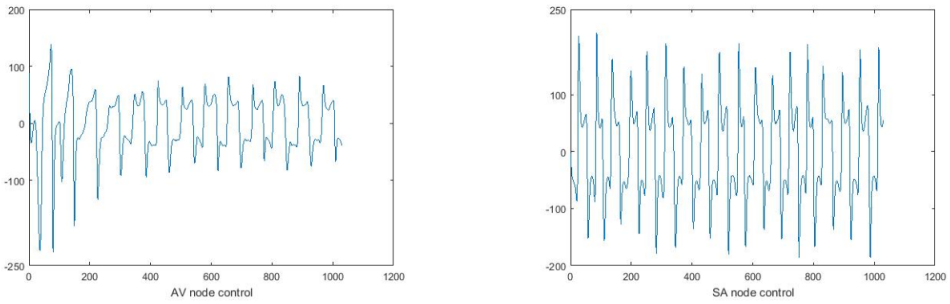
$$AV = \begin{cases} \dot{y}_۱(t) = y_۲(t) \\ \dot{y}_۲(t) = -(۳/۵)^۲ y_۱(t) + ۷(۱ - y_۱^۲(t))y_۲(t) + u_۲ \end{cases},$$

با اعمال کنترل‌کننده یا همان پیس میکر در دهلیز و بطن در شکل ۱، همان‌طور که مشاهده می‌شود ریتم قلب شخص بیمار مانند شخص سالم عمل می‌کند. ریتم کنترل‌کننده یا همان پس میکر استفاده شده در دهلیز و بطن

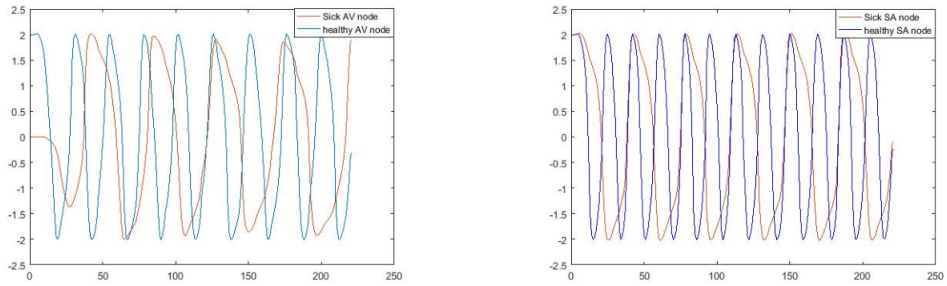
در شکل ۲ مشاهده می‌کنیم. همچنین مقایسه ریتم قلب شخص بیمار با شخص سالم بدون اعمال کنترل‌کننده در شکل ۳، همان‌طور که مشاهده می‌شود تعداد ریتم‌ها از حالت عادی کمتر می‌باشد ایجاد اختلال در قلب می‌شود.



شکل ۱. حالت همزمان‌سازی شده ریتم دهلیز-بطنی قلب.



شکل ۲. کنترل‌کننده استفاده شده در دهلیز-بطن.



شکل ۳. ریتم دهلیز-بطن در حالتی‌که از کنترل‌کننده استفاده نشده است.

۵. نتیجه‌گیری

در این بررسی، با توجه به اهمیت پیس میکرها توانستیم شرایطی برای همزمان‌سازی ریتم قلب شخصی که نارسایی قلبی دارد با استفاده پیس میکر دو حفری بر اساس معادلات وندرپل شبیه‌سازی کنیم. نتایج شبیه‌سازی نیز تاییدی

بر کارامدی این روش می‌باشد. از طرفی ضربه‌های دهلیزی و بطنی چه‌طور با هم هماهنگ بر اساس معادلات بیوشیمیایی و فعل و انفعالات یونی غشاء بسیار سیستم پیچیده‌ای می‌شود که راحت‌ترین و ساده‌ترین را از معادلات ریاضی می‌باشد که مزیت این روش می‌باشد. با توجه به ساختار شبکه عصبی بم می‌توانیم بررسی دقیق‌تری بر قلب داشت، با توجه به ساختار قلب ضربان‌سازهای دیگری علاوه بر دهلیز و بطن وجود دارد که در طراحی کنترل‌کننده، می‌توان این ضربان‌سازها را هم دخالت داد.

مراجع

۱. ف. عبدوس، سنکرون سازی اسیلاتورهای گره های SA و AV قلب از نوع وندرپل با استفاده از یک شبکه RBF بهینه سازی شده با الگوریتم ژنتیک، سومین کنفرانس ملی و اولین کنفرانس بین المللی پژوهش هایی کاربردی در مهندسی برق، مکانیک و مکاترونیک، تهران، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، ۱۳۹۴.

۲. ح. قلی زاده، ا. عازمی، و. ر. سبزواری و م. خادمی،سنکرون سازی یک زوج پیس میکر بر اساس منحنی پاسخ فاز PRC، چهاردهمین کنفرانس پزشکی ایران، تهران، انجمن مهندسی پزشکی ایران، دانشگاه شاهد، ۱۳۸۶.

۳. ن. مهرشاد، ا. ح. وثوق و م. شرفی، سنکرون سازی اسیلاتورهای گره AV, SA در قلب با استفاده از روش مد لغزشی، سومین کنفرانس مهندسی برق و الکترونیک ایران گناباد، دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد، ۱۳۹۰.

4. J. E. Hall and M. E. Hall, *Guyton and Hall textbook of medical physiology E-Book*, 14nd ed., Elsevier Health Sciences, 2020.
5. H. K. Khalil and J. W. Grizzle, *Nonlinear Systems*, Vol. 3, Prentice hall, Upper Saddle River, New Jersey, NJ, USA, 2002.
6. S. Nazari and A. Heydar, *Synchronization of a heart delay model with using CPSO algorithm in presence of unknown parameters*, J. New Res. Math. **1** (3) (2015) 69–90.
7. B. Monga and J. Moehlis, *Phase distribution control of a population of oscillators*, Phys. D: Nonlinear Phenomena **398** (2019) 115–129.

پست الکترونیکی: mohammadzadeh.zahra@birjand.ac.ir
پست الکترونیکی: azemi@psu.edu

پایداری مسألهٔ نیم‌عکس دارای شرایط مرزی وابسته به پارامتر طیفی

سید سیف‌اله موسی‌زاده*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این پژوهش، یک مسألهٔ نیم‌عکس برای عملگر استورم-لیوویل همراه با شرایط مرزی وابسته به پارامتر طیفی، روی بازهٔ $(\circ, \pi)$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. با استفاده از مقادیر ویژهٔ مسألهٔ مقدار مرزی و نسخه‌ای از قضیهٔ بورگ نشان می‌دهیم که عملگر استورم-لیوویل، روی بازهٔ $(\circ, \pi)$ یا زیربازه‌ای از آن تعیین می‌شود.

واژه‌های کلیدی: عملگر استورم-لیوویل، شرایط مرزی وابسته به پارامتر طیفی، مسألهٔ نیم‌عکس، قضیهٔ پایداری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A55, 34B24.

۱. پیش‌گفتار

نظریهٔ استورم-لیوویل و مسائل مقدار مرزی دارای شرایط مرزی وابسته به پارامتر طیفی، به دلیل کاربردهایشان در بسیاری از شاخه‌های علم از جمله ریاضیات فیزیک، مکانیک و مهندسی حائز اهمیت هستند و این‌گونه مسائل توسط محققین متعددی مورد مطالعه قرار گرفته‌اند (برای مثال، [۱، ۲، ۴، ۵] و مراجع آن‌ها را ببینید).

مسألهٔ مقدار مرزی شامل معادلهٔ استورم-لیوویل

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \qquad \circ < x < \pi, \tag{۱}$$

به همراه شرایط مرزی وابسته به پارامتر طیفی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} U(y) := hy(\circ, \lambda) - y'(\circ, \lambda) = \circ, \\ V(y) := (\alpha_۱\lambda + \alpha_۲)^{-۱}y(\pi, \lambda) - (\alpha_۳\lambda + \alpha_۴)^{-۱}y'(\pi, \lambda) = \circ, \end{cases} \tag{۲}$$

که در آن $\lambda = \eta^۲$ پارامتر طیفی، $h \neq \circ$ عددی حقیقی، $\alpha_i \in \mathbb{R}$ و $\alpha_۱\alpha_۴ - \alpha_۲\alpha_۳ < \circ$، q تابعی حقیقی مقدار و $q \in C[\circ, \pi]$.

هرگاه در مسألهٔ (۱)-(۲)، تابع $q(x)$ معلوم باشد و هدف، تعیین مقادیر ویژه و توابع ویژه باشد، مسأله از نوع مستقیم نامیده می‌شود و هرگاه مقادیر ویژه معلوم باشند و هدف، تعیین تابع $q(x)$ باشد، مسأله از نوع عکس نام دارد. در مسائل طیفی عکس، بازسازی عملگر دیفرانسیلی با استفاده از کاراکترهای طیفی آن از قبیل طیف، ثابت‌های نرمی و نقاط گره‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد. اما در مسألهٔ نیم‌عکس، هدف، تعیین عملگر دیفرانسیلی با استفاده از یک طیف و معلوم بودن تابع $q(x)$ روی نیم‌بازه است.

مسألهٔ نیم‌عکس برای مسألهٔ استورم-لیوویل فاقد پارامتر طیفی در شرایط مرزی، با شرایط متفاوت، توسط محققین متعددی مورد مطالعه قرار گرفته و قضیهٔ یکتایی برای جواب مسألهٔ عکس اثبات شده است (برای نمونه، [۶، ۷، ۸، ۹] راببینید).

در این مقاله، برخی ویژگی‌های جواب‌های اساسی، توابع مشخصه و نمایش مجانبی مقادیر ویژه بررسی می‌شود و پایداری جواب مسألهٔ نیم‌عکس را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قضیهٔ زیر که نسخه‌ای از قضیهٔ بورگ است [۳]، در دستیابی به نتیجهٔ اصلی این پژوهش، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

* سخنران

قضیه ۱.۱. مسائل مقدار مرزی $L_k^*(q)$، $k=۱,۲$، شامل معادلهٔ (۱) به همراه شرایط مرزی $y'(۰)-hy(۰)=y^{(k-۱)}(\pi)=۰$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\{\lambda_{n,۱}\}_{n\geq ۰}$ و $\{\lambda_{n,۲}\}_{n\geq ۰}$ به‌ترتیب طیف‌های $L_۱^*(q)$ و $L_۲^*(q)$ باشند. در این‌صورت برای هر $q\in C[۰,\pi]$، ثابتی مانند $\Delta>۰$ وجود دارد به‌طوری که برای هر دو دنبالهٔ حقیقی دلخواه $\{\widetilde{\lambda}_{n,k}\}_{n\geq ۰}$، $k=۱,۲$، که

$$\beta:=\Big\{\sum_{n=۰}^{\infty}(|\lambda_{n,۰}-\widetilde{\lambda}_{n,۰}|^۲+|\lambda_{n,۱}-\widetilde{\lambda}_{n,۱}|^۲)\Big\}^{\frac{۱}{۲}}<\Delta,$$

تابع یکتایی مانند $\widetilde{q}(x)\in L_۲(۰,\pi)$ وجود دارد به‌طوری که برای $k=۱,۲$، $\{\widetilde{\lambda}_{n,j}\}_{n\geq ۰}$ طیف $L_k^*(\widetilde{q})$ است. به‌علاوه،

$$||q-\widetilde{q}||_{L_۲(۰,\pi)}\leq C\beta,$$

که C فقط به $q(x)$ وابسته است.

۲. نتایج اولیه

فرض کنید $Y(x,\lambda)$ جواب معادلهٔ (۱) تحت شرایط اولیهٔ زیر باشد:

$$Y(۰,\lambda)=۱,\quad Y'(۰,\lambda)=h.$$

در این‌صورت،

$$Y(x,\lambda)=\cos\eta x+\int_۰^x K_۱(x,t)\cos\eta t dt+h\Big(\frac{\sin\eta x}{\eta}+\frac{۱}{\eta}\int_۰^x K_۲(x,t)\sin\eta t dt\Big),$$

که در آن، $\lambda=\eta^۲$ و $K_۱(x,t)$ و $K_۲(x,t)$ در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial^۲H(x,t)}{\partial x^۲}-q(x)H(x,t)=\frac{\partial^۲H(x,t)}{\partial t^۲},$$

که

$$q(x)=۲\frac{d}{dx}K_۱(x,x)=۲\frac{d}{dx}K_۲(x,x),\quad \frac{\partial K_۱(x,t)}{\partial t}|_{t=۰}=K_۲(x,۰)=۰.$$

مقادیر ویژهٔ مسالهٔ (۱)-(۲)، ریشه‌های تابع مشخصهٔ $\Delta(\lambda):=V(Y)$ هستند. اکنون $\phi(x,\lambda)$ و $\psi(x,\lambda)$ را جواب‌هایی از معادلهٔ (۱) در نظر بگیرید که در شرایط اولیهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\phi(\pi,\lambda)=۱=-\psi'(\pi,\lambda),\quad \phi'(\pi,\lambda)=۰=\psi(\pi,\lambda).$$

آن‌گاه طبق [۳]، وقتی $|\lambda|\to\infty$ داریم

$$\text{(۳)}\qquad \begin{cases}\phi(x,\lambda)=\cos\eta(\pi-x)+O\Big(\eta^{-۱}\exp(\eta(\pi-x))\Big),\\ \psi(x,\lambda)=\frac{\sin\eta(\pi-x)}{\eta}+O\Big(\eta^{-۲}\exp(\eta(\pi-x))\Big),\end{cases}$$

$$\text{(۴)}\qquad \begin{cases}\phi'(x,\lambda)=\eta\sin\eta(\pi-x)+O\Big(\exp(\eta(\pi-x))\Big),\\ \psi'(x,\lambda)=-\cos\eta(\pi-x)+O\Big(\eta^{-۱}\exp(\eta(\pi-x))\Big),\end{cases}$$

که $\eta=|Im\eta|$.
فرض کنید

$$\text{(۵)}\qquad \xi(x,\lambda)=\frac{۱}{\alpha_۳\lambda+\alpha_۴}\phi(x,\lambda)-\frac{۱}{\alpha_۱\lambda+\alpha_۲}\psi(x,\lambda).$$

با توجه به (۳)-(۵)، وقتی $|\lambda| \to \infty$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} \xi(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha_2\lambda+\alpha_4}\cos\eta(\pi-x) - \frac{1}{\alpha_1\lambda+\alpha_2}\frac{\sin\eta(\pi-x)}{\eta} + O\Big(\eta^{-3}\exp(\eta(\pi-x))\Big), \\ \xi'(x,\lambda) = \frac{1}{\alpha_{12}\lambda+\alpha_4}\eta\sin\eta(\pi-x) + \frac{1}{\alpha_1\lambda+\alpha_2}\cos\eta(\pi-x) + O\Big(\eta^{-2}\exp(\eta(\pi-x))\Big). \end{cases}$$

اکنون برای $x^* \in (0,\pi)$ ثابت و $i = 1,2$، مسائل مقدار مرزی $L_i(x^*,q)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < x^*, \\ y'(0,\lambda) = hy(0,\lambda), \;\; y^{(i-1)}(x^*,\lambda) = 0. \end{cases}$$

تابع مشخصهٔ $L_i(x^*,q)$ به شکل $\Delta_i(\lambda) := Y^{(i-1)}(x^*,\lambda)$ است. علاوه بر این،

$$\Delta_1(\lambda) = \cos\eta x^* + (v_{x^*}+h)\frac{\sin\eta x^*}{\eta} - \int_0^{x^*} F_t(x^*,t)\frac{\sin\eta t}{\eta}dt,$$

$$\Delta_2(\lambda) = -\eta\sin\eta x^* + (v_{x^*}+h)\cos\eta x^* - F_t(x^*,x^*)\frac{\sin\eta x^*}{\eta} - \int_0^{x^*} R_t(x^*,t)\frac{\sin\eta t}{\eta}dt,$$

که در آن، $v_{x^*} = \frac{1}{2}\int_0^{x^*} q(x)dx$ و

$$-F_t(x^*,t) =: v_1(t), \quad -R_t(x^*,t) =: v_2(t) \in L_2(0,x^*).$$

۳. نتایج اصلی

در این بخش، شکل مجانبی مقادیر ویژه مسائل مقدار مرزی $L_i(x^*,q)$ را ارائه می‌کنیم و پایداری جواب مسألهٔ نیم‌عکس متناظر با (۱)-(۲) را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

لم ۱.۳. مقادیر ویژهٔ $\{\rho_n^{(i)}\}$ از مسألهٔ $L_i(x^*,q)$، $i = 1,2$، دارای نمایش مجانبی زیر هستند:

$$\rho_n^{(i)} = (\frac{\pi}{x^*})^2\Big(n - \frac{i-1}{2}\Big)^2 + 2v_{x^*} + s_n, \qquad \{s_n\} \in \ell_2.$$

فرض کنید

$$\widetilde{\Delta}_1(\lambda) = \cos\eta x^* + (v_{x^*}+h)\frac{\sin\eta x^*}{\eta} + \int_0^{x^*}\frac{\sin\eta t}{\eta}\widetilde{v}_1(t)dt,$$

$$\widetilde{\Delta}_2(\lambda) = -\eta\sin\eta x^* + (v_{x^*}+h)\cos\eta x^* + \widetilde{v}_1(x^*)\frac{\sin\eta x^*}{\eta} + \int_0^{x^*}\frac{\sin\eta t}{\eta}\widetilde{v}_2(t)dt,$$

که $\widetilde{v}_1(t), \widetilde{v}_2(t) \in L_2(0,x^*)$. در این‌صورت با توجه به لم ۱.۳، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیه ۲.۳. عدد ثابت $\gamma > 0$ وجود دارد به‌طوری که اگر $\widetilde{v}_1(x)$ و $\widetilde{v}_2(x)$ در رابطهٔ زیر صدق کنند

$$\sum_{i=1}^{2}||v_i - \widetilde{v}_i||_{L_2(0,x^*)} \le \gamma,$$

آن‌گاه

$$\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}(|\rho_n^{(1)} - \widetilde{\rho}_n^{(1)}|^2 + |\rho_n^{(2)} - \widetilde{\rho}_n^{(2)}|^2)\Big\}^{\frac{1}{2}} \le \tau\sum_{i=1}^{2}||v_i - \widetilde{v}_i||_{L_2(0,x^*)},$$

که در آن τ مقداری ثابت و مستقل از $\widetilde{v}_1(x)$ و $\widetilde{v}_2(x)$ است و $\{\widetilde{\rho}_n^{(i)}\}$ دنبالهٔ ریشه‌های $\widetilde{\Delta}_i(\lambda)$ است.

اکنون فرض کنید

$$\theta_n = \Big(v\cos(\frac{\eta_n\pi}{2}) - \eta_n\sin(\frac{\eta_n\pi}{2})\Big)\xi'(\frac{\pi}{2},\lambda_n) + \Big(\lambda_n\cos(\frac{\eta_n\pi}{2}) + v\eta_n\sin(\frac{\eta_n\pi}{2})\Big)\xi(\frac{\pi}{2},\lambda_n),\quad n\geq 0,$$

$$\widetilde{\theta}_n = \Big(v\cos(\frac{\widetilde{\eta}_n\pi}{2}) - \widetilde{\eta}_n\sin(\frac{\widetilde{\eta}_n\pi}{2})\Big)\xi'(\frac{\pi}{2},\widetilde{\lambda}_n) + \Big(\widetilde{\lambda}_n\cos(\frac{\widetilde{\eta}_n\pi}{2}) + v\widetilde{\eta}_n\sin(\frac{\widetilde{\eta}_n\pi}{2})\Big)\xi(\frac{\pi}{2},\widetilde{\lambda}_n),\quad n\geq 0,$$

که $v = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} q(x)dx$.

لم ۳.۳. برای تابع حقیقی دلخواه $q_{\frac{\pi}{2}}(x)\in L_2[\frac{\pi}{2},\pi]$، ثابت $\gamma>0$ وابسته به $q(x)$ وجود دارد به‌طوری که اگر

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q_{\frac{\pi}{2}}(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} q(x)dx, \tag{۶}$$

$$\ell_1 := ||q-q_{\frac{\pi}{2}}||_{L_2(\frac{\pi}{2},\pi)} \leq \gamma,\quad \ell := \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda_n-\widetilde{\lambda}_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma, \tag{۷}$$

آن‌گاه

$$(\sum_{n=0}^{\infty}|\theta_n-\widetilde{\theta}_n|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \tau(\ell_1+\ell),$$

که در آن، ثابت τ مستقل از $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{n\geq 0}$ و $q_{\frac{\pi}{2}}(x)$ است.

از لم ۳.۳ وقضیهٔ ۱.۱، قضیهٔ زیر که نتیجهٔ اصلی این بخش است، به‌دست می‌آید.

قضیه ۴.۳. هرگاه $\{\lambda_n\}$ دنبالهٔ مقادیر ویژه مسألهٔ مقدار مرزی $L(q)$ باشد. در این‌صورت، برای هر تابع حقیقی غیرصفر $q\in L_2[0,\pi]$، ثابت $\gamma>0$ وجود دارد به‌طوری که برای هر دنبالهٔ $\{\widetilde{\lambda}_n\}_{n\geq 0}$ و تابع حقیقی $q_{\frac{\pi}{2}}(x)\in L_2[\frac{\pi}{2},\pi]$ که در رابطه‌های (۶)-(۷) صدق می‌کند، تابع یکتای $\widetilde{q}_1(x)\in L_2(0,\pi)$ وجود دارد به‌طوری که $\widetilde{q}_1(x) = q_{\frac{\pi}{2}}(x)$ تقریباً همه‌جا روی $(\frac{\pi}{2},\pi)$، و $\{\widetilde{\lambda}_n\}$ دنبالهٔ مقادیر ویژهٔ مسألهٔ $L(\widetilde{q}_1)$ است. به‌علاوه،

$$||q-\widetilde{q}_1||_{L_2(0,\frac{\pi}{2})} \leq \tau(\ell_1+\ell),$$

که در آن، ثابت τ مستقل از $\{\widetilde{\lambda}_n\}$ و $q_{\frac{\pi}{2}}(x)$ است.

سپاس‌گزاری

نویسندهٔ مقاله مراتب سپاس‌گزاری خود را از دانشگاه کاشان به خاطر حمایت مالی از این اثر در قالب پژوهانه به شمارهٔ ۹۸۵۹۶۹/۶ ابراز می‌دارد.

مراجع

۱. س. موسی‌زاده، ریشه ها، مبانی و سیر تکاملی نظریهٔ استورم-لیوویل، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی **۳۶** شماره ۶ (۱۳۹۶) ۸۷-۶۷.

2. P. A. Binding, P. J. Browne and K. Seddighi, *Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions*, Proc. Edinburgh Math. Soc. **37** (1993) 57–72.
3. G. Freiling and V. Yurko, *Inverse Sturm-Liouville Problems and their Applications*, NOVA Science Publishers, New York, 2001.
4. G. Freiling and V. A. Yurko, *Inverse problems for Sturm-Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter*, Inv. Prob. **26** (2010) 055003, 17pp.
5. N. J. Guliyev, *The regularized trace formula for the Sturm-Liouville equation with spectral parameter in the boundary conditions*, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Alad. Sci. Azerb. **22** (2005) 99–102.
6. R. O. Hryniv and Y. V. Mykytyuk, *Half-inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials*, Inv. Prob. **20** (2004) 1423–1444.
7. H. Koyunbakan and E. S. Panakhov, *Half- inverse problem for diffusion operators on the finite interval*, J. Math. Anal. Appl. **326** (2007) 1024–1030.
8. L. Sakhnovich, *Half inverse problems on the finite intervals*, Inv. Prob. **17** (2001) 527–532.
9. Y. P. Wang, *Inverse problems for a class of Sturm-Liouville operators with the mixed spectral data*, Oper. Matrices **11** (2017) 89–99.

پست الکترونیکی: s.mosazadeh@kashanu.ac.ir

سخنرانی

منطق و علوم کامپیوتر

خاصیت حذف سور در برخی نظریه‌های مرتبه اول

سمیه تاری*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده. مجموعه‌های تعریف‌پذیر در مدل‌های نظریه‌های دارای خاصیت حذف سور خوش‌رفتار هستند و مطالعه آن‌ها دارای نتایج جالب توجه است. نظریه ترتیب‌های خطی چگال بدون ابتدا و انتها و نظریه گروه‌های آبلی مرتب، خاصیت حذف سور را دارند. در این مقاله خاصیت حذف سور در توسیع نظریه ترتیب‌های خطی چگال بدون ابتدا و انتها و نظریه گروه‌های آبلی تقسیم‌پذیر مرتب، توسط یک خانواده از محمول‌ها بررسی می‌شود.
واژه‌های کلیدی: نظریه مرتبه اول، خاصیت حذف سور.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 03C10.

۱. پیش‌گفتار

در نظریه مدل، ساختارهای ریاضی توسط فرمول‌ها و جملات بررسی و مطالعه می‌شوند. هر مجموعه از جملات یک نظریه است. به‌عنوان مثال جملات زیر نظریه ترتیب‌های خطی چگال بدون ابتدا و انتها را در زبان $\mathcal{L} = \{<\}$ مشخص می‌کنند که با نماد DLO نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\forall x \quad \neg(x < x),\\
&\forall x \forall y \forall z \quad ((x < y \wedge y < z) \to x < z),\\
&\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x),\\
&\forall x \forall y \quad (x < y \to \exists z (x < z < y)),\\
&\forall x \exists y \exists z \quad (y < x < z).
\end{aligned}$$

واضح است که اگر $(M, <)$ یک ساختار باشد که تمامی جملات بالا در آن درست باشند، آن‌گاه M یک مجموعه مرتب خطی چگال بدون ابتدا و انتها است. هر فرمول $\phi(x, y)$، هم‌ارز منطقی با ترکیبات بولی متناهی از فرمول‌هایی به صورت $x < y$ است. در اصطلاح نظریه DLO دارای خاصیت حذف سور است [۱].

مجموعه جملات زیر در زبان $\mathcal{L} = \{+, \circ\}$، نظریه گروه‌های آبلی را مشخص می‌کنند که با نماد AG نشان داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\forall x \quad x + 0 = 0 + x = x,\\
&\forall x \forall y \forall z \quad (x + y) + z = x + (y + z),\\
&\forall x \exists y \quad x + y = y + x = 0,\\
&\forall x \forall y \quad x + y = y + x.
\end{aligned}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$، فرض کنید $\sigma_n = \forall x \exists y \quad (ny = \overbrace{y + \cdots + y}^{n-times} = x)$. در این‌صورت مجموعه $AG \cup \{\sigma_n : \quad n > \circ\}$، نظریه گروه‌های آبلی بخش‌پذیر را مشخص می‌کند که با نماد DAG نمایش داده می‌شود. نظریه DAG خاصیت حذف سور را دارد [۱].

اگر $\mathcal{L} = \{+, \circ, <\}$ زبان گروه‌های مرتب باشد، آن‌گاه

$$DAG \cup \{\forall x \forall y \forall z, \quad (x < y \to x + z < y + z)\},$$

نظریه گروه‌های آبلی بخش‌پذیر مرتب را مشخص می‌کند که با نماد ODAG نشان داده می‌شود. نظریه ODAG خاصیت حذف سور را دارد [۱].

وجود خاصیت حذف سور، در توسیع نظریه‌های مرتبه اول شناخته شده دارای خاصیت فوق، همواره مورد توجه بوده است. در این مقاله، نشان داده می‌شود که در برخی نظریه‌ها مانند توسیع نظریه DLO توسط محمول‌های که به

* سخنران

مجموعه محدب از پایین بی‌کران تعبیر می‌شوند، خاصیت فوق حفظ می‌شود؛ در حالی‌که در توسیع نظریه ODAG خاصیت فوق حفظ نمی‌شود.

در ادامه این بخش، برخی تعاریف مقدماتی مورد نیاز در بخش بعدی آورده می‌شود [۱]. زبان و ساختار دو مفهوم اصلی و کلیدی در نظریه مدل هستند.

تعریف ۱.۱. سه تایی $\mathcal{L} = (\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ از مجموعه نمادهای تابعی $\mathcal{F}$، مجموعه نمادهای محمولی $\mathcal{R}$ و نمادهای ثابت $\mathcal{C}$، یک زبان مرتبه اول نامیده می‌شود.

به‌طور شهودی یک فرمول دنباله متناهی از نمادهای موجود در زبان $\mathcal{L}$، متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$، نماد تساوی $=$، نمادهای رابط جمله‌ای $\neg, \wedge$، سور وجودی $\exists$ و نمادهای پرانتز است. تعریف دقیق فرمول‌ها به‌صورت استقرایی است که در ابتدا ترم‌ها تعریف می‌شوند و از آن‌ها در تعریف فرمول‌ها استفاده می‌شود.

تعریف ۲.۱. مجموعه ترم‌ها $\mathcal{T}$، کوچکترین مجموعه‌ای است که شامل متغیرها و نمادهای ثابت است و تحت نمادهای تابعی بسته است.

یک $\mathcal{L}-$فرمول اتمی یا به‌صورت $t_1 = t_2$ و یا به‌صورت $R(t_1, \ldots, t_n)$ است که در آن‌ها $t_1, \ldots, t_n$ ترم و R یک نماد محمولی در زبان $\mathcal{L}$ است.

تعریف ۳.۱. مجموعه $\mathcal{L}-$فرمول‌ها کوچکترین مجموعه‌ای است که در دو شرط زیر صدق می‌کند:
الف) هر فرمول اتمی، یک فرمول است.
ب) اگر ϕ و ψ دو فرمول باشند، آنگاه $\neg\phi$، $\phi \wedge \psi$ و $\exists x\phi$ نیز فرمول هستند.

اگر متغیر x در فرمول ϕ ظاهر شده باشد و توسط هیچ سوری بسته نشده باشد، آنگاه x یک متغیر آزاد در فرمول ϕ است. یک فرمول بدون متغیر آزاد یک جمله است. هر مجموعه از جملات یک نظریه است. هم‌چنین فرمولی که سور وجودی در آن ظاهر نشده باشد، یک فرمول خالی از سور است.
درکنار مفهوم زبان، از مفهوم ساختار در نظریه مدل استفاده می‌شود. در واقع این دو مفهوم، مکمل هم می‌باشند.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\mathcal{L} = \{\mathcal{F}, \mathcal{R}, \mathcal{C}\}$ یک زبان مرتبه اول باشد. یک $\mathcal{L}-$ساختار $\mathcal{M}$ عبارت است از:
* یک مجموعه غیرخالی M به نام جهان ساختار،
* به‌ازای هر نماد تابعی $f \in \mathcal{F}$، تعبیر $f^{\mathcal{M}}$ که یک تابع است،
* به‌ازای هر محمولی $R \in \mathcal{R}$، تعبیر $R^{\mathcal{M}}$ که یک رابطه در M است،
* به‌ازای هر نماد ثابت $c \in \mathcal{C}$، تعبیر $c^{\mathcal{M}}$ که یک عضو از M است.
هر $\mathcal{L}-$ساختار $\mathcal{M}$ به‌صورت $(M, f^{\mathcal{M}}, R^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}})$ نشان داده می‌شود.

هر ترم و هر فرمول را می‌توان در هر ساختار تعبیر کرد. بنابراین درست بودن یک فرمول به‌ازای مقادیری از جهان ساختار را می‌توان بررسی نمود.

تعریف ۵.۱. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}-$ساختار و t یک ترم با متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ باشد. تعبیر ترم $t^{\mathcal{M}}$ به‌ازای $(a_1, \ldots, a_n) \in M^n$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
* اگر t متغیر v_j باشد، آنگاه $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = a_j$.
* اگر t نماد ثابت c باشد، آنگاه $t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = c^{\mathcal{M}}$.
* اگر $t = f(t_1, \ldots, t_m)$ باشد، آنگاه

$$t^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{M}}(a_1, \ldots, a_n)).$$

تعریف ۶.۱. فرض کنید $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}-$ساختار، $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ یک فرمول و $\overline{a} \in M^n$. در این‌صورت درستی فرمول $\phi(x_1, \ldots, x_n)$، به‌ازای $\overline{a}$ در ساختار $\mathcal{M}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود که با نماد $\mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$ نشان داده می‌شود:
* اگر $\phi(\overline{x})$ فرمول اتمی $t_1(\overline{x}) = t_2(\overline{x})$ باشد و $t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}) = t_2^{\mathcal{M}}(\overline{a})$، آنگاه $\mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$.
* اگر $\phi(\overline{x}) = R(\overline{x})$ و $(t_1^{\mathcal{M}}(\overline{a}), \ldots, t_n^{\mathcal{M}}(\overline{a})) \in R^{\mathcal{M}}$، آنگاه $\mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$.

* اگر $\phi(\overline{x}) = \neg\psi(\overline{x})$، آنگاه $\mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$ اگر و تنها اگر $\mathcal{M} \not\models \psi(\overline{a})$.
* اگر $\phi(\overline{x}) = \psi(\overline{x}) \wedge \theta(\overline{x})$، $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a})$ و $\mathcal{M} \models \theta(\overline{a})$، آنگاه $\mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$.
* اگر $\phi(\overline{x}) = \exists y\psi(\overline{x}, y)$ و $b \in M$ موجود باشد که $\mathcal{M} \models \psi(\overline{a}, b)$، آنگاه $\mathcal{M} \models \phi(\overline{a})$.

در ادامه چند تعریف در مورد نظریه‌ها بیان می‌شود.

تعریف ۱.۷. فرض کنید $\mathcal{L}$ یک زبان مرتبه اول، $\mathcal{M}$ یک $\mathcal{L}-$ساختار و T یک نظریه باشد.
* $\mathcal{M}$ یک مدل برای نظریه T است هرگاه $\mathcal{M} \models \sigma$ به‌ازای هر جمله $\sigma \in T$.
* نظریه T یک نظریه کامل است هرگاه به‌ازای هر جمله σ، $\sigma \in T$ یا $\neg\sigma \in T$.
* نظریه T دارای خاصیت حذف سور است هرگاه به‌ازای هر فرمول $\phi(\overline{x})$، فرمول خالی از سور $\psi(\overline{x})$ موجود باشد به‌طوری که $T \models \phi(\overline{x}) \Leftrightarrow \psi(\overline{x})$.
* نظریه کامل $\mathcal{M}$ با نماد $Th(\mathcal{M})$ نمایش داده می‌شود و عبارتست از مجموعه تمام جملات درست در ساختار $\mathcal{M}$.

در جهت اثبات خاصیت حذف سور روش‌های مختلفی وجود دارد. اگر بین مدل‌های دلخواه یک نظریه، یک سیستم پس و پیش وجود داشته باشد، آنگاه طبق قضایای معروف در نظریه مدل، نظریه مورد نظر دارای خاصیت حذف سور خواهد بود که در این مقاله از این روش استفاده شده است.

۲. نتایج اصلی

همان‌طور که قبلاً اشاره شده است نظریه DLO در زبان $\mathcal{L} = \{\leq\}$ دارای خاصیت حذف سور است. فرض کنید I یک مجموعه دلخواه و $\{R_i : \ i \in I, R_i$ یک محمول است$\}$ $\mathcal{L}_1 = \{\leq, R_i : \ i \in I, R_i$ یک محمول است$\}$. هم‌چنین $\mathcal{L}_1-$نظریه T را به‌صورت زیر در نظر بگیرید:
* $DLO \subset T$،
* T یک نظریه کامل است.
* $\mathcal{M} \models T$ اگر و تنها اگر به‌ازای هر $i \in I$، تعبیر محمول R_i، $R_i^{\mathcal{M}}$، یک مجموعه محدب از پایین بیکران باشد.

در ادامه با استفاده از روش پس و پیش ثابت می‌شود که نظریه T دارای خاصیت حذف سور است. همچنین نشان داده می‌شود که نتیجه مشابه برای نظریه ODAG برقرار نیست.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{M} = (M, \leq)$ یک مدل $\omega-$اشباع از DLO و $\{C_i : \ i \in I\}$ یک خانواده از مجموعه‌های محدب از پایین بی‌کران باشد، آنگاه نظریه $Th(\mathcal{M}_1)$ دارای خاصیت حذف سور است که در آن $\mathcal{M}_1 = (M, \leq, R_i^{\mathcal{M}_1} = C_i : \ i \in I)$.

اثبات. فرض کنید $A = \{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq M$ و $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq M$ که یک یک‌ریختی جزئی مانند $f : A \to B$ موجود است. هم‌چنین فرض کنید $c \in M$. در این‌صورت در ادامه نشان داده می‌شود که $d \in M$ و ایزومورفیسم جزئی $g : A \cup \{c\} \to B \cup \{d\}$ به‌عنوان توسیعی از f موجود است.

برای c سه حالت $A < c$، $A > c$ و $a_i < c < a_{i+1}$ به‌ازای $1 \leq i \leq n$، موجود است. برای حالت $A < c$ برقراری ادعا ثابت می‌شود. بقیه حالت‌ها به‌طور مشابه ثابت می‌شوند.

اگر $A < c$، آنگاه $p(v) = \{v < \sup C_i : c < \sup C_i\} \cup \{v > \sup C_i : c > \sup C_i\} \cup \{a_1 < v, \ldots, a_n < v\}$ یک برش در M است که توسط c تحقق می‌یابد. اکنون برش زیر را در نظر بگیرید:

$$q(v) = \{v < \sup C_i : c < \sup C_i\} \cup \{v > \sup C_i : c > \sup C_i\} \cup \{b_1 < v, \ldots, b_n < v\},$$

بنابراین $d \in M$ موجود است که برش $q(v)$ در M توسط آن تحقق می‌یابد. بنابراین $f \cup \{(c, d)\}$ یک‌ریختی جزئی مورد نظر است.

اکنون فرض کنید $\mathcal{N}_1 \models Th(\mathcal{M}_1)$ و $\mathcal{N}_2 \models Th(\mathcal{M}_1)$ دو مدل دلخواه باشند. در این‌صورت با استفاده از استقرا و مطلب ثابت شده در ابتدای قضیه می توان ثابت کرد که یک سیستم پس و پیش از ایزومرفیسم‌های جزئی بین $\mathcal{N}_1$ و $\mathcal{N}_2$ موجود است (کافی است در شروع $\emptyset$ را به‌عنوان ایزومورفیسم جزئی در نظر بگیریم). پس $Th(\mathcal{M}_1)$ دارای خاصیت حذف سور است. □

نتیجه ۲.۲. نظریه T دارای خاصیت حذف سور است.

نتیجه ۲.۲ سئوالی را به‌صورت زیر ایجاد می‌کند:
«اگر T یک نظریه کامل توسیعی از OADG با خاصیت حذف سور باشد، آیا در هر توسیعی از T با محمول‌های از پایین بی‌کران نیز خاصیت حذف سور برقرار است؟» با استفاده از مثال زیر نشان داده می‌شود که مطلب فوق در حالت کلی درست نیست. در این‌جا از مفاهیم ساختارهای ت-کمینه ضعیف ارزیابی و غیرارزیابی استفاده می‌شود [۳] .

تعریف ۳.۲. فرض کنید $\mathcal{M} = (M, \leq, \ldots)$ بسطی از یک ترتیب خطی چگال بدون ابتدا و انتها باشد. $\mathcal{M}$ را یک ساختار ت-کمینه ضعیف گوییم هرگاه هر مجموعه تعریف‌پذیر $X \subseteq M$، به‌صورت اجتماعی متناهی از بازه‌های باز و نقاط باشد.

فرض کنید $\mathcal{M}$ یک ساختار ت- کمینه ضعیف و $C \subseteq M$ یک مجموعه تعریف‌پذیر از پایین بی‌کران باشد. در این‌صورت C را غیرارزیابی گوییم هرگاه $\inf(M \setminus C) - C = 0$. ساختار $\mathcal{M}$ را غیرارزیابی گوییم هرگاه هر مجموعه تعریف‌پذیر از پایین بی‌کران آن، غیر ارزیابی باشد. ساختاری که غیرارزیابی نباشد را ارزیابی گوییم. لازم به توضیح است که غیرارزیابی بودن یک ساختار تحت هم ارزی مقدماتی حفظ می‌شود.

مثال ۴.۲. (مثال از منبع [۲]) فرض کنید $\mathcal{M} = (\mathbb{Q}^3, \leq, +)$ یک ساختار مرتبه اول باشد که در آن $\leq$ همان ترتیب الفبایی و $+$ همان جمع مؤلفه به مؤلفه است. در این‌صورت $(\mathbb{Q}^3, \leq, +) \equiv (\mathbb{Q}, \leq, +)$. بنابراین نظریه $Th(\mathbb{Q}, \leq, +)$ همان نظریه ODAG است. اکنون فرض کنید $C = \{\overline{x} \in \mathbb{Q}^3 : \overline{x} < (1, 1, \pi)\}$. در این‌صورت $(\mathbb{Q}^3, \leq, +, R_C = C)$ یک ساختار ت- کمینه ضعیف غیرارزیابی است که دارای زیر ساختارهای ارزیابی است. پس $Th(\mathbb{Q}^3, \leq, +, R_C = C)$ دارای خاصیت حذف سور نیست.

لازم به توضیح است که با توجه به مثال ۴.۲، نتیجه مشابهی با نتیجه ۲.۲ برای نظریه ODAG برقرار نیست.

مراجع

1. D. Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 2002.
2. M. C. Laskowski and C. S. Show, *Definable choice for a class of weakly o-minimal theories*, Arch. Math. Logic **55** (2016) 735–748.
3. R. Wencel, *Weakly o-minimal nonvaluational structures,* Ann. Pure Appl. Logic **154** (3) (2008) 139–162.

پست الکترونیکی: s_tari@azaruniv.ac.ir

سخنرانی‌ها

هندسه و توپولوژی

گروه پولیا در توسیع‌های دووجهی از $\mathbb{Q}$

عباس معارف‌پرور
پژوهشکده ریاضیات، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران
و علی رجایی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران

چکیده. برای یک میدان اعداد K، گروه پولیای $Po(K)$ زیرگروهی از گروه رده ایده‌آلی K، تولید شده توسط رده‌های حاصلضرب ایده‌آل‌های ماکسیمال با نُرم برابر است و K را میدان پولیا می‌نامند هرگاه $Po(K)$ بدیهی فرض شود. در این مقاله، گروه پولیای توسیع‌های دووجهی L از $\mathbb{Q}$ از درجه‌ی 2ℓ، برای عدد اول فرد ℓ، را محاسبه می‌کنیم و ارتباط این گروه با گروه‌های پولیای زیرمیدان‌های L را مشخص می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: گروه پولیا، میدان پولیا، توسیع های دووجهی، نظریه میدان رده‌ای.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11R21, 11R29, 11R37.

نمادگذاری

برای یک میدان اعداد K از نمادهای $\mathcal{O}_K$، $P(K)$، $I(K)$، $Cl(K)$، $h(K)$، U_K و D_K به ترتیب برای نمایش حلقه اعداد صحیح جبری، گروه ایده‌آل‌های کسری اصلی، گروه ایده‌آل‌های کسری، گروه رده‌ی ایده‌آلی، عدد رده‌ای، گروه یکه‌ها و مبین K (روی $\mathbb{Q}$) استفاده می‌شود. همچنین برای یک توسیع متناهی M/N از میدان‌های اعداد از نمادهای $\epsilon_{M/N}$ و $\mathcal{N}_{M/N}$ به ترتیب برای نمایش همریختی‌های $\mathcal{N}_{M/N} : [I] \in Cl(M) \to [Nm_{M/N}(I)] \in$ و $\epsilon_{M/N} : [\mathfrak{a}] \in Cl(N) \to [\mathfrak{a}.\mathcal{O}_M] \in Cl(M)$ $Cl(N)$ استفاده می‌شود، که در آن $Nm_{M/N}$ همریختی نُرم ایده‌آلی از M روی N است.

۱. پیش‌گفتار

مفهوم میدان‌های پولیا به مطالعه جورج پولیا [۱۱] روی چندجمله‌ای‌های صحیح-مقدار بازمی‌گردد. برای یک میدان اعداد K با حلقه‌ی اعداد صحیح جبری $\mathcal{O}_K$، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های صحیح-مقدار روی $\mathcal{O}_K$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Int(\mathcal{O}_K) = \{f \in K[x] \mid f(\mathcal{O}_K) \subseteq \mathcal{O}_K\}.$$

می‌توان نشان داد که $Int(\mathcal{O}_K)$ یک $\mathcal{O}_K$-مدول آزاد است [۱۳، بخش ۲]، اما ممکن است محاسبه یک پایه برای آن به آسانی امکان‌پذیر نباشد. در واقع موضوع پیدایش میدان‌های پولیا مبتنی بر این چالش است که آیا می‌توان یک $\mathcal{O}_K$-پایه $\{f_n\}_{n\geq 0}$ برای $Int(\mathcal{O}_K)$ پیدا کرد به‌طوری‌که برای هر n، $deg(f_n) = n$ شود؟ چنین پایه‌ای را در صورت وجود یک پایه‌ی منظم می‌نامند.

برای یک عدد صحیح نامنفی n، زیرمجموعه‌ای از K متشکل از همه ضرائب پیشروی چندجمله‌ای‌های صحیح-مقدار روی $\mathcal{O}_K$ از درجه‌ی n به همراه صفر را با نماد $\mathfrak{J}_n(K)$ در نظر می‌گیریم. می‌توان نشان داد که $\mathfrak{J}_n(K) \subseteq (n!)^{-1}\mathcal{O}_K$ (یعنی $\mathfrak{J}_n(K)$ یک ایده‌آل کسری از K است) و پولیا [۱۱] ثابت کرد $Int(\mathcal{O}_K)$ دارای یک پایه‌ی منظم است اگر و تنها اگر $\mathfrak{J}_n(K)$ها ایده‌آل‌های اصلی هستند. در همان سال، استروسکی [۱۰] در مقاله‌ای با عنوان مشابه با مقاله‌ی پولیا، نشان داد که $Int(\mathcal{O}_K)$ دارای یک پایه منظم است اگر و تنها اگر،

* سخنران

به ازای هر عدد صحیح $q \geq ۲$، ایده‌آل

$$\Pi_q(K) =: \prod_{\substack{\mathfrak{m}\in Max(\mathcal{O}_K)\\ Nm_{K/\mathbb{Q}}(\mathfrak{m})=q}} \mathfrak{m},$$

یک ایده‌آل اصلی فرض شود (اگر هیچ ایده‌آلی از نُرم q وجود نداشته باشد بنا به قرارداد $\Pi_q(K) = \mathcal{O}_K$).

تعریف ۱.۱. [۱، تعریف ۲.۳.۸] گروه پولیا از یک میدان اعداد K، زیرگروه $Po(K)$ از $Cl(K)$ تولید شده توسط رده‌ی ایده‌آل‌های $\mathfrak{J}_n(K)$ است. به‌طور معادل، می‌توان نشان داد که $Po(K)$ تولید شده توسط رده‌ی ایده‌آل‌های $\Pi_q(K)$ است.

گزاره ۲.۱. [۷، گزاره ۱.۲] برای یک میدان اعداد K، عبارات زیر معادل هستند.

(الف) $Int(\mathcal{O}_K)$ دارای یک پایه منظم است.

(ب) به ازای هر عدد صحیح نامنفی n، ایده‌آل $\mathfrak{J}_n(K)$ یک ایده‌آل اصلی است.

(ج) به ازای هر عدد صحیح $q \geq ۲$، ایده‌آل $\Pi_q(K)$ یک ایده‌آل اصلی است.

(د) $Po(K) = \{۱\}$.

اثبات. خواننده را به اثبات قضیه ۲.۳ از مرجع [۱۳] ارجاع می‌دهیم. □

تعریف ۳.۱. [۱۳، تعریف ۲.۴] یک میدان اعداد K پولیا نامیده می‌شود، هرگاه K در شرایط معادل گزاره (۲.۱) صدق کند.

نکته ۴.۱. توجه شود که اگر $K/\mathbb{Q}$ گالوایی باشد، آن‌گاه برای بررسی پولیا بودن K کافی است که فقط اصلی بودن ایده‌آل‌های $\Pi_{p^f}(K)$، برای اعداد اول شاخیده شده p و عدد صحیح نامنفی f، بررسی شوند [۱۳، بخش ۱].

اکنون فرض کنیم $K/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوایی با گروه گالوای G است. در این حالت می‌توان نشان داد که مجموعه ایده‌آل‌های استروسکی $\Pi_q(K)$، یک مجموعه از مولدهای آزاد برای ایده‌آل‌های مبهم $I(K)^G$ هستند [۱۳، بخش ۲]. بنابراین برای یک میدان اعداد گالوایی K داریم $Po(K) = I(K)^G/P(K)^G$. برای میدان‌های اعداد مربعی، هیلبرت ثابت کرد:

قضیه ۵.۱. [۳، قضیه‌ی ۱۰۶] فرض کنیم K یک میدان اعداد مربعی است و تعداد اعداد اول شاخیده شده در K را با نماد s_K در نظر می‌گیریم. اگر K حقیقی و دارای یکه‌ی اساسی با نُرم مثبت باشد، آن‌گاه $\#Po(K) = ۲^{s_K-۲}$؛ در غیر این‌صورت $\#Po(K) = ۲^{s_K-۱}$.

زنتما با استفاده از کوهمولوژی گالوا، قضیه‌ی فوق را به صورت زیر تعمیم داد:

گزاره ۶.۱. [۱۳، بخش ۳] فرض کنیم $K/\mathbb{Q}$ یک توسیع گالوایی با گروه گالوای G است. برای یک عدد اول p، اندیس شاخیدگی p در K را با نماد e_p در نظر می‌گیریم. در این‌صورت یک دنباله دقیق به شکل زیر وجود دارد:

$$\{۰\} \longrightarrow H^{۱}(G, U_K) \longrightarrow \bigoplus_{p \text{ اول}} \mathbb{Z}/e_p\mathbb{Z} \longrightarrow Po(K) \longrightarrow \{۰\}. \quad (۱)$$

برای آشنایی بیشتر با مفاهیم و نتایج موجود در زمینه گروه و میدان پولیا، خواننده را به مراجع [۱، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۳] ارجاع می‌دهیم.

۲. نتایج اصلی

در سرتاسر این بخش، ℓ یک عدد اول فرد، K یک میدان اعداد ناگالوایی از درجه‌ی ℓ، L بستار گالوایی K (روی $\mathbb{Q}$) با $Gal(L/\mathbb{Q}) \simeq D_\ell$ (گروه دووجهی از مرتبه‌ی 2ℓ) و E زیرمیدان مربعی منحصربفرد از L خواهد بود.
فرض کنیم p یک عدد اول شاخیده شده در L با فرم تجزیه‌ی $p\mathcal{O}_L = (\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_g)^{e(p)}$ است و درجه رده باقیمانده از γ_i ها روی p را با نماد $f(p)$ در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که $[L:\mathbb{Q}] = 2\ell$، داریم $e(p)f(p)g = [L:\mathbb{Q}] = 2\ell$. با در نظر گرفتن این نمادها، فرم تجزیه p در K و L به‌صورت زیر مشخص می‌شود:

گزاره ۱.۲. [۲، گزاره‌ی ۱۰.۱.۲۶] با نمادگذاری‌های بالا داریم:

(الف) اگر $e(p) = 2$، آن‌گاه $f(p) = 1$. همچنین اگر $p\mathcal{O}_L = \gamma_1^2\gamma_2^2\dots\gamma_\ell^2$ تجزیه p در L باشد، آن‌گاه تجزیه p در K به‌صورت زیر است:

$$p\mathcal{O}_K = \beta_1\beta_2^2\dots\beta_{\frac{\ell+1}{2}}^2. \qquad (2)$$

(ب) اگر $\ell | e(p)$، آن‌گاه p در K تماماً شاخیده می‌شود. همچنین اگر $e(p) = 2\ell$، آن‌گاه $p = \ell$.

پولیا بودن توسیع‌های گالوایی غیردوری درجه شش از $\mathbb{Q}$ در مرجع [۸] بررسی شده است. در این مقاله، با استفاده از گزاره‌ی فوق، نتایج [۸] را به توسیع‌های دووجهی اول دلخواه از $\mathbb{Q}$ تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۲.۲. برای میدان‌های اعداد E، K و L که در این بخش معرفی شده‌اند، یک دنباله‌ی دقیق به صورت زیر وجود دارد:

$$\{\circ\} \longrightarrow Po(E) \longrightarrow Po(L) \longrightarrow Po(K).$$

علاوه بر این، ۲-زیرگروه تاب‌دار از $Po(L)$ با $Po(E)$ یکریخت است و ℓ-زیرگروه تاب‌دار از $Po(L)$ در $Po(K)$ نشانده می‌شود. به ویژه اگر $\ell \nmid h(K)$، آن‌گاه $Po(E) \simeq Po(L)$.

اثبات. ما در این‌جا فقط طرح کلی اثبات را ارئه می‌دهیم و برای جزییات بیشتر خواننده را به [۹] ارجاع می‌دهیم.
ابتدا توجه شود که، با استفاده از دنباله‌ی دقیق زنتما یا همان دنباله (۱)، $Po(L)$ یک 2ℓ- گروه است. همچنین $Po(L) \simeq Po(L)_2 \bigoplus Po(L)_\ell$ که در آن $Po(L)_2$ و $Po(L)_\ell$ به ترتیب ۲-زیرگروه و ℓ-زیرگروه تاب‌دار از $Po(L)$ هستند.
می‌توان نشان داد که $\epsilon_{L/E}|_{Po(E)} : Po(E) \to Po(L)_2$ یکریختی با وارون $\mathcal{N}_{L/E}|_{Po(L)_2} : Po(L)_2 \to Po(E)$ است. بنابراین $Po(E) \simeq Po(L)_2$ و دنباله دقیق زیر حاصل می‌شود:

$$\{\circ\} \longrightarrow Po(E) \xrightarrow{\epsilon_{L/E}} Po(L) \xrightarrow{\pi_\ell} Po(L)_\ell \longrightarrow \{\circ\},$$

که در آن $\pi_\ell : Po(L) \to Po(L)_\ell$ نگاشت تصویر (یعنی ضرب در ۲) است.
در مرحله آخر اثبات، با استفاده از گزاره (۱.۲) نشان می‌دهیم که $\mathcal{N}_{L/K}(\pi_\ell(Po(L))) \subseteq Po(K)$ و $\mathcal{N}_{L/K}|_{Po(L)_\ell}$ نگاشتی یک‌به‌یک است. بنابراین دنباله زیر دقیق است:

$$\{\circ\} \longrightarrow Po(E) \xrightarrow{\epsilon_{L/E}} Po(L) \xrightarrow{\varphi} Po(K),$$

که در آن $\varphi := \mathcal{N}_{L/K}|_{Po(L)_\ell} \circ \pi_\ell$. □

نتیجه ۳.۲. اگر L/E یک توسیع ناشاخیده باشد، آن‌گاه $Po(E) \simeq Po(L)$.

اثبات. **(طرح کلی)** نشان می‌دهیم که اگر L/E ناشاخیده باشد، آن‌گاه هر عدد اول شاخیده شده p در $L/\mathbb{Q}$ دارای اندیس شاخیدگی $e(p) = 2$ است. درواقع اگر $\ell | e(p)$، آن‌گاه L/E ناشاخیده نیست [۹]. □

اگر L/E ناشاخیده باشد، با استفاده از نظریه میدان رده‌ای، $h(E)$ بر ℓ بخش‌پذیر است. در ادامه، مشابه با [۸، گزاره ۲.۱۲]، شرط لازم و کافی برای این‌که عدد رده‌ای یک میدان مربعی بر ℓ بخش‌پذیر باشد را ارائه می‌دهیم که برای اثبات آن می‌توانید به [۹] رجوع کنید.

لم ۴.۲. برای یک میدان مربعی N، اگر $\ell | h(N)$ آن‌گاه یک D_ℓ-توسیع M از $\mathbb{Q}$ وجود دارد به‌طوری‌که $N \subset M$ و M/N ناشاخیده است. برعکس، برای یک D_ℓ-توسیع M از $\mathbb{Q}$ که میدان شکافنده چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر

$$f(X) = X^\ell + a_۲X^{\ell-۲} + a_۳X^{\ell-۳} + \cdots + a_{\ell-۱}X + a_\ell, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

(روی $\mathbb{Q}$) است، اگر $\gcd(a_۲, a_۳, \ldots, a_{\ell-۱}, \ell.a_\ell) = ۱$ آن‌گاه عدد رده‌ای زیرمیدان مربعی از M بر ℓ بخش‌پذیر است.

با ترکیب نتیجه (۳.۲) و لم (۴.۲)، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۵.۲. فرض کنیم L یک D_ℓ-توسیع از $\mathbb{Q}$ با زیرمیدان مربعی E است. همچنین، فرض کنیم L میدان شکافنده چندجمله‌ای تحویل‌ناپذیر

$$f(X) = X^\ell + a_۲X^{\ell-۲} + a_۳X^{\ell-۳} + \cdots + a_{\ell-۱}X + a_\ell, \quad a_i \in \mathbb{Z}$$

(روی $\mathbb{Q}$) است. اگر $\gcd(a_۲, a_۳, \ldots, a_{\ell-۱}, \ell.a_\ell) = ۱$، آن‌گاه $Po(E) \simeq Po(L)$.

برای روشن شدن بهتر موضوع، مناسب است که مثال‌هایی نیز ارائه دهیم. برای یافتن $D_۵$-توسیع‌ها از $\mathbb{Q}$، چندجمله‌ای‌های مولد برومر [۴، فصل اول] را مورد استفاده قرار می‌دهیم.

گزاره ۶.۲. [۴، قضیه ۲.۳.۵] برای یک میدان M با مشخصه غیر از ۲، چندجمله‌ای

$$f(s,t,X) = X^۵ + (t-۳)X^۴ + (s-t+۳)X^۳ + (t^۲ - t - ۲s - ۱)X^۲ + sX + t,$$

در $M(s,t)[X]$ یک چندجمله‌ای مولد برای $D_۵$-توسیع‌ها روی M است. علاوه بر این، زیرمیدان مربعی از میدان شکافنده $f(s,t,X)$ با الحاق ریشه دوم

$$-(۴t^۵ - ۴t^۴ - ۲۴st^۳ - ۴۰t^۳ - s^۲t^۲ + ۳۴st^۲ + ۹۱t^۲ + ۳۰s^۲t + ۱۴st - ۴t - s^۲ + ۴s^۳),$$

به $M(s,t)$ به‌دست می‌آید.

مثال ۷.۲. نمادگذاری‌های گزاره (۶.۲) را در نظر می‌گیریم.

(الف) قرار دهید $s = ۵$، $t = ۱$ و $K = \mathbb{Q}(\theta)$ که در آن θ یک ریشه از چندجمله‌ای

$$f(X) = X^۵ - ۲X^۴ + ۷X^۳ - ۱۱X^۲ + ۵X + ۱,$$

است. با استفاده از نرم‌افزار $PARI$ [۱۲] داریم $D_K = ۱۳۶۷^۲$ و بستار گالوایی L از K یک $D_۵$-توسیع از $\mathbb{Q}$ است. بنابر گزاره (۶.۲)، $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-۱۳۶۷})$ زیرمیدان مربعی منحصربفرد از L است و با استفاده از قضیه (۵.۱)، E یک میدان پولیاست. از آن‌جا که $h(K) = ۴$، بنابر قضیه (۲.۲)، L یک $D_۵$-توسیع پولیا از $\mathbb{Q}$ است. توجه شود که، بنابر [۱۳، قضیه ۶.۹]، K پولیا نیست.

(ب) برای $s = -۵$ و $t = ۳$، میدان شکافنده چندجمله‌ای $f(X) = X^۵ - ۵X^۳ + ۱۵X^۲ - ۵X + ۳$ روی $\mathbb{Q}$ یک $D_۵$-توسیع با زیرمیدان مربعی $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-۱۵})$ است. فرض کنیم θ ریشه‌ای از $f(X)$ است. در این‌صورت برای $K = \mathbb{Q}(\theta)$ داریم $D_K = ۳^۲ \times ۵^۶$ و $h(K) = ۱$. با استفاده از قضیه (۵.۱) و قضیه (۲.۲)، داریم $Po(E) \simeq Po(L) \simeq \mathbb{Z}/۲\mathbb{Z}$.

یادآوری می‌کنیم که بنابر نتیجه (۳.۲)، اگر L/E ناشاخیده باشد آن‌گاه $Po(E) \simeq Po(L)$؛ و جالب این‌که با قرار دادن $t = ۱$ در چندجمله‌ای مولد برومر، چندجمله‌ای (۶.۲)، خاصیت ناشاخیده بودن L/E برقرار است.

گزاره ۸.۲. [۵، بخش ۲] فرض کنیم

$$f_s(X) = X^۵ - ۲X^۴ + (s+۲)X^۳ - (۲s+۱)X^۲ + sX + ۱, \tag{۳}$$

که در آن $s \in \mathbb{Z}$ است. در این‌صورت $disc(f_s(X)) = (۴s^۳ + ۲۸s^۲ + ۲۴s + ۴۷)^۲$ و اگر $-(۴s^۳ + ۲۸s^۲ + ۲۴s + ۴۷)$ مربع کامل نباشد، آن‌گاه میدان شکافنده $f_s(X)$ (روی $\mathbb{Q}$) یک $D_۵$-توسیع از $\mathbb{Q}$ است که روی زیرمیدان مربعی خود، یعنی روی

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-۴s^۳ - ۲۸s^۲ - ۲۴s - ۴۷}),$$

ناشاخیده است.

مثال ۹.۲. چندجمله‌ای $f_s(X)$ در گزاره‌ی فوق را در نظر می‌گیریم. با استفاده از نرم افزار $PARI$ [۱۲] و نتیجه (۳.۲)، به‌راحتی می‌توان بررسی نمود که برای $s \in \{\pm۶, \pm۵, \pm۲, \pm۱, ۰, ۸\}$ میدان شکافنده چندجمله‌ای $f_s(X)$ (روی $\mathbb{Q}$) یک $D_۵$-توسیع پولیا است؛ در حالی‌که برای $s \in \{\pm۱۷, \pm۱۶, \pm۴, -۳, ۷, ۹, ۱۰\}$ یک $D_۵$-توسیع غیرپولیاست.

این مقاله را با ارائه مثالی از یک $D_۷$-توسیع پولیا به اتمام می‌رسانیم.

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم $K = \mathbb{Q}(\alpha)$، که در آن α یک ریشه از چندجمله‌ای

$$f(X) = X^۷ - ۷X^۶ - ۷X^۵ - ۷X^۴ - ۱$$

.D)Q(f(X)LQf(X)$_۷$-توسیع از $\mathbb{Q}$ است [۴، بخش ۵.۲]. از آن‌جا که $disc(f(X)) = -۳^۶ \times ۷^۹$، $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-۷})$ زیرمیدان مربعی از L است و لذا، بنابر قضیه (۵.۱)، E پولیاست. از سویی $h(K) = ۱$ و با استفاده از قضیه (۲.۲) L نیز یک میدان پولیاست.

مراجع

1. P. J. Cahen and J. L. Chabert, *Integer-Valued Polynomials*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 48, Amer. Math. Soc. Providence 1997.
2. H. Cohen, *Advanced Topics in Computational Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 2000.
3. D. Hilbert, *The Theory of Algebraic Number Fields (Translated from the German by I. T. Adamson With an Introduction by F. Lemmermeyer and N. Schappacher)*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
4. C. U. Jensen, A. Ledet and N. Yui, *Generic Polynomials (Constructive Aspects of the Inverse Galois Problem)*, Cambridgre University Press, 2002.
5. M. J. Lavallee, B. K. Spearman, K. S. Williams and Q. Yang, *Dihedral quintic fields with a power basis*, Math. J. Okayama Univ. **47** (2005) 75–79.
6. A. Leriche, *About the embedding of a number field in a Pólya field*, J. Number Theory **145** (2014) 210–229.
7. A. Leriche, *Cubic, quartic and sextic Pólya fields*, J. Number Theory **133** (1) (2013) 59–71.
8. A. Maarefparvar and A. Rajaei, *Pólya S_3-extensions of* $\mathbb{Q}$, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **149** (6) (2019) 1421–1433.
9. A. Maarefparvar and A. Rajaei, *Relative Pólya group and Pólya dihedral extensions of* $\mathbb{Q}$, J. Number Theory **207** (2020) 367–384.
10. A. Ostrowski, *Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **149** (1919) 117–124.
11. G. Pólya, *Über ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern*, J. Reine Angew. Math. **149** (1919) 97–116.
12. The PARI Group, PARI/GP version 2.11.0, Univ. Bordeaux (2018). `http://pari.math.u-bordeaux.fr/`.
13. H. Zantema, *Integer valued polynomials over a number field*, Manuscripta Math. **40** (2-3) (1982) 155–203.

پست الکترونیکی: a.marefparvar@ipm.ir
پست الکترونیکی: alirajaei@modares.ac.ir

روشی برای اثبات امکان ترسیم دقیق ۱۷ضلعی منتظم

غلامرضا سلطانی ابری*
گنبد کاووس، گلستان، ایران

چکیده. در این مقاله روش‌هایی برای راستی آزمایی دقیق بودن هفده ضلعی منتظم ارایه شده و دقیق بودن ترسیم هفده ضلعی منتظم توسط پروفسور دیوید ایزنباد مورد بررسی و تأیید قرار گرفته است.
واژه‌های کلیدی: هفده ضلعی منتظم، ترسیم‌پذیری چندضلعی‌های منتظم.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 51M04.

۱. پیش‌گفتار

یک هفده ضلعی منتظم دارای ضلع ها و زاویه‌های داخلی برابر است. اندازه زاویه‌های داخلی هر راس آن حدود ۱۵۸٫۸ درجه بوده و اگر طول یک ضلع آن برابر a باشد آن‌گاه مساحت آن با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود

$$A = \frac{۱۷}{۴}a^۲ \cot\frac{\pi}{۱۷} \simeq ۲۲.۷۳۵۵a^۲.$$

یک هفده ضلعی منتظم با استفاده از خط کش غیر مدرج و پرگار قابل ترسیم است. این موضوع در سال ۱۷۹۶ توسط کارل فریدریش گاوس ۱۹ ساله اثبات شد [۳]. این اثبات نخستین پیشرفت در ترسیم چند ضلعی های منتظم پس از ۲۰۰۰ سال بود [۳].

اثبات گاوس بر اساس این حقیقت بود که اولاً قابل ترسیم بودن، معادل است با قابل بیان بودن تابع های مثلثاتی زاویه مشترک بر اساس عملگرهای حسابی و ریشه دوم، و دوم این‌که این کار قابل انجام است اگر توان‌های اول فرد n اعداد اول فرمای متفاوتی (به‌شکل $F_n = ۲^{۲^n} + ۱$) باشند.

بنابراین ترسیم یک هفده ضلعی منتظم شامل یافتن کسینوس ($\frac{۲\pi}{۱۷}$) برحسب ریشه دوم است. گاوس در کتاب بررسی‌های حسابی خود این رابطه را به این‌صورت استخراج کرده است [۲].

$$۱۶\cos\frac{۲\pi}{۱۷} = -۱ + \sqrt{۱۷} + \sqrt{۳۴ - ۲\sqrt{۱۷}} + ۲\sqrt{۱۷ + ۳\sqrt{۱۷} - \sqrt{۳۴ - ۲\sqrt{۱۷}} - ۲\sqrt{۳۴ + ۲\sqrt{۱۷}}}.$$

ترسیم چندضلعی‌های منتظم با ۲^n ضلع توسط اقلیدس شناخته شده بود، ولی ترسیم بر اساس اعداد فرما (به جز ۳ و ۵) در ریاضیات باستان ناشناخته بود.

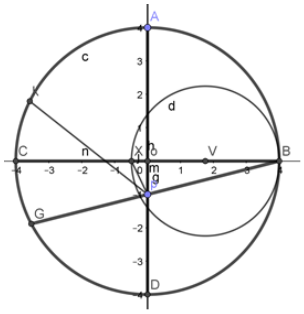
نخستین ترسیم صریح از هفده ضلعی منتظم در سال ۱۸۲۵ توسط یوهان ارشینگر انجام گرفت. بر اساس ترسیم یک هفده ضلعی منتظم می‌توان به راحتی n ضلعی‌هایی با n به‌صورت حاصل ضرب ۱۷ در ۳ یا ۵ (و یا هر دو) و هر توان ۲ (مثلا ۵۱ ضلعی، ۸۵ ضلعی یا ۲۵۵ ضلعی) ترسیم کرد.

۲. محور اصلی و اثبات مطلب

ابتدا روش ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم توسط پروفسور ایزنباد رییس انجمن ریاضی آمریکا در سال‌های ۲۰۰۳ و ۲۰۰۴ را با توجه به کلیپ ۱۷ ضلعی شگفت انگیز [۲] به‌طور خلاصه توضیح می‌دهیم. با توجه به شکل یک دایره

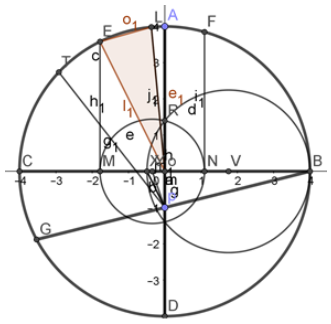
* سخنران

O و قطرهای افقی و عمودی BC و AD را در نظر گرفته خط BG را طوری رسم می‌کنیم که از نقطه P بگذرد در این‌جا $OD = ۴OP$ است. شکل ۱ را ببینید.



شکل ۱. مراحل روش ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم [۲].

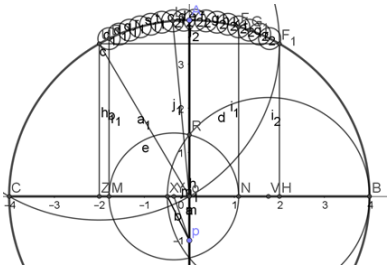
نیم‌ساز زاویه $\widehat{GPA}$ را رسم می‌کنیم تا در نقطه K دایره را قطع کند. سپس نیم‌ساز زاویه $\widehat{KPA}$ را رسم می‌کنیم تا در نقطه X شعاع OC را قطع کند. نقطه V وسط XB را به‌دست آورده به شعاع VBX=V دایره‌ای می‌زنیم تا در نقطه R شعاع OA را قطع کند. شکل ۲ را ببینید. در شکل دو نیم‌ساز $\widehat{CPA}$ را رسم می‌کنیم تا در نقطه



شکل ۲. مراحل روش ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم [۲].

T دایره را قطع کند. سپس نیم‌ساز زاویه $\widehat{TPA}$ را رسم می‌کنیم تا در نقطه Y شعاع OC را قطع کند.
به مرکز Y و شعاع YR دایره‌ای می‌زنیم تا در نقاط M و n قطر BC را قطع کند. از نقاط M و n عمودهایی بر قطر BC وارد می‌کنیم تا در نقاط E و F دایره را قطع کند. نیم‌ساز زاویه $\widehat{EOF}$ را رسم می‌کنیم تا در نقطه L دایره را قطع کند. وتر زاویه‌های $\widehat{LOF} = \widehat{EOL}$ بنابر ترسیم پروفسور ایزنباد برابر با یک ضلع ۱۷ ضلعی منتظم محاط در دایره O هستند.

۱.۲. **روش اول شکل ۳.** عمود منصف OC یعنی ZU را رسم می‌کنیم که U روی دایره قرار دارد. اگر کمان EU را ۱۷ برابر کنیم. در این حالت دایره‌ای به مرکز U و شعاع وتر جدید بزنیم این دایره از نقطه O مرکز دایره اول می‌گذرد. اگر عمود منصف OB را رسم کنیم این عمود منصف و وتر جدید روی دایره O و محل تلاقی دایره O و U همدیگر را قطع می‌کنند و این حالت در صورتی اتفاق می‌افتد که وتر مقابل به ۱۷ کمان UE برابر با شعاع دایره O و مقابل به زاویه مرکزی ۶۰ درجه باشد. از آن‌جا که اگر یک ۱۰۲ ضلعی منتظم داشته باشیم ۱۰۲ مضربی از ۶



شکل ۳. مراحل روش ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم [۲].

و ۱۷ است یعنی ۱۰۲ = ۱۷×۶. نتیجه می‌گیریم کمان EU که وتر ۱۷ برابر ان مقابل به زاویه ۶۰ درجه است. با کمان یک ضلع ۱۰۲ ضلعی منتظم برابر است و اگر کمان EU را ۶ برابر کنیم وتر کمان جدید برابر با یک ضلع ۱۷ ضلعی منتظم محاط در دایره O است.

۲.۲. **روش دوم.** روش دیگری که دقیق بودن ترسیم ۱۷ ضلعی منتظم را تأیید می‌کند. این است که اگر فرضاً یک ۱۰۲ ضلعی منتظم داشته باشیم چون وتر هر ۱۷ ضلع ان مساوی با یک ضلع ۶ ضلعی منتظم می‌شود که مقابل به زاویه ۶۰ درجه است $۶۰ \times ۶ = ۳۶۰^\circ$ و وتر هر ۶ ضلع آن مقابل به یک ضلع ۱۷ ضلعی منتظم است. اگر ۳ ضلع ۱۷ ضلعی منتظم را در نظر بگیریم. برابر با $۱۸ = ۳ \times ۶$ ضلع از ۱۰۲ ضلعی منتظم می‌شود. بنابراین هرگاه یک ۱۷ ضلعی منتظم داشته باشیم و بخواهیم دقیق بودن آن‌را راستی آزمایی نماییم باید زاویه مقابل به ۳ ضلع آن‌را گرفته و ۶۰ درجه از آن کم نماییم کمان باقیمانده باید مقابل به یک ضلع ۱۰۲ ضلعی منتظم محاط در آن دایره باشد. یعنی وتر مقابل به ۱۷ برابر این کمان باقیمانده مقابل به زاویه مرکزی ۶۰ درجه باشد.

۳.۲. **روش سوم.** چون می‌توانیم زاویه‌های مضرب ۳ را بدون استفاده از نقاله با استفاده از پرگار و خط کش به‌دست آوریم با استفاده از روش‌های ابداعی اینجانب از جمله [۱] می‌توانیم از زاویه مقابل به هر ضلع ۱۷ ضلعی منتظم که برابر با ۲۱٫۱۷۶۴۷۰۵۸۸ به‌طور تقریبی است ۲۱ درجه را که مضربی از ۳ است جدا نموده و باقیمانده اعشار یک ضلع و ۱۷ ضلع را به‌دست آوریم چون $۳۵۷ = ۱۷ \times ۲۱$ درجه می‌شود و $۳ = ۳۵۷ - ۳۶۰$ درجه است یعنی مجموع اعشار ۱۷ ضلع مساوی با ۳ درجه است. با این حساب اگر اعشار زاویه مقابل به هر ضلع ۱۷ ضلعی منتظم را a فرض کنیم داریم $۱۷a = ۳$ درجه و چون $۲۱ = ۷ \times ۳$ است کل زاویه مقابل به یک ضلع ۱۷ ضلعی منتظم بر مبنای اعشار آن برابر است با $۱۲۰a = ۱۱۹a + a = ۱۷a) + a = (۳ = ۷ \times ۳ + a = ۷ \times (۳ = ۲۱ + a$. یعنی زاویه مقابل به یک ضلع ۱۷ ضلعی منتظم ۱۲۰ برابر اعشار آن است و می‌توانیم زاویه مقابل به یک ضلع را به ۱۲۰ قسمت مساوی تقسیم و چون $۲۰۴۰a = ۱۲۰a \times ۱۷$ می‌شود بر اساس آن می‌توان چندضلعی‌هایی با مضرب‌های ۱۷×۳ و ۱۷×۵ و یا هردو مانند ۵۱ و ۸۵ و ۲۵۵ و... ضلعی را ترسیم نماییم.

ضمناً با این روش می‌توان دقیق بودن یا نبودن سایر چندضلعی‌ها مانند ۷ و ۹ و ۱۱ و ۱۳ و ... را نیز مورد آزمایش و راستی آزمایی نماییم. بنابراین اگر مجموع اعشار ۱۷ ضلع را به‌دست آورده و آن را ۲۰ برابر نماییم باید زاویه ۶۰ درجه به‌دست بیاید یعنی وتر این مجموع زاویه ها با شعاع دایره برابر باشد اگر بود ۱۷ ضلعی دقیق است.

۳. نتیجه‌گیری

از آن‌جا که راستی آزمایی ترسیم پروفسور ایزنباد با این روش‌ها مثبت و موفقیت آمیز بوده دقیق بودن این ترسیم مورد تأیید قرار می‌گیرد.

سپاس‌گزاری

۱. سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از استاد بزرگوار جناب آقای پروفسور امید علی شهنی کرم زاده که متواضعانه کارهای تحقیقاتی اینجانب را مورد ملاحظه قرار داده و با راهنمایی‌های لازم موجبات تشویق و ترغیب این جانب را فراهم آورده‌اند.

۲. سپاسگزاری و تقدیر و تشکر می‌کنم از استاد بزرگوار جناب اقای پروفسور مگردیچ تومانیان ریاست محترم بخش ریاضی فرهنگستان علوم ایران که کارهای تحقیقاتی اینجانب را مورد ملاحظه قرار داده و از مساعدت و راهنمایی‌های لازم دریغ ننموده و موجبات تشویق و ترغیب اینجانب را فراهم آورده‌اند.

مراجع

۱. غ. ر. سلطانی ابری و ر. فرخ زاد رستمی، روشی برای ترسیم زاویه‌های ۳۶ و ۷۲ درجه با استفاده از دایره‌ها، چهل و نهمین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه علم و صنعت، (۱۳۹۷) ۳۹۰۷–۳۹۰۱.

۲. هفده ضلعی شگفت انگیز /www.aparat.com/v/JA1xf.

3. A. Jones, S. A. Morris and K. R. Pearson, *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*, Springer-Verlag New York, 1991.

پست الکترونیکی: gholamrezasoltaniabri@yahoo.com

بررسی تبدیلات حافظ دایره ژئودزیکی در فضای فینسلری

سمانه صابرعلی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده. مترهای راندرز یک کلاس مهم از مترهای فینسلری هستند که توسط یک متر ریمانی α و ۱-فرمی β به‌صورت $F = \alpha + \beta$ تعریف می‌شوند. در این مقاله به بررسی تبدیلات حافظ دایره ژئودزیکی در فضای فینسلری پرداخته شده و مترهای راندرز همدیس مرتبط اینشتینی ضعیف مورد بررسی قرار گرفته است.
واژه‌های کلیدی: تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی، متر فینسلر، متر اینشتینی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 53B40, 53C60, 58B20.

۱. پیش‌گفتار

در یک فضای اقلیدسی یک دایره ژئودزیکی یک خط راست یا یک دایره با شعاع مثبت متناهی است و این مفهوم با استفاده از التصاق لوی چویتا به هندسه ریمانی توسیع داده می‌شود. در هندسه ریمان یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی تبدیلی است که دایره های ژئودزیکی را حفظ می‌کند. وگل در هندسه ریمان ثابت کرد که هر دیفئومورفیسم حافظ دایره، همدیس است. منیفلدهای نیمه ریمانی (M, g) را در نظر می‌گیریم. یک دیفئومورفیسم همدیس $f : (M, g) \to (\bar{M}, \bar{g})$ به این معنی است که $f^*\bar{g}$ یک مضرب اسکالر مثبتی از g است. اگر این مضرب اسکالر ثابت باشد، آن‌گاه f متجانس است. در سال ۱۹۴۰، یانو تبدیلات حافظ دایره ژئودزیکی منیفلدهای ریمانی را معرفی کرد و نظریه هندسه تبدیلات حافظ دایره ژئودزیکی در یک سری از مقالات توسط یانو توسعه داده شد [۱۰]. دایره ژئودزیکی در هندسه ریمان، مانند هندسه فینسلر، یک منحنی است که انحنای اول فرنه آن k_1 ثابت و انحنای دوم آن k_2 صفر است؛ به‌طور معادل، یک منحنی است که انحنای آن ثابت و بدون تاب است [۲]. ایشیهارا نشان داد که یک میدان برداری حافظ دایره ژئودزیکی روی منیفلدهای ریمانی، یک میدان برداری همدیس است [۶]. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل‌پذیر است. یک دیفئومورفیسم موضعی منیفلدهای فینسلری را حافظ دایره گوییم اگر دایره را به دایره تصویر کند. مفهوم حافظ دایره ژئودزیکی به‌طور مشابه توسط آگراوال و ایزومی در هندسه فینسلر توسعه پیدا کرده است. به‌علاوه، بیدآباد [۲] نشان داد که در تعریف تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی نیازی به فرض همدیس بودن نیست؛ به‌عبارت دیگر، اگر یک تبدیل دایره‌های ژئودزیکی را حفظ کند، آن‌گاه آن تبدیل یک تبدیل همدیس است.

در سال ۲۰۱۴، شن و بیدآباد مفهوم دایره ژئودزیک در هندسه فینسلر را بیان و تغییر مترهای حافظ دایره را مطالعه کردند [۳]. در یک فضاي فینسلری، تغییر متری که دایره‌های ژئودزیک را حفظ می‌کند، همدیس است. یک تبدیل $g \to \bar{g}$ را تبدیل حافظ دایره ژئودزیک می‌نامیم، هرگاه حافظ منحنی‌های با انحنای ژئودزیکی ثابت و تاب ژئودزیکی صفر باشد (این منحنی‌ها به دایره‌های ژئودزیک معروفند). در این حالت ژئودزیک های همدیس، دایره‌های ژئودزیک هستند.

لم ۱.۱. [۳] فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری است. شرط لازم و کافی برای این‌که یک تغییر همدیس $\bar{g} = e^{2\sigma}g$ حافظ دایره ژئودزیک باشد، این است که تابع σ جوابی از معادله دیفرانسیل جزیی زیر شود:

$$\nabla_j \sigma_k - \sigma_j \sigma_k = \Phi g_{jk},$$

که در آن $\sigma_k = \frac{\partial \sigma}{\partial x^k}$، ∇_k مشتق افقی کارتان و Φ تابع اسکالر است.

* سخنران

مثال ۲.۱. تغییرات حافظ دایره ژئودزیک در فیزیک به صورت تبدیلات هم‌خطی همدیس ریچی شناخته شده هستند و معادلات میدان ماکسول- اینشتین رابطه با میدان‌های الکترومغناطیسی غیر تهی را تخمین می‌زنند [۴، ۵، ۷، ۸].

در نظریه نسبیت عام، تبدیلات هم‌خطی همان ویژگیهای متقارن فضا-زمان هستند. در [۸] تبدیلات هم‌خطی همدیس ریچی نشان داده می‌شود که همان تبدیلات حافظ دایره ژئودزیک هستند. در ادامه مثالی از فضا-زمان را بیان می‌کنیم که در معادلات ماکسول-انیشتین صدق می‌کند و یک میدان برداری متجانس می‌پذیرد؛ به‌عبارتی دیگر

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i;j} + \xi_{j;i} = ۲\phi g_{ij},$$

که L_ξ مشتق لی نسبت به میدان برداری ξ^i است و ϕ یک تابع اسکالر که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\phi = \frac{۱}{۴}\xi^i_{;i}.$$

هر حرکت همدیسی باید در رابطه زیر صدق کند:

$$L_\xi \Gamma^i_{jk} = \phi_{;k}\delta^i_j + \phi_{;j}\delta^i_k - g_{jk}g^{i\alpha}\phi_{;\alpha}.$$

مثال ۳.۱. اگر (M, g) در معادله میدان انیشتین صدق کند، آنگاه هر میدان کیلینگ همدیس، یک تبدیل هم‌خط همدیس ریچی است. کلمه تبدیل هم‌خط را تانسور حرکت انرژی در نظر می‌گیریم که توسط شار حفظ می‌شود.

لم ۴.۱. [۹] فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر فینسلر همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان M با $\bar{F} = u^{-۱}F$ هستند (فاکتور همدیس u معادل با e^σ است). در این‌صورت داریم:

۱. F و $\bar{F}$ حافظ دایره ژئودزیکی هستند اگر و تنها اگر

$$u_{i|j} = \lambda g_{ij},\ u^r C^i_{rk} = ۰ \quad (u_i = u_{x^i}, u^i := g^{ik}u_k),$$

که در آن $\lambda = \lambda(x)$ یک تابع اسکالر روی M و $|$ به معنای مشتق کواریان افقی التصاق کارتان (چرن) F است.

۲. اگر F و $\bar{F}$ حافظ دایره ژئودزیکی باشند، آنگاه F و $\bar{F}$ حافظ انحنای پرچمی اسکالر (ایزوتروپیک) یا انحنای پرچمی ثابت (در بعدهای بزرگتر یا مساوی۳) و یا یک متر اینشتینی هستند.

۲. مقدمات

تابع $F : TM \to [۰, \infty)$ را ساختار فینسلری می‌نامیم، هرگاه در یک دستگاه مختصات موضعی (x^i, y^i)

$$F(x, y) = F(y^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x),$$

در روابط زیر صدق کند:

۱. F یک تابع همگن مثبت از درجه یک نسبت به y است؛ به‌عبارت دیگر، داریم $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$، که در آن λ مثبت است.

۲. $F(x, y)$ تابعی C^∞ روی $TM \setminus \{۰\}$ است.

۳. ماتریس هسیان $\frac{۱}{۲}F^۲_{y^i y^j}$ یک ماتریس مثبت معین است.

یک منیفلد C^∞ فینسلری با ساختار فینسلری بالا را منیفلد فینسلری یا فضای فینسلری می‌گوییم.
یک اسپری روی منیفلد فینسلری M، یک میدان برداری هموار G روی $TM_۰$ است که در یک دستگاه مختصات استاندارد موضعی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$G(x, y) = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - ۲G^i(x, y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

که $G^i(x,y)$ توابع موضعی روی TM و دارای خاصیت زیر هستند:

$$G^i(x,\lambda y)=\lambda^{۲}G^i(x,y),\ \lambda>۰.$$

یک منیفلد با یک اسپری را فضای اسپری می‌نامیم. ضرایب اسپری G^i به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$G^i=\frac{۱}{۴}g^{il}\{[F^{۲}]_{x^my^l}y^l-[F^{۲}]_{x^l}\},$$

که در آن $g^{ij}=(g_{ij})^{-۱}$ [۱].

هر اسپری G به‌طور یکتا یک خانواده از تبدیلات $R_y:T_xM\to T_xM$: $R^i_kdx^k\otimes\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ است که R^i_k به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^i_k=۲\frac{\partial G^i}{\partial x^k}-y^j\frac{\partial^{۲}G^i}{\partial x^j\partial y^k}+۲G^j\frac{\partial^{۲}G^i}{\partial y^j\partial y^k}-\frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

R_y انحنای ریمان اسپری G در جهت y است.

اثر انحنای ریمان را انحنای ریچی نامیده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ric(x,y)=R^m_m(x,y).$$

انحنای ریچی همگن مثبت از درجه دو است.

تعریف ۱.۲. یک متر فینسلر روی منیفلد M را یک متر اینشتینی ضعیف می‌نامیم، هرگاه:

$$Ric(x,y)=(n-۱)(\frac{۳\theta}{F}+\sigma(x))F^{۲}, \tag{۱}$$

که $\sigma=\sigma(x)$ یک تابع اسکالر و $\theta=t_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M است.

تعریف ۲.۲. یک متر فینسلری را اینشتینی می‌نامیم، هرگاه در رابطه (۱) $\theta=۰$ باشد. به‌عبارت دیگر:

$$Ric(x,y)=(n-۱)\sigma(x)F^{۲}.$$

فرض کنیم F یک متر فینسلر روی منیفلد n-بعدی M است. با انتخاب یک دستگاه مختصات موضعی استاندارد (x^i,y^i)، فرض کنیم $dV_F=\sigma_F(x)dx^{۱}...dx^n$ فرم حجمی متر فینسلر F است که:

$$\sigma_F(x)=\frac{Vol(B^n(۱))}{Vol\{y^i\in R^n|F(x,y^i\frac{\partial}{\partial x^i})<۱\}}.$$

برای یک بردار غیر صفر $y\in T_xM$ انحراف معیار به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau(x,y):=\frac{\sqrt{det(g_{ij}(x,y))}}{\sigma_F(x)}.$$

برای یک بردار $y\in T_xM$، فرض کنیم منحنی $c(t)$ یک ژئودزیک با $c(۰)=x$ و $\dot{c}(۰)=y$ است. انحنای S به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(x,y)=\frac{d}{dt}[\tau(c(t),\dot{c}(t)]|_{t=۰}.$$

انحنای $S(x,y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک است. بنابر تعریف فوق، انحنای $S(x,y)$ در واقع مشتق کواریان افقی τ در امتداد ژئودزیک‌ها است. به‌عبارت دیگر داریم:

$$S(x,y)=\tau_{|l}(x,y)y^l,$$

"|" که مشتق کواریان افقی F است. در مختصات موضعی داریم:

$$S(x,y)=y^i\frac{\partial\tau}{\partial x^i}-۲\frac{\partial\tau}{\partial y^i}G^i.$$

با توجه به رابطه فوق، به رابطه زیر برای انحنای $S(x,y)$ می‌توان دست یافت:

$$S(x,y)=\frac{\partial G^m}{\partial y^m}-y^m\frac{\partial}{\partial x^m}(\ln\sigma_F(x)).$$

متر فینسلر F را با انحنای ایزوتروپیک $S(x,y)$ گوییم، هرگاه

$$S(x,y)=(n+1)c(x)F(x,y),$$

که در آن $c=c(x)$ یک تابع اسکالر روی M است.

فرض کنیم $\alpha(x,y)=\sqrt{a_{ij}(x)y^iy^j}$ یک متر ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل‌پذیر M و $\beta(x,y)=b_i(x)y^i$ یک ۱-فرمی روی M هستند. فرض کنیم $\|\beta\|_\alpha:=\sqrt{a^{ij}(x)b_i(x)b_j(x)}<1$، که $a^{ij}=(a_{ij})^{-1}$ است. تعریف می‌کنیم: $F=\alpha+\beta$، که F یک متر فینسلر است. متر F را یک متر راندرز می‌نامیم. تانسور اساسی متر راندرز به‌صورت زیر است:

$$g_{ij}(x,y)=\frac{F}{\alpha}[a_{ij}+\frac{\alpha}{F}(b_i\frac{y_i}{\alpha})(b_j+\frac{y_j}{\alpha})-\frac{y_i}{\alpha}\frac{y_j}{\alpha}].$$

وارون g_{ij}، g^{ij}، به‌شکل زیر است:

$$g^{ij}(x,y)=\frac{\alpha}{F}a^{ij}-\frac{\alpha}{F^2}(b^iy^j+b^jy^i)+\frac{b^2\alpha+\beta}{F^3}y^iy^j. \qquad (2)$$

تاب کاتان میانگین متر راندرز به‌صورت زیر است:

$$I_i=\frac{(n+1)}{2(\alpha+\beta)}(b_i-\frac{y_i}{\alpha}\frac{\beta}{\alpha}). \qquad (3)$$

۳. نتایج اصلی

قضیه ۱.۳. فرض کنیم F و $\bar F$ دو متر راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان هستند. اگر F و $\bar F$ هر دو مترهای اینشتینی ضعیف باشند، آنگاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است.

اثبات. می‌دانیم که اگر F و $\bar F$ دو متر راندرز اینشتینی ضعیف باشند، آنگاه با انحنای S و $\bar S$ ایزوتروپیک هستند. بنابراین داریم:

$$S=(n+1)k_1(x)F,\quad \bar S=(n+1)k_2(x)\bar F.$$

به‌عبارت دیگر، اگر F با انحنای S ایزوتروپیک باشد، آنگاه داریم: $S=(n+1)k_1(x)F$، که $k_1(x)$ تابعی اسکالر است. همچنین اگر $\bar F$ با انحنای $\bar S$ ایزوتروپیک باشد، آنگاه داریم $\bar S=(n+1)k_2(x)\bar F$، که $k_2(x)$ یک تابع اسکالر است. با توجه به همدیس مرتبط بودن F و $\bar F$، رابطه زیر را برای تبدیل همدیس انحنای S داریم:

$$\bar S(x,y)=S(x,y)+F^2(x,y)\sigma(x)^iI_i(x,y). \qquad (4)$$

با جای‌گذاری S و $\bar S$ در رابطه (۴) داریم:

$$(n+1)k_2(x)e^{\sigma(x)}F=(n+1)k_1(x)F+F^2\sigma^iI_i,$$
$$(n+1)(k_2(x)e^{\sigma}-k_1(x))-F\sigma^iI_i=0.$$

با جای‌گذاری $F=\alpha+\beta$ و $\bar F=\bar\alpha+\bar\beta$ و همچنین از روابط بالا به‌دست می‌آوریم:

$$I_i\sigma^i=0, \qquad (5)$$
$$(n+1)(k_2(x)e^{\sigma(x)}-k_1(x))-\sigma^iI_i=0,$$

که $\sigma^i = g^{ij}\sigma_j$. با جای‌گذاری در رابطه (۵) داریم:

$$I_i g^{ij}\sigma_j = ۰. \tag{۶}$$

با جای‌گذاری روابط (۲) و (۳) در رابطه (۶) به‌دست می‌آوریم:

$$\alpha\{\beta b^j\sigma_j - b^۲\sigma_۰\} + \alpha^۲ b^j\sigma_j - \beta\sigma_۰ = ۰. \tag{۷}$$

با توجه به رابطه (۷) داریم:

$$\alpha^۲ b^j\sigma_j - \beta\sigma_۰ = ۰. \tag{۸}$$

بنابر تحویل‌ناپذیری β و $\alpha^۲$، در رابطه (۸) به دست می‌آوریم $\sigma_i = ۰$. بنابراین σ ثابت بوده و تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است. □

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم F و $\bar{F}$ دو متر راندرز همدیس مرتبط روی منیفلد یکسان هستند. اگر F و $\bar{F}$ هر دو مترهای اینشتینی باشند، آن‌گاه تبدیل همدیس یک تبدیل حافظ دایره ژئودزیکی است.

مراجع

1. D. Bao, S. S. Chern and Z. Shen, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2000.
2. B. Bidabad and Z. Shen, *Circle-preserving transformations in Finsler spaces*, Publ. Math. Debrecen **81** (3-4) (2012) 435–445.
3. B. Bidabad, *A classification of complete Finsler manifolds through the conformal theory of curves*, Differential Geom. Appl. **35** (suppl.) (2014) 350–360.
4. A. M. Faridi, *Einstein-Maxwell equations and the conformal Ricci collineations*, J. Math. Phys. **28** (6) (1987) 1370–1376.
5. A. M. Faridi, *Einstein-Maxwell equations and the groups of homothetic motion*, J. Math. Phys. **31** (2) (1990) 401–409.
6. S. Ishihara, *On infinitesimal concircular transformations*, Kōdai Math. Sem. Rep. (12) (1960) 45–56.
7. W. Kühnel and H. B. Rademacher, *Conformal Killing fields on space-times*, Current topics in mathematical cosmology (Potsdam, 1998) 433–437, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1998.
8. W. Kühnel and H. B. Rademacher, *Conformal Ricci collineations of space-times*, Gen. Relativity Gravitation **33** (10) (2001) 1905–1914.
9. S. Shen and G. Yang, *On concircular transformations in Finsler geometry*, Results Math. **74** (4) (2019) 162.
10. K. Yano, *Concircular geometry I. Concircular transformations*, Proc. Imp. Acad. Tokyo **16** (1940) 195–200.

پست الکترونیکی: s.saberali@urmia.ac.ir

وجود پایه‌ی صحیح از میدان‌های دومربعی روی زیرمیدان‌های مربعی

عباس معارف‌پرور*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران
و جواد شرفی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، ایران

چکیده. برای یک توسیع متناهی L/K از میدان‌های اعداد، یافتن شرط یا شرط‌هایی برای این‌که $\mathcal{O}_L$ یک $\mathcal{O}_K$-مدول آزاد باشد ($\mathcal{O}_L$ و $\mathcal{O}_K$ به ترتیب حلقه اعداد صحیح جبری از میدان‌های L و K هستند)، یکی از مسائل کلاسیک و جذاب در نظریه جبری اعداد است. در صورتی که $\mathcal{O}_L$ یک $\mathcal{O}_K$- مدول آزاد باشد، یک پایه از $\mathcal{O}_L$روی $\mathcal{O}_K$ را یک پایه صحیح از L روی K می‌نامند. در این مقاله، برای دو عدد صحیح متمایز و خالی از مربع m و n، یک شرط معادل برای وجود پایه صحیح از میدان دومربعی $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ روی میدان مربعی $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ ارائه می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: میدان مربعی، میدان دومربعی، پایه‌ی صحیح، ایده‌آل مبهم، کوهمولوژی گالوا.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 11R11, 11R16, 11R34.

نمادها. در این مقاله، برای یک میدان اعداد M، از نمادهای $I(M)$، $Cl(M)$، $\mathcal{O}_M$، $disc(M/\mathbb{Q})$، h_M، و U_M، به‌ترتیب برای معرفی گروه ایده‌آل‌های کسری، گروه رده‌ی ایده‌آلی، حلقه اعداد صحیح جبری، مبین M (روی $\mathbb{Q}$)، عدد رده‌ای و گروه یکه‌های M استفاده شده است. هم‌چنین از نماد $\mathcal{N}_{M/\mathbb{Q}}$ برای معرفی همریختی نُرم عنصری $\mathcal{N}_{M/N} : M^* \to \mathbb{Q}^*$ استفاده می‌شود. اگر توسیع $M/\mathbb{Q}$ گالوایی باشد، نماد $Gal(M/\mathbb{Q})$ نمایش‌دهنده گروه گالوای M روی $\mathbb{Q}$ است.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید K یک میدان اعداد با حلقه اعداد صحیح جبری $\mathcal{O}_K$ باشد. می‌توان نشان داد که $\mathcal{O}_K$ همواره یک $\mathbb{Z}$-مدول آزاد از درجه‌ی $n = [K : \mathbb{Q}]$ است، [۳، قضیه ۲.۱۰] .

تعریف ۱.۱. یک پایه $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ برای $\mathcal{O}_K$ به عنوان $\mathbb{Z}$-مدول (یعنی ω_iها روی $\mathbb{Z}$ مستقل خطی هستند و هر عنصر از $\mathcal{O}_K$ به صورت یک $\mathbb{Z}$-ترکیب خطی منحصربفرد از آن‌هاست)، را یک پایه صحیح از میدان اعداد K می‌نامند.

مثال ۲.۱. [۳، قضیه ۲.۱۸] فرض کنید $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ یک میدان اعداد مربعی (برای یک عدد صحیح خالی از مربع d) باشد. در این صورت

$$disc(K/\mathbb{Q}) = \begin{cases} d & d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \text{اگر}, \\ 4d & d \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\ 4) \text{اگر}. \end{cases}$$

هم‌چنین یک پایه صحیح از K به صورت $\{1, \omega\}$ است که در آن

$$\omega = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2} & d \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ اگر}, \\ \sqrt{d} & d \equiv 2, 3 (\mathrm{mod}\ 4) \text{ اگر}. \end{cases}$$

* سخنران

در حالت کلی‌تر برای یک توسیع متناهی L/K از میدان‌های اعداد، $\mathcal{O}_L$ لزوماً یک $\mathcal{O}_K$-مدول آزاد نیست و یکی از موضوعات تحقیقاتی کلاسیک در نظریه جبری اعداد، یافتن شرط یا شرط‌هایی است که " $\mathcal{O}_L$ یک $\mathcal{O}_K$-مدول آزاد باشد ". در این حالت یک پایه از $\mathcal{O}_L$ به عنوان $\mathcal{O}_K$-مدول را یک پایه صحیح از L روی K می‌نامند.

مثال ۳.۱. فرض کنید K یک میدان اعداد با حلقه اعداد صحیح جبری $\mathcal{O}_K$ باشد. اگر $\mathcal{O}_K$ یک دامنه‌ی ایده‌آل اصلی (PID) باشد (به طور معادل $h_K = ۱$)، آنگاه هر توسیع متناهی L از K دارای یک پایه صحیح روی K است، [۳، بخش ۲.۲] .

برای دو عدد صحیح متمایز و خالی از مربع m و n ، میدان دومربعی $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ و زیرمیدان مربعی $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$ از آن را در نظر بگیرید. در [۱]، یک رده‌بندی کامل به‌صورت m برای وجود پایه صحیح از L روی K ارائه شده است:

گزاره ۴.۱. [۱]

(الف) در حالتی که m یک عدد منفی است، توسیع $L = K(\sqrt{n})$ از K (برای هر عدد صحیح خالی از مربع n) دارای یک پایه صحیح روی $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ است اگر و تنها اگر m به یکی از صورت‌های $m = -۱$، $m = -۲$ یا $m = -p$ باشد که در آن (به پیمانه۴) $p \equiv ۳$ یک عدد اول فرد است.

(ب) در حالتی که m یک عدد مثبت است، توسیع $L = K(\sqrt{n})$ از K (برای هر عدد صحیح خالی از مربع n) دارای یک پایه صحیح روی $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ است اگر و تنها اگر m به یکی از صورت‌های زیر باشد:

(ب-۱) $m = ۲$ یا $m = p$ که در آن p یک عدد اول فرد دلخواه است؛

(ب-۲) $m = ۲p$ یا $m = pq$ ((به پیمانه۴) $p \equiv q$ دو عدد اول فرد متمایزند) و K هیچ عنصر یکه با نُرم منفی نداشته باشد.

۲. ایده‌آل‌های مبهم و کوهمولوژی گالوا

برای یک میدان اعداد گالوایی K، قرار دهید $G := Gal(K/\mathbb{Q})$ و زیرگروه از $Cl(K)$ تولید شده توسط رده‌های ایده‌آل‌های مبهم از K را با نماد $Am(K)$ در نظر بگیرید (یادآوری می‌کنیم که منظور از یک ایده‌آل مبهم، یک ایده‌آل کسری $\mathfrak{a} \in I(K)$ است به‌طوری‌که برای هر $\sigma \in G$ داشته باشیم $\mathfrak{a}^\sigma = \mathfrak{a}$؛ یعنی $\mathfrak{a}$ نسبت به عمل G روی $I(K)$ پایا باشد). در این بخش، با استفاده از نتایج [۴] ارتباط بین $Am(K)$، گروه کوهمولوژی $H^{-۱}(G, U_K)$ و اعداد اول شاخیده شده در K را بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۲. [۴، بخش ۳، صفحه‌ی ۱۶۳] فرض کنید که K یک میدان اعداد گالوایی با گروه گالوای G باشد. برای هر عدد اول p، اندیس شاخیدگی p در $K/\mathbb{Q}$ را با نماد $e(p)$ در نظر بگیرید. آنگاه دنباله زیر یک دنباله دقیق از گروه‌های آبلی است:

$$(۱) \qquad \{۰\} \longrightarrow H^{-۱}(G, U_K) \longrightarrow \bigoplus_{p \text{ عدد اول}} \mathbb{Z}/e(p)\mathbb{Z} \longrightarrow Am(K) \longrightarrow \{۰\}.$$

نتیجه ۲.۲. فرض کنید K یک میدان اعداد گالوایی باشد. آنگاه $Am(K)$ یک گروه بدیهی است اگر و تنها اگر

$$(۲) \qquad \left|H^{-۱}(G, U_K)\right| = \prod_{p | disc(K/\mathbb{Q})} e(p).$$

اکنون فرض کنید $K/\mathbb{Q}$ یک توسیع دوری (یک توسیع گالوایی با گروه گالوای دوری) باشد و خارج قسمت هِربرَند از این توسیع را در نظر بگیرید:

$$Q(G,U_K)=\frac{\left|\hat{H}^{\circ}(G,U_K)\right|}{|H^{1}(G,U_K)|}, \tag{۳}$$

که در آن،

$$\hat{H}^{\circ}(G,U_K)=\frac{U_K^G}{\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(U_K)}=\frac{U_{\mathbb{Q}}}{\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(U_K)}=\frac{\{\pm 1\}}{\mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(U_K)}.$$

[۲، فصل ۴، بخش ۴]. بنابراین

$$\left|\hat{H}^{\circ}(G,U_K)\right|=\begin{cases}2 & \text{اگر } \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(U_K)=\{1\},\\ 1 & \text{اگر } \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(U_K)=\{\pm 1\}.\end{cases} \tag{۴}$$

از طرف دیگر، مقدار خارج قسمت هِربرَند به صورت زیر مشخص می‌شود:

گزاره ۳.۲. [۲، گزاره‌ی ۵.۱۰] فرض کنید M/N یک توسیع دوری از میدان‌های اعداد با گروه گالوای G باشد. آن‌گاه

$$Q(G,U_M)=\frac{2^a}{[M:N]},$$

که در آن، a برابر با تعداد نشاندن‌های حقیقی از N است که با توسیع به M به نشاندن موهومی تبدیل می‌شوند.

بنابراین برای توسیع دوری $K/\mathbb{Q}$ از درجه‌ی $r=[K:\mathbb{Q}]$ با گروه گالوای G داریم:

$$Q(G,U_K)=\begin{cases}1/r & \text{اگر } K \text{ حقیقی باشد.}\\ 2/r & \text{اگر } K \text{ مختلط باشد.}\end{cases}, \tag{۵}$$

با استفاده از روابط (۳) ، (۴) و (۵) مرتبه‌ی گروه کوهمولوژی $H^{1}(G,U_K)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\left|H^{1}(G,U_K)\right|=\begin{cases}2r & \text{اگر } K \text{ حقیقی باشد و } \mathcal{N}_{K/\mathbb{Q}}(U_K)=\{1\}\\ r & \text{در غیر این‌صورت}\end{cases}, \tag{۶}$$

۳. نتایج اصلی

با استفاده از نتایج ارائه شده در بخش قبل، می‌توانیم تمام میدان‌های مربعی $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$ با گروه رده‌های ایده‌آل‌های مبهم بدیهی را رده‌بندی کنیم:

قضیه ۱.۳. برای یک میدان مربعی $K=\mathbb{Q}(\sqrt{m})$، گروه رده‌ی ایده‌آل‌های مبهم $Am(K)$ از K بدیهی است اگر و تنها اگر m به یکی از شکل‌های زیر باشد، که در آن $p\equiv q\pmod 4$ دو عدد اول فرد متمایزند:

(الف) $m=-1$، یا $m=-2$، یا $m=-p$ که در آن $p\equiv 3\pmod 4$؛

(ب) $m=2$ یا $m=p\equiv 1\pmod 4$؛

(ج) $m=p$ یا $m=2p$ که $p\equiv 3\pmod 4$، یا $m=pq$ و نُرم یکه‌ی اساسی از K برابر با $+1$ باشد.

اثبات. با استفاده از نتیجه‌ی ۲.۲ و رابطه‌ی (۶) :

(الف) در حالتی‌که K یک میدان مختلط باشد ($m<0$)؛ $Am(K)$ بدیهی است اگر و تنها اگر دقیقاً یک عدد اول در $K/\mathbb{Q}$ شاخیده شود. به‌طور معادل $disc(K/\mathbb{Q})$ باید یک عدد اول باشد و با استفاده از مثال ۲.۱ نتیجه می‌شود $m\in\{-1,-2,-p\}$ که در آن p یک عدد اول فرد همنهشت با ۳ (به پیمانه ۴) است.

(ب) در حالتی‌که K یک میدان حقیقی ($m > ۰$) و دارای یکه‌ی اساسی با نُرم -۱ باشد؛ $Am(K)$ بدیهی است اگر و تنها اگر دقیقاً یک عدد اول در $K/\mathbb{Q}$ شاخیده شود. به‌طور معادل $disc(K/\mathbb{Q})$ باید یک عدد اول باشد و با استفاده از مثال ۲.۱ نتیجه می‌شود $m = ۲$ یا $m = p \equiv ۱ (\mathrm{mod}\ ۴)$ یک عدد اول فرد است.

(ج) در حالتی‌که K یک میدان حقیقی ($m > ۰$) و دارای یکه‌ی اساسی با نُرم $+۱$ باشد؛ $Am(K)$ بدیهی است اگر و تنها اگر دقیقاً دو عدد اول در $K/\mathbb{Q}$ شاخیده شوند. با استفاده از مثال ۲.۱ نتیجه می‌شود $m \in \{p, ۲p\}$ که $p \equiv ۳ (\mathrm{mod}\ ۴)$، یا $m = pq$ که $p \equiv q (\mathrm{mod}\ ۴)$ دو عدد اول فرد متمایزند.
□

با ترکیب گزاره‌ی ۴.۱ و قضیه‌ی ۱.۳ نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۲.۳. فرض کنید m و n دو عدد صحیح متمایز و خالی از مربع باشند. میدان دومربعی $L = \mathbb{Q}(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ روی میدان مربعی $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$ دارای پایه صحیح است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل مبهم از K اصلی باشد.

نکته ۳.۳. برای یک میدان اعداد مربعی $K = \mathbb{Q}(\sqrt{m})$، واضح است که اگر $h_K = ۱$ آنگاه هر ایده‌آل مبهم از K یک ایده‌آل اصلی است. اما عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست؛ به عنوان مثال برای $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-۲۳})$ داریم $h_K = ۳$ ولی بنا به قضیه ۱.۳، هر ایده‌آل مبهم در $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-۲۳})$ یک ایده‌آل اصلی است.

نکته ۴.۳. ثابت می‌شود که "هر توسیع مربعی دلخواه" از یک میدان مربعی K، روی K دارای پایه صحیح است اگر و تنها اگر $h_K = ۱$، [۳، گزاره ۷.۲۶] .

مراجع

1. R. H. Bird and C. Parry, *Integral bases for bicyclic biquadratic fields over quadratic subfields*, Pacific J. Math. **66** (1976) 29–36.
2. N. Childress, *Class Field Theory*, Springer-Verlag, New York, 2009.
3. W. Narkiewicz, *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
4. H. Zantema, *Integer valued polynomials over a number field*, Manuscripta Math. **40** (1982) 155–203.

پست الکترونیکی: a.marefparvar@gmail.com
پست الکترونیکی: javadsharafi@kashanu.ac.ir

ارائه پوستری

احتمال و فرایندهای تصادفی

روشی ساده برای بررسی استقلال متغیرهای تصادفی در فضای دو بعدی

مهدی سلمان‌پور*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. هدف این مقاله دستیابی به یک روش آسان جهت بررسی استقلال دو متغیر تصادفی است در صورتی که تابع چگالی توأم آن‌ها موجود باشد. این روش کاربر را از یافتن احتمال‌های حاشیه‌ای در بررسی استقلال بی‌نیاز می‌سازد. این روش کارا برای متغیرهای گسسته و پیوسته مطلق این موضوع به‌طور جداگانه بررسی خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: تابع چگالی توأم، استقلال دو متغیر تصادفی، متغیر تصادفی پیوسته مطلق، عملگر تفاضلی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60E05, 60A05.

۱. مقدمه

موضوع استقلال در مطالعه رفتار وقایع تصادفی یکی از مفاهیم بنیادین به حساب می آید. وجود استقلال در میان متغیرهای تصادفی سبب می شود که آزمایشگر یا محقق بتواند به صورتی کاملا مجزا و بدون در نظر گرفتن اثر آن متغیر بر سایر متغیرها رفتار آنها را مطالعه نماید. در احتمال کلاسیک، به منظور بررسی استقلال دو متغیر تصادفی، ابتدا آزمایشگر رفتار احتمالاتی همزمان آن دو متغیر را به‌دست آورده و از روی آن رفتار احتمالاتی هر یک از متغیرها را به طور جداگانه می یابد تا با استفاده از تعریف استقلال دو متغیر تصادفی صحت گزاره استقلال را به‌دست آورد. در واقع فرض کنید دو متغیرتصادفی X و Y که می‌توانند گسسته یا پیوسته باشند، دارای تابع احتمال (یا تابع چگالی) کناری به ترتیب $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ و همچنین تابع احتمال توأم (چگالی توأم) $f_{X,Y}(x,y)$ باشند، در این صورت بنا به تعریف این دو متغیر از یکدیگر زمانی مستقلند که $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$که این رابطه باید برای نقاط حقیقی x و y که موجود در فضای تکیه‌گاه

$$S = \{(x,y) : f_X(x) \geq 0,\ f_Y(y) \geq 0\},$$

هستند، برقرار باشد. (برای تحقیق بیشتر مرجع [۲] را ببینید). در این مقاله سعی بر آن داریم تا با ارائه یک روش سریع و ساده، به راهکاری عمومی برای سنجش استقلال متغیرهای تصادفی دوبعدی بپردازیم. شیوه ای که در آن افراد از محاسبه تابع احتمالهای حاشیه ای در شرایط گسسته بودن و یا تابع چگالی های حاشیه ای در حال پیوسته در بررسی استقلال بی نیاز خواهند بود. در بخش ۲ شیوه خود را برای متغیرهای تصادفی دو بعدی گسسته با ذکر یک قضیه و نتیجه آن بحث خواهیم نمود و در بخش ۳ این شیوه را برای متغیرهای دوبعدی پیوسته مطلق با بیان قضیه ای مطرح خواهیم نمود.

۲. استقلال متغیرهای تصادفی گسسته

گیریم $P_{r,s} = P(X = x_r,\ Y = y_s)$ تابع احتمال توأم X و Y باشند و بدانیم که برای هر x_r و y_s موجود در تکیه‌گاه این تابع مثبت است. آنگاه

لم ۱.۲. اگر X و Y دومتغیر تصادفی گسسته و مستقل باشند،

الف) کسر $\frac{P_{r,s}}{P_{r-1,s}}$ به ازای تمام rها به متغیر s وابسته نباشد.

ب) کسر $\frac{P_{r,s}}{P_{r,s-1}}$ به ازای تمام sها به متغیر r وابسته نباشد.

* ارائه‌دهنده

اثبات. این لم به راحتی و به کمک تعریف استقلال دو متغیر تصادفی گسسته به‌دست می‌آید. □

قضیه ۲.۲. شرط لازم و کافی برای استقلال دو متغیر تصادفی گسسته است که

$$\Delta_s\Big(\frac{\Delta_r P_{r-1,s}}{P_{r-1,s}}\Big)=0,\quad \forall\, r,s, \tag{1}$$

و نیز

$$\Delta_r\Big(\frac{\Delta_s P_{r,s-1}}{P_{r,s-1}}\Big)=0,\quad \forall\, r,s, \tag{2}$$

که در آن Δ_* عملگر تفاضل مرتبه اول نسبت به متغیر $*$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید دو متغیر تصادفی X و Y مستقل باشند در این‌صورت بر اساس لم ۱.۲، خواهیم داشت که

$$\Delta_s\Big(\frac{\Delta_r P_{r-1,s}}{P_{r-1,s}}\Big)=\Delta_s\Big(\frac{P_{r,s}-P_{r-1,s}}{P_{r-1,s}}\Big)=\Delta_s\Big(\frac{P_{r,s}}{P_{r-1,s}}\Big), \tag{3}$$

رابطه اخیر برابر صفر است چرا که بر اساس لم ۱.۲، کسر $\frac{P_{r,s}}{P_{r-1,s}}$ وابسته به s نمی‌باشد. به‌طور مشابه می‌توان صفر بودن رابطه (۳) را نیز به‌دست آورد. حال، برعکس اگر فرض کنیم که رابطه (۱) برای هر r و s برقرار است با توجه به تساوی (۳)، $\Delta_s\Big(\frac{P_{r,s}}{P_{r-1,s}}\Big)=0$ و این بدان معناست که $\frac{P_{r,s}}{P_{r-1,s}}$ تنها تابعی از r مانند $g_1(r)$ می‌باشد. به طریق مشابه و با باز نمودن سمت راست معادله (۲) خواهیم داشت که $\Delta_r\Big(\frac{P_{r,s}}{P_{r,s-1}}\Big)=0$ است که این به معنای آن است که کسر $\frac{P_{r,s}}{P_{r,s-1}}$ صرفاً تابعی از s همانند $g_2(s)$ می‌باشد. بنابراین

$$\frac{P_{r,s}}{P_{r-1,s}}=g_1(r),$$
$$\frac{P_{r,s}}{P_{r,s-1}}=g_2(s),$$

با استفاده از روابط بازگشتی به راحتی می‌توان نوشت که

$$\frac{P_{r,s}}{P_{0,s}}=g_1(r)g_1(r-1)\cdots g_1(1), \tag{4}$$

$$\frac{P_{r,s}}{P_{r,0}}=g_2(s)g_2(s-1)\cdots g_2(1), \tag{5}$$

اکنون با قرار دادن مقدار صفر به جای s در رابطه (۴) به‌دست خواهد آمد که

$$P_{r,s}=P_{0,0}\prod_{i=1}^{r}g_1(i),$$

در صورت جای‌گذاری رابطه اخیر در رابطه (۵) داریم که

$$P_{r,s}=\begin{cases}P_{0,0}\prod_{i=1}^{r}g_1(i)\prod_{j=1}^{s}g_2(j), & r>1,\quad s>1,\\ P_{0,0}\prod_{i=1}^{r}g_1(i), & r>1,\quad s=0,\\ P_{0,0}\prod_{j=1}^{s}g_2(j), & r=0,\quad s>1.\end{cases} \tag{6}$$

از آن‌جا که $\sum_{r=0}^{R}\sum_{s=0}^{S}P_{r,s}=1$ که در آن R و S به ترتیب تعداد نقاط موجود در تکیه‌گاه متغیر تصادفی X و Y می‌باشد بنابراین با قرار دادن رابطه (۶) داریم که

$$P_{0,0}\Big[1+\sum_{r=1}^{R}\prod_{i=1}^{r}g_1(i)+\sum_{s=1}^{S}\prod_{j=1}^{s}g_2(j)+\Big(\sum_{r=1}^{R}\prod_{i=1}^{r}g_1(i)\Big)\Big(\sum_{r=1}^{R}\prod_{i=1}^{r}g_1(j)\Big)\Big]=1,$$

و در نتیجه

$$P_{\circ,\circ} = \Big(\frac{۱}{۱+\sum_{r=۱}^{R}\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}\Big)\Big(\frac{۱}{۱+\sum_{s=۱}^{S}\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}\Big), \tag{۷}$$

که با جایگذاری رابطه (۷) در رابطه (۶) به‌دست خواهد آمد که:

$$P_{r,s} = \Big(\frac{\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}{۱+\sum_{r=۱}^{R}\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}\Big)\Big(\frac{\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}{۱+\sum_{s=۱}^{S}\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}\Big), \quad \forall\, r>۱, s>۱,$$

$$P_{r,\circ} = \Big(\frac{\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}{۱+\sum_{r=۱}^{R}\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}\Big)\Big(\frac{۱}{۱+\sum_{s=۱}^{S}\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}\Big), \quad \forall\, r>۱,$$

$$P_{\circ,s} = \Big(\frac{۱}{۱+\sum_{r=۱}^{R}\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}\Big)\Big(\frac{\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}{۱+\sum_{s=۱}^{S}\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}\Big), \quad \forall\, s>۱.$$

اکنون برای استقلال دو متغیر تصادفی کافی است توابع احتمال حاشیه‌ای را محاسبه کنیم که به‌راحتی به‌صورت زیر به‌دست خواهند آمد که در این فرمول‌ها P_{r+} احتمال حاشیه‌ای مربوط به متغیر X در نقطه r و P_{+s} حاشیه‌ای مربوط به متغیر Y در نقطه s را نشان می‌دهد.

$$P_{r+} = \sum_{s=\circ}^{S} P_{r,s} = P_{r,\circ} + \sum_{s=۱}^{S} P_{r,s} = \frac{\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}{۱+\sum_{r=۱}^{R}\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)}, \quad r \geq ۱,$$

$$P_{+s} = \sum_{r=\circ}^{R} P_{r,s} = P_{\circ,s} + \sum_{r=۱}^{R} P_{r,s} = \frac{\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}{۱+\sum_{s=۱}^{S}\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}, \quad s \geq ۱,$$

$$P_{\circ+} = \sum_{s=\circ}^{S} P_{\circ,s} = P_{\circ,\circ} + \sum_{s=۱}^{S} P_{\circ,s} = \frac{۱}{۱+\sum_{r=۱}^{R}\prod_{i=۱}^{r} g_۱(i)},$$

$$P_{+\circ} = \sum_{r=\circ}^{R} P_{r,s} = P_{\circ,\circ} + \sum_{r=۱}^{R} P_{r,\circ} = \frac{۱}{۱+\sum_{s=۱}^{S}\prod_{j=۱}^{s} g_۲(j)}.$$

نتایج به‌دست آمده در بالا نشان می‌دهد که ازای جمیع مقادیر r و s همواره رابطه $P_{r,s} = P_{r+}P_{+s}$ برقرار می‌باشد که این به معنای استقلال دو متغیر از یکدیگر است. □

نتیجه زیر که از قضیه فوق به سادگی دریافت می‌شود یک شیوه آسان برای بررسی استقلال متغیرهای گسسته دو بعدی خواهد بود.

نتیجه ۳.۲. تحت شرایط قضیه ۲.۲، شرط لازم و کافی برای استقلال دو متغیر تصادفی گسسته آن است که کسر $\frac{P_{r,s}}{P_{r-۱,s}}$ مستقل از s و کسر $\frac{P_{r,s}}{P_{r,s-۱}}$ مستقل از مقدار r باشد.

۳. استقلال متغیرهای تصادفی پیوسته

در این بخش استقلال متغیرهای تصادفی مطلق را با روش جدید بررسی خواهیم نمود. برای این منظور قضیه زیر برقرار است.

قضیه ۱.۳. شرط لازم و کافی برای وجود استقلال دو متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته با تابع چگالی توأم $f(x,y)$ آن است که $\frac{\partial^۲}{\partial x \partial y}\log f(x,y) = \circ$.

اثبات. در این حالت اگر تابع چگالی حاشیه‌ای X و Y را به ترتیب با $f_X(x)$ و $f_Y(y)$ نشان دهیم با استفاده از تعریف استقلال خواهیم داشت که برای هر x و y حقیقی

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \Rightarrow \log f(x,y) = \log f_X(x) + \log f_Y(y)$$

با دو بار مشتق‌گیری از طرفین رابطه اخیر نسبت به x و y به راحتی مشخص است که حاصل برابر صفر خواهد شد. یعنی $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log f(x,y) = 0$. اکنون فرض کنید که $\frac{\partial}{\partial x} \log f(x,y)$ باشد این بدان معناست که باید صرفاً تابعی از x باشد تا مشتق آن نسبت به y صفر گردد؛ یعنی تابعی مانند $h_1(x)$ وجود دارد به‌نحوی که $\frac{\partial}{\partial x} \log f(x,y) = h_1(x)$ با انتگرال‌گیری از این رابطه نسبت به x داریم که $\log f(x,y) = \int h_1(x)dx + C(y)$ که در آن C تابعی برحسب y می‌باشد. این نتیجه بلافاصله بیان می‌کند که $f(x,y) = \exp\left(\int h_1(x)dx\right)\exp\left(C(y)\right)$ که حاصلضرب دو تابع یکی صرفاً برحسب x و دیگری صرفاً از y است که در نتیجه استقلال دو متغیر X و Y بنا بر قضیه صفحه ۸۰ مرجع [۱] اثبات می‌گردد. □

نتیجه زیر از قضیه بالا یک الگوی ساده و راهگشا در مطالعه استقلال متغیرهای پیوسته دو بعدی خواهد بود.

نتیجه ۲.۳. اگر X و Y دو متغیر تصادفی پیوسته مطلق با تابع چگالی توأم $f(x,y)$ باشند شرط لازم و کافی برای آن‌که این دو متغیر از هم مستقل باشند آن است که $\frac{\partial}{\partial x} \log f(x,y)$ مستقل از y و $\frac{\partial}{\partial y} \log f(x,y)$ مستقل از x باشد.

مراجع

1. D. A. S. Fraser, *Statistics: An Introduction*, Wiley, New York, 1960.
2. V. K. Rohatgi and A. K. MD. E. Saleh, *An Introduction to Probability and Statistics*, 2nd ed., Wiley, New-York, 2001.

پست الکترونیکی: salmanpour@kashanu.ac.ir

ارائه‌های پوستری

آمار

مجموع وزنی متغیرهای تصادفی وابسته القا شده با توابع مفصل

عبدالصالح توغدری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
و رسول روزگار
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. در این مقاله، فرض می‌کنیم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 وابسته با وزن‌های W و $1-W$ باشند. توزیع توأم متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به کمک توابع مفصل بیان می‌شود. ابتدا، تابع توزیع مجموع وزنی متغیرهای تصادفی وابسته القا شده با توابع مفصل را محاسبه می‌کنیم و سپس متوسط اندازه ریسک شرطی را محاسبه می‌کنیم. در ادامه ویژگی‌های مختلف متغیر تصادفی مجموع را مورد مطالعه قرار داده و اثبات می‌کنیم. در پایان، به ارائه مثال می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: توابع مفصل، وابستگی، مجموع وزنی، ریسک، مخاطره شرطی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

مطالعه توزیع مجموع وزنی متغیرهای تصادفی در علم آمار، بیمه، در مدیریت ریسک، تئوری قابلیت و همچنین در شاخه‌های مختلف علم از جمله اقتصاد و احتمال نظری دارای کاربرد فراوان است. در [۷] به مطالعه توزیع مجموع متغیرهای تصادفی وابسته با وزن‌های معلوم و ثابت پرداخته است، و همچنین متغیرهای تصادفی وابسته بدون وزن در مقالات [۲] و [۹] بحث و بررسی شده است. از طرفی [۸] به رفتار حدی میانگین وزنی متغیرهای تصادفی دم سنگین متقارن پرداخته است. در [۶] توزیع مجموع متغیرهای تصادفی با توابع مفصلی وابسته القا شده مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین [۵] به محاسبه بهینه تنزل کوتاه مورد انتظار (SE) در سبد سرمایه با توابع مفصلی پرداخته است. در [۳] و [۱۰] تأثیر وابستگی بر روی توزیع تابع‌هایی از متغیرهای تصادفی بحث و بررسی شده است.

همچنان که از نتایج محققان علوم آماری و اقتصادی مشهود است، اندازه ارزش در معرض ریسک در بسیاری از زمینه‌های مالی به عنوان معیار اندازه‌گیری ریسک [۱] مورد استفاده قرار گرفته است. از آن‌جایی که برای موارد خاص نظیر استقلال متغیرهای تصادفی یا نرمال بودن توزیع توأم (X_1, X_2) ویژگی‌ها و رفتار مجموع متغیرهای تصادفی یعنی Z شناخته شده است، که در مقالات مختلف و در کتاب‌های آمار و احتمال به طور مفصل بحث شده است. برای آن‌که شرط استقلال را حذف کنیم، به ابزاری نیاز داریم تا بتوانیم ویژگی‌های مجموع متغیرهای تصادفی را در حالت واقعی مورد مطالعه قرار دهیم، لذا از تابع مفصل برای حل این مشکل، و به طور ویژه از توابع مفصل خاصی نظیر FGM، گوسین، فرنگ و گامبل استفاده می‌کنیم. برای متغیرهای تصادفی دو متغیره وابسته با وزن معلوم در [۴] تحقیق و مطالعه شده است. در مقاله [۴] متغیر تصادفی Z را برای توزیع حاشیه‌ای و تابع مفصلی خاص مورد استفاده قرار داده است.

در کاربردهای مالی و اقتصاد، بیمه و همچنین مدل‌بندی روابط بین متغیرهای تصادفی وابسته وزنی مورد نیاز است. بردار (X_1, X_2) را که متغیرهای تصادفی وابسته و نیز وزن W متغیر است را در نظر بگیریم. از آن‌جایی که در محیط واقعی وزن متغیرهای تصادفی معین نیست و تصادفی است، لذا با استاندارد کردن وزن می‌توان آن را در بازه $[0, 1]$ در نظر گرفت. موضوع مورد علاقه در مقاله بررسی ویژگی‌های مجموع متغیر $Z = WX_1 + (1-W)X_2$ است، که در آن X_1 و X_2 متغیرهایی با تابع توزیع توأم و W وزن در بازه

* ارائه‌دهنده

$[۰, ۱]$ تعریف شده است. به عنوان مثال در بیمه می‌توان $X_۱$ و $X_۲$ را هزینه پرداخت شده برای بیمه شخص ثالث و بیمه بدنه خودرو در نظر گرفت که هریک از این متغیرهای تصادفی با وزن‌ها و با شدت نامعلوم رخ می‌دهند، که در این مقاله شدت رخ دادن را با W نشان می‌دهیم. هدف محاسبه مجموع خسارات وارد شده یعنی Z می‌باشد که در این تحقیق ویژگی‌های آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

در مطالعه مجموع متغیرهای تصادفی وزنی برای محاسبه ویژگی‌ها و رفتار آن ابتدا به مطالعه تابع توزیع آن پرداخته می‌شود. از طرفی در بیمه موضوع مورد علاقه محاسبه میزان زیانی است، که طی یک دوره معین درآمد شرکت بیمه رخ داده است، و همچنین عواملی که به افزایش سود و یا کاهش آن دخیل هستند، و کم کردن تأثیر عوامل زیان آور حائز اهمیت است. از طرفی محاسبه الگویی ریاضی و عملی برای عوامل تأثیرگذار بر درآمد شرکت بیمه موضوع این مقاله است.

لذا با این بیان، در این مقاله برآن هستیم، تا ابتدا F_Z را به‌دست آوریم. با این تفکر که در امور بیمه‌ای و یا در مسائلی که نتیجه به چندین متغیر تصادفی وابسته با وزن‌های وابسته مربوط است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین $E(Z \mid Z \leq z)$ در بازه $[۰, ۱]^۲$ محاسبه می‌شود و فرض می‌شود متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ وابسته باشند. همچنین شدت یا وزن رخ دادن آن‌ها تصادفی باشد. از سوی دیگر، فرض می‌شود وزن‌ها به متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$ وابسته باشند، با این مفروضات به دنبال بررسی رفتار عبارت $Z = WX_۱ + (۱ - W)X_۲$ هستیم.

۲. نتایج اصلی

قضیه ۱.۲. اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی وابسته با وزن‌های تصادفی باشند. آنگاه تابع توزیع مجموع متغیرهای تصادفی وزن‌دار Z عبارت است از

$$F(z) = \mu_c(B_z) = \int_{B_z} c d\lambda,$$

که در آن $Z = WX_۱ + (۱ - W)X_۲$، λ اندازه لبگ و c چگالی تابع مفصلی و μ یک تابع اندازه است.

اثبات. ناحیه انتگرال A_z را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A_z = \{w \in (۰, ۱), (x_۱, x_۲) \in R^۲, \omega x_۱ + (۱ - \omega)x_۲ \leq z\},$$

و تابع $\varphi : R^۲ \longrightarrow [۰, ۱]^۲$ تعریف می‌کنیم، و B_z از رابطه $B_z = \varphi(A_z)$ به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_۰^۱ P(WX_۱ + (۱ - W)X_۲ \leq z \mid W = \omega) f_W(\omega) d\omega \\ &= \int_۰^۱ \int_{A_z} h(x_۱, x_۲) dx_۱ dx_۲ d\omega = \int_۰^۱ \int_{B_z} c(u_۱, u_۲) du_۱ du_۲ d\omega. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۲. اگر $X_۱$ و $X_۲$ متغیرهای تصادفی وابسته و W وزن متغیرهای تصادفی $X_۱$ و $X_۲$، و $F_Z(z), Z \in R$ تابع توزیع متغیر تصادفی $Z = WX_۱ + (۱ - W)X_۲$ باشد، آنگاه

$$E(Z \mid Z \leq z) = \frac{۱}{F(z)} \int_{A_Z} (\omega F_۱(u_۱) + (۱ - \omega)F_۲(u_۲)) c(u_۱, u_۲) f(\omega) du_۱ du_۲.$$

اثبات. ناحیه انتگرال A_Z را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$A_Z = \{w \in (۰, ۱), (x_۱, x_۲) \in R^۲, \omega x_۱ + (۱ - \omega)x_۲ \leq z\}.$$

اگر $\Im = \{G : G \in A_Z\}$، یک σ-میدان باشد. داریم

$$\Im = \{(\omega, X) : \omega X_1 + (1-\omega)X_2 \leq z\}.$$

حال امید شرطی Z به شرط $Z \leq z$ را محاسبه می‌کنیم. ابتدا ناحیه $D = ((f_1 > 0) \times (f_2 > 0))$ را در نظر می‌گیریم. همچنین، رابطه $A_Z \subset D \Rightarrow A_Z \bigcap D = A_Z$ برقرار است.

$$\begin{aligned} E(Z \mid \Im) &= E(Z \mid Z \leq z) = E(\omega X_1 + (1-\omega)X_2 \mid \omega X_1 + (1-\omega)X_2 \leq z) \\ &= \int_{A_Z} (\omega x_1 + (1-\omega)x_2) c(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۲. اگر X_1 و X_2 متغیرهای تصادفی وابسته و W وزن متغیرهای تصادفی X_1 و X_2، و $F_Z(z), Z \in R$ تابع توزیع متغیر تصادفی مجموع $Z = WX_1 + (1-W)X_2$ باشد، آنگاه تابع مولد گشتاور متغیر تصادفی Z عبارت است از

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(tz) \int_0^1 f(\omega) \{\frac{\partial}{\partial z} \int_{B_Z} c(u_1, u_2) du_1 du_2\} d\omega dz.$$

اثبات. ناحیه انتگرال B_Z را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$B_Z = \{w \in (0,1), (x_1, x_2) \in R^2 : \omega x_1 + (1-\omega)x_2 \leq z\}.$$

در این‌صورت تابع مولد گشتار عبارت خواهد بود از

$$\begin{aligned} M_Z(t) = E(\exp(tZ)) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} F(z) \exp(tz) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} (\int_0^1 \int_{B_z} c(u_1, u_2) du_1 du_2 f(\omega) d\omega) \exp(tz) dz. \end{aligned}$$

□

نتیجه ۴.۲. در این مقاله، به مطالعه توزیع متغیرهای تصادفی وابسته به کمک توابع مفصلی پرداخته شد و امید ریاضی شرطی محاسبه شد. از سوی دیگر به این نتیجه رسیدیم که تابع توزیع محاسبه شده، ویژگی‌های تابع توزیع را دارد و در پایان به بیان یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۵.۲. در حوادث طبیعی نیز این رابطه بین متغیرها تصادفی دیده می‌شود. مثلاً وقتی‌که سیل همراه با بادهای تند باشد، در این‌صورت X_1 خسارت سیل و X_2 خسارت طوفان یا بادهای تند است. متغیر W هم شدت رخ دادن این خسارت‌ها است. در این‌صورت به کمک رابطه‌ای که به‌دست آوردیم، می‌توانیم مجموع خسارت وارده را محاسبه کنیم.

اگر X_1 و X_2 دارای توزیع نمایی با پارامتر $\frac{1}{2}$ و W دارای توزیع یکنواخت در بازه $[0, 1]$ باشد. در این‌صورت تابع توزیع $Z = WX_1 + (1-W)X_2$ به کمک تابع مفصل FGM عبارت است از

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \int_0^1 P(WX_1 + (1-W)X_2 \leq z \mid W = \omega) f_W(\omega) d\omega \\ &= \int_0^1 \int_{A_z} h(x_1, x_2) dx_1 dx_2 d\omega = \int_0^1 \int_{B_z} c(u_1, u_2) du_1 du_2 d\omega \\ &= \int_0^1 \int_{B_z} [1 + \theta(1-2u_1)(1-2u_2)] du_1 du_2 d\omega. \end{aligned}$$

سپاس‌گزاری

از کمیته برگزاری کنفرانس و از اساتید و داوران محترم که در به سرانجام رسیدن این مقاله ما را یاری کردند مراتب سپاس‌گزاری خود را اعلام می‌داریم.

مراجع

1. C. Bolancé, Z. Bahraoui and M. Artís, *Quantifying the risk using copulae with nonparametric marginals*, Insurance Math. Econom. (2014) 46–56.
2. E. Bølviken and M. Guillén, *Risk aggregation in Solvency II through recursive log-normals*, Insurance Math. Econom. **73** (2017) 20–26.
3. A. Dolati, R. Roozegar, Najmeh Ahmadi and Z. Shishebor, *The effect of dependence on distribution of the functions of random variables*, Commun. Stat. Theory Methods **46** (21) (2017) 10704–10717.
4. F. Domma and S. Giordano, *A copula-based approach to account for dependence in stress–strength models*, Statist. Papers **54** (3) (2013) 807–826.
5. I. Gijbels and K. Herrmann, *Optimal expected-shortfall portfolio selection with copula-induced dependence*, Appl. Math. Finance **25** (1) (2018) 66–106.
6. I. Gijbels and K. Herrmann, *On the distribution of sums of random variables with copula-induced dependence*, Insurance Math. Econom. **59** (2014) 27–44.
7. J. Navarro and J. Sarabia, *Copula representations for the aggregation of dependent risks: models and comparisons*, Prob. Eng. Info. Sci. (2020). DOI:10.1017/S0269964820000649
8. R. Roozegar, *Limiting behavior of randomly weighted averages of symmetric heavy–tailed random variables*, Commun. Stat. Theory Methods **46** (9) (2017) 4539–4544.
9. J. M. Sarabia, E. Gómez-Déniz, F. Prieto and V. Jordá, *Aggregation of dependent risks in mixtures of exponential distributions and extensions*, ASTIN Bull. J. IAA **48** (2018) 1079–1107.
10. A. R. Soltani and R. Roozegar, *On distribution of randomly ordered uniform incremental weighted averages: Divided difference approach,* Stat. Prob. Letters **82** (2012) 1012–1020.

پست الکترونیکی: rroozegar@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: toghdori.saleh@yahoo.com

مقایسه مدل‌بندی داده‌های بورس اوراق بهادار با استفاده از روش ماشین‌های بردار پشتیبان و رگرسیون نیمه پارامتری

آرتا روحی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
فاطمه جهادی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
مهدی روزبه
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران
و سعید زالزاده
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران

چکیده. با توجه به نوسانات بازار بورس اوراق بهادار پیش‌بینی این بازار بسیار مورد توجه قرارگرفته‌است. مطالعه رفتار سهام بسیار پیچیده می‌باشد زیرا تا حد زیادی وابسته به اقتصاد و سیاست است. در این تحقیق تلاش بر این است که بتوان شیوه‌ای برای پیش‌بینی این بازار به‌دست آورد. با استفاده از شیوه‌های رگرسیون بردار پشتیبان با چهار هسته متفاوت و رگرسیون نیمه پارامتری، به مدل‌سازی داده‌های یک سهام به‌صورت تصادفی می‌پردازیم. با انتخاب سهام های‌وب با فرکانس روزانه به‌دنبال بهترین برآورد قیمتی با توجه به مدل‌های مذکور هستیم. مدل رگرسیون بردار پشتیبان با خطای ۰/۱ با هسته گوسی برآورد مناسب‌تری نسبت به مجذور همبستگی، ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین انحراف درصد خطای مطلق دارد.

واژه‌های کلیدی: پیش‌بینی سهام، رگرسیون ماشین‌های بردار پشتیبان، مدل رگرسیون نیمه پارامتری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 62j05, 62G08.

۱. پیش‌گفتار

سیستم‌های معاملات با توجه به ویژگی‌های سری زمانی مالی، زمانی که توسعه‌می‌یابد با چالش‌های مختلفی روبرو می‌شود [۴]. یادگیری ماشین شاخه جدیدی از تجزیه و تحلیل آماری است که از قدرت محاسباتی گسترده‌ای که توسط رایانه‌ها برای تجزیه و تحلیل داده‌های بزرگ می‌باشد، استفاده می‌کند. یکی از زمینه‌هایی که بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد، پیش‌بینی بازار سهام با استفاده از الگوریتم‌های یادگیری ماشین است. طبقه‌بندی‌کننده‌ها سیستم‌هایی هستند که می‌توانند از طریق آموزش یاد بگیرند که الگوهایی را بشناسند و بدین ترتیب کلاس را به داده‌های جدید اختصاص دهند. به‌عنوان مثال، الگوریتم‌های یادگیری ماشین را می‌توان برای پیش‌بینی ورشکستگی استفاده کرد، برای اطلاعات بیشتر می‌توان به [۳] و [۷] مراجعه کرد.

روش ماشین‌های بردار پشتیبان یکی از روش‌های برآورد در یادگیری ماشین می‌باشد. این روش ابتدا داده‌ها را به دو قسمت تقسیم می‌کند که قسمت اول مربوط به داده‌های آموزش است که ۷۰ درصد کل داده‌ها را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند و سپس مدل انتخاب شده روی داده‌های آزمون را امتحان می‌کند و اگر مقدار همبستگی بالایی داشته باشد بدین معنی است که مدل انتخاب شده مناسب می‌باشد. روش دیگری که برای ساختن مدل روی داده‌ها به‌کار بردیم، روش کلاسیک رگرسیون نیمه‌پارامتری است که علاوه بر کاربرد گسترده این مدل در تحلیل کواریانس، کاربرد زیادی در مسائل اقتصادی دارد که از مهمترین آن‌ها می‌توان به مدل تابع درآمد منحنی دستمزد [۳] و سرمایه انسانی [۶] که مدل فوق ترکیبی از مدل‌خطی و مدل ناپارامتری می‌باشد، اشاره کرد. مدل‌های رگرسیون نیمه پارامتری نخستین بار توسط [۲] در بررسی رابطه میان مصرف ماهیانه برق به‌عنوان متغیر پاسخ و قیمت ماهیانه برق، درآمد ماهیانه و دمای هوا به‌عنوان متغیرهای پیشگو، با در نظرگرفتن قیمت ماهیانه برق و

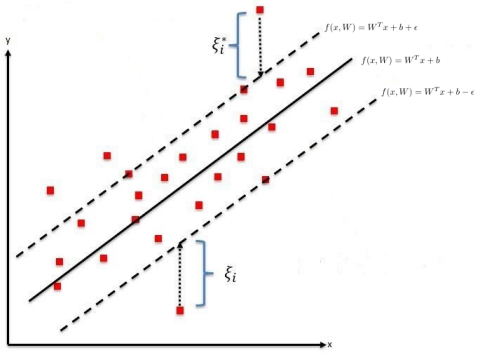
* ارائه‌دهنده

درآمد ماهیانه به‌عنوان بخش خطی و دمای هوا به‌عنوان بخش غیرخطی مورد استفاده قرار گرفتند. برای به‌دست آوردن پارامترها و شیوه‌های برآورد می‌توان به [۱] مراجعه کرد.

۲. رگرسیون بردار پشتیبان

این روش توسط وپنیک [۵] به وجود آمده است، ماشین‌های بردار پشتیبان (SVM) در طبقه‌بندی بسیار قوی هستند اما در رگرسیون شناخته‌شده نیستند. رگرسیون بردار پشتیبان (SVR) یک حالت از ماشین‌های بردار پشتیبان است که به جای گرفتن مقادیر گسسته ۱− و ۱ در متغیرهای پاسخ، مقادیر پیوسته قرار می‌گیرد.

همان‌طور که در شکل ۱ مشخص است در روش SVR با در نظر گرفتن حاشیه‌ها، هرچه تعداد داده بیشتری درون حاشیه قرار بگیرد، مدل مناسب‌تر می‌باشد. در این بخش هدف ساخت مدل روی داده‌های $\{x_k, y_k\}_{k=1}^{N}$ با استفاده از رگرسیون بردار پشتیبان است که مقدار متغیر پاسخ آن پیوسته است.



شکل ۱. مدل رگرسیون بردار پشتیبان.

در روش SVR خطا قرار نیست کمینه شود بلکه قرار است محدوده‌ای داشته باشد که در یافتن مقادیر پیش‌بینی بتواند منعطف‌تر باشد. پس این مدل به ما انعطاف پذیری می‌دهد تا تعیین کنیم چه مقدار خطا در مدل قابل قبول است.

مدل رگرسیون بردار پشتیبان به‌صورت زیر است

$$y = W^\top x + b + \epsilon,$$

که ξ_i و ξ_i^* فاصله‌ی داده‌های خارج از حاشیه از خط حاشیه می‌باشد. اکنون برآورد ضرایب را می‌توان با کمینه کردن معادله زیر به‌دست آورد

$$\frac{1}{2}\|w\|^2 + c\sum_{i=1}^{n}(\xi_i + \xi_i^*).$$

با توجه به شروط زیر

$$(w^\top x_i + b) - y_i \le \epsilon + \xi_i, \quad y_i - (w^\top x_i + b) \le \epsilon + \xi_i^*, \quad \xi, \xi^* \ge 0.$$

۳. رگرسیون نیمه‌پارامتری

مدل نیمه‌پارامتری ترکیبی از رگرسیون پارامتری و ناپارامتری می‌باشد. با داشتن داده‌های $(Y_1, x_1, t_1), \ldots, (Y_b, x_n, t_n)$ می‌توان مدل نیمه‌پارامتری را به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$Y = x_i^{'}\beta + f(t_i) + \epsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

به‌طوری‌که داریم $x_i^{'} = (X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ip})$ و $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p)^{'}$ یک برداری با بعد p با پارامترهای ناشناخته است، f تابع هموار و نامعلوم، t ها عضو یک مجموعه فشرده و به‌صورت $t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$ مرتب شده‌اند و به‌گونه‌ای که n تعداد مشاهدات در نمونه است و $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n)^{'}$ خطای تصادفی با توزیع نرمال مستقل و یکسان با میانگین صفر و واریانس σ^2 می‌باشد.

معیارهایی که برای ارزیابی مدل‌های مورد بررسی استفاده می‌شود عبارتند از ریشه میانگین مربعات خطا (RMSE) و استفاده از میانگین درصد خطای مطلق و یا میانگین انحراف درصد خطای مطلق (MAPE) می‌باشد که فرمول‌های محاسباتی آن‌ها به‌صورت زیر است:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}(d_i - \hat{d}_i)^2}, \qquad MAPE = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T}\left|\frac{d_i - \hat{d}_i}{d_i}\right|,$$

به‌طوری‌که در فرمول بالا d_i مقدار واقعی داده‌ها، $\hat{d}_i$ مقدار برازش شده و T نمونه‌های آزمون کل است. بدیهی است که نتایج آزمون‌های فوق هرچه کمتر باشد مناسب‌تر است.

۴. دستاوردهای پژوهش

با در نظرگرفتن اطلاعات سهام های‌وب از سایت مرکز پردازش اطلاعات مالی ایران در بازه زمانی ۴۳۲ روزه و داشتن اطلاعات قیمت ابتدایی، کمترین قیمت، بیشترین قیمت، حجم معاملات و قیمت بسته‌شدن سهم در یک روز با استفاده از دو روش رگرسیون بردار پشتیبان و رگرسیون نیمه‌پارامتری، به‌دنبال یافتن مدل مناسب و پیش‌بینی سهام مورد نظر هستیم. در این داده‌ها، قیمت پایانی را متغیر وابسته و بقیه متغیرها را مستقل در نظر می‌گیریم. پژوهش انجام شده در نرم افزار R برای رگرسیون بردار پشتیبان توسط پکیج e1071 و دستور tune و برای رگرسیون نیمه پارامتری از پکیج locfit و دستور ksmooth استفاده شده است.

۱.۴. ماشین‌های بردار پشتیبان.

در این قسمت با در نظر گرفتن مدل زیر داریم:

$$(۱) \qquad \begin{aligned} ClosePrice = {} & w_0 + w_1 Pdata + w_2 VolumeTrade \\ & + w_3 PriceFirst + w_4 PriceMin + w_5 PriceMax + \epsilon. \end{aligned}$$

برآورد ضرایب مدل (۱) با هسته‌های متفاوت را می‌توان در جدول ۱ مشاهده کرد. در جدول ۲ مدل‌های بسته شده روی داده‌ها براساس سه معیار مجذور همبستگی، ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین درصد خطای مطلق مقایسه شد. اکنون با تغییر مقدار خطا از صفر به ۰/۱ در مدل گوسی به دنبال مدلی منعطف‌تر هستیم. همان‌طور که در جدول ۲ آشکار است، مدل گوسی شعاعی با پارامترهای $\gamma = 0/25$ ، $c = 100$ ، $\epsilon = 0/1$ و تعداد بردارهای پشتیبان ۲۷ نسبت به مدل گوسی با خطای صفر باتوجه به افزایش مجذور همبستگی و کاهش ریشه میانگین مربعات خطا مدلی مناسب‌تر می‌باشد.

جدول ۱. برآورد ضرایب در مدل (۱) به‌روش ماشین‌های بردار پشتیبان با هسته‌های متفاوت.

برآوردگر	SVR(خطی)	SVR(چندجمله‌ای)	SVR(سیگموید)	SVR(شعاعی، $\epsilon = 0$)	SVR(شعاعی، $\epsilon = 0/1$)
$\hat{w}_0$	−۰/۰۴۸	۰/۲۳	−۰/۴۵	−۱/۰۲	−۱/۲۲
$\hat{w}_1$	۰/۰۶۹	۲۴/۱۷	۱/۳۳	۱۶/۰۹	۱۴/۳۲
$\hat{w}_2$	−۰/۰۶۵	۶/۳۷	−۱/۷۲	−۱۱/۰۶	−۱۳/۶۴
$\hat{w}_3$	−۰/۰۹	۲۷/۷۰	۴/۸۰	۱۸/۱۰	۱۲/۵۵
$\hat{w}_4$	−۰/۲۹	۲۷/۹۳	۴/۷۹	۱۶/۷۷	۱۲/۹۸
$\hat{w}_5$	۱/۳۱	۲۷/۶۰	۴/۸۸	۲۰/۸۹	۱۵/۳۱

جدول ۲. مقایسه ماشین‌های بردار پشتیبان با هسته‌های متفاوت در مدل (۱) براساس معیارهای برازش متفاوت.

مدل	هسته	مجذور همبستگی	ریشه میانگین مربعات خطا	میانگین درصد خطای مطلق
SVR	خطی	۰/۸۲	۳۶۹۹/۵۶۲	۰/۱۹
SVR	چندجمله‌ایی	۰/۸۳	۳۶۲۹/۴۴	۰/۲۲
SVR	سیگموید	۰/۵۵	۵۸۸۵/۹۴۶	۰/۵۱۳۳
SVR	گوسی($\epsilon = ۰$)	۰/۹۵	۱۹۶۸/۱۴۱	۰/۰۱۸
SVR	گوسی($\epsilon = ۰/۱$)	۰/۹۷	۱۴۵۱/۳۲۹	۰/۰۵۵

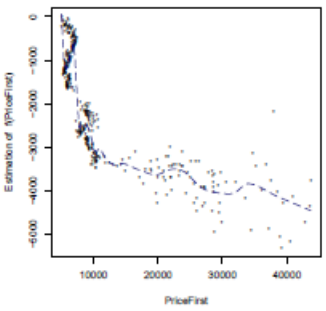
۲.۴. **مدل نیمه پارامتری.** برای برازش این مدل، ابتدا به‌دنبال تعیین رابطه پارامتری و ناپارامتری متغیرهای مستقل با متغیر وابسته بوده و سپس به برآورد ضرایب پارامتری و برازش تابع ناپارامتری می‌پردازیم.

در این‌جا با استفاده از نمودار متغیر افزوده بخش ناپارامتری مدل را تشخیص دهیم. نمودار متغیر افزوده به طور شهودی اثر هر یک از متغیرهای پیشگو را پس از حذف اثر سایر متغیرهای پیشگو، بر متغیر پاسخ آشکار می‌کند و بخش ناپارامتری مدل را تشخیص می‌دهد و مدل به‌صورت زیر می‌باشد:

$$ClosePrice = \underbrace{\beta_۰ + \beta_۱ Pdata + \beta_۲ VolumeTrade + \beta_۳ PriceMin + \beta_۴ PriceMax}_{\text{قسمت پارامتری}} + \underbrace{f(PriceFirst)}_{\text{قسمت ناپارامتری}} + \epsilon. \quad (۲)$$

برآورد ضرایب و برازش قسمت ناپارامتری (قیمت ابتدایی سهم) بر اساس مدل نیمه پارامتری (۲) در شکل ۲ نشان داده شده است. همان‌طور که در جدول ۳ مشخص است، ارزیابی و مقایسه رگرسیون نیمه پارامتری با رگرسیون بردار پشتیبان با هسته گوسی و خطای ۰/۱ توسط سه معیار مجذور همبستگی، ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین درصد خطا مطلق قرار داد.

برآوردگر	مدل نیمه پارامتری (قسمت پارامتری)
$\hat{\beta}_۰$	۰
$\hat{\beta}_۱$	۹/۵۸۴۷۵۳
$\hat{\beta}_۲$	$۱/۶۷۵۲۴۷e^{-۰۶}$
$\hat{\beta}_۳$	$۵/۴۳۷۴۸۰e^{-۰۱}$
$\hat{\beta}_۴$	$۴/۶۱۷۷۵۲e^{-۰۱}$



شکل ۲. نمودار سمت راست برازش تابع ناپارامتری و جدول سمت چپ برآورد ضرایب قسمت پارامتری مدل (۲).

مقدار مجذور همبستگی مدل SVR بیشتر و مناسب تر از مدل نیمه پارامتری است و ریشه میانگین مربعات خطا و میانگین درصد خطا مطلق هم به‌دلیل این‌که عددی پایین‌تر می‌باشد، پس مناسب‌تر از مدل نیمه پارامتری می‌باشد. مشخص شد که مدل رگرسیون بردار پشتیبان با هسته شعاعی و خطای ۰/۱ بهترین برازش را در مقایسه با سایر مدل‌های SVR با هسته‌های متفاوت و مدل نیمه پارامتری کلاسیک داشته است.

جدول ۳. مقایسه روش نیمه پارامتری با مدل رگرسیون بردار پشتیبان با هسته گوسی براساس معیارهای برازش.

آزمون	مدل رگرسیون نیمه پارامتری	مدل SVR با هسته شعاعی ($\epsilon = ۰/۱$)
مجذور همبستگی	۰/۹۰	۰/۹۷
ریشه میانگین مربعات خطا	۲۷۱۹/۱۵۱	۱۴۵۱/۳۲۹
میانگین درصد خطای مطلق	۰/۶۳	۰/۰۵۵

مراجع

۱. م. روزبه و م. امینی، برآوردگر استوار مرزبندی شده تعمیم یافته محتمل در مدل رگرسیون نیمه‌پارامتری، مجله علوم آماری **۱۳** (۱۳۹۸) ۴۴۱–۴۶۰.

2. R. F. Engle, C. W. J. Granger, J. Rice and A. Weiss, *Semiparametric Estimates of the Relation Between Weather and Electricity Sales*, J. Amer. Stat. Association **81** (1986) 310–320.
3. L. J. Kao, C. C. Chiu, C. J. Lu and J. L. Yang, *Integration of nonlinear independent component analysis and support vector regression for stock price forecasting*, Neurocomputing **99** (2013) 534–542.
4. B. G. Malkiel and E. F. Fama, *Efficient capital markets: A review of theory and empirical work*, J. Finance **25** (2) (1970) 383–417.
5. V. N. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning Theory*, Springer, New York, 1995.
6. R. J. Willis, *Wage determinants: A survey and reinterpretation of human capital earnings functions*, in: O. Ashenfelter and R. Layard (eds.), Handbook of Labor Economics, **1**, Amesterdam North-Holand, 1986, 525–602.
7. Y. Xiao, J. Xiao, F. Lu and S. Wang, *Ensemble anns-pso-ga approach for day-ahead stock e-exchange prices forecasting*, Int. J. Comput. Intel. Sys. **7** (2014) 272–290.

پست الکترونیکی: Arta_rohi@semnan.ac.ir
پست الکترونیکی: jahadi_fateme@semnan.ac.ir
پست الکترونیکی: mahdi.roozbeh@semnan.ac.ir
پست الکترونیکی: szalzadeh@semnan.ac.ir

یک شرط معادل برای اصل ارشمیدسی در نظریه مطلوبیت

مهدی شمس*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. نظریه مطلوبیت یکی از شاخه‌های مهم در نظریه تصمیم است. در این مقاله ابتدا یک رابطه برتری (رابطه متعدی و کامل) روی بخت‌آزمایی‌ها تعریف می‌شود و پس از تعریف پیوستگی رابطه برتری و اصل استقلال و شرط مابینی و تعریف تابع مطلوبیت متناظر با رابطه برتری مذکور، یک شرط لازم و کافی برای برقراری اصل ارشمیدسی بیان می‌شود.
واژه‌های کلیدی: رابطه برتری، تابع مطلوبیت، اصل استقلال، اصل ارشمیدسی، پیوستگی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 91B16, 91B24, 91B06.

۱. پیش‌گفتار

در نظریه تصمیم آماری، به یک مدل ریاضی یا ساختار ترتیب بین نتایج ممکن نیاز است که این فرضیات به منظور انتخاب یک عمل برای حدس یک حالت طبیعت خاص مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطلوبیت یک تابع است که روی نتایج مختلف اعمال شده و درجه تمایل نسبی این نتایج را با یک معیار عددی اندازه‌گیری می‌کند. نماد مطلوبیت (در مقابل زیان) علاوه بر آمار، در اقتصاد و نظریه بازی که به مرتب کردن نتایج اعمال یا تصمیم‌ها نیاز است نیز کاربرد دارد. نتایج (یا پاداش‌ها) نمادهای عمومی هستند که مجموعه برامدها از عمل سازنده تصمیم را خلاصه می‌کنند. مثلاً این پاداش‌ها می‌توانند سود پولی یا زیان ناشی از یک تصمیم و در نظریه براورد، اندازه فاصله بین براورد و مقدار واقعی پارامتر باشند.

نظریه مطلوبیت مورد انتظار بیان می‌کند برتری‌های یک نماینده منطقی روی گزینه‌های پرمخاطره را می‌توان توسط امید ریاضی مطلوبیت‌ها برای برامدهای گزینه‌های ممکن مرتب‌سازی کرد. در اوایل دهه ۱۹۴۰، ون‌نیومن و اسکار مورگنسترن [۱۰] برای تحلیل راهبرد موقعیت‌های نبرد، نظریه مطلوبیت مورد انتظار را به عنوان نظریه غالب برای رفتار منطقی موقعیت‌هایی که برامدهای تصمیم‌ها به‌صورت احتمالی با اعمال اختیار شده در ارتباط هستند ارائه دادند که در علم اقتصاد خرد کاربرد دارند. انتقادهای افرادی نظیر موریس آلایس [۱] و وارد ادواردز [۳] منجر به رشد نظریه مطلوبیت شد.

رابطه دوتایی متعدی و انعکاسی $\succcurlyeq$ دارای خاصیت پیوستگی هرشتاین–میلنر است، هرگاه برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \in \Delta(X)$، مجموعه

$$\{\lambda \in [0,1] \mid \lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\rho} \succcurlyeq \boldsymbol{\sigma}\},$$

بسته باشد [۲]. ثابت می‌شود اگر $\succcurlyeq$ در اصل استقلال صدق کند و دو تا از شرایط کامل بودن، ارشمیدسی و پیوستگی هرشتاین–میلنر، برقرار باشد، آنگاه سومی نیز نتیجه گرفته می‌شود [۲].

در [۴] فضای برداری نرم‌دار و همچنین در گروه‌های توپولوژیکی شرطی معادل برای پیوستگی بیان شده است. در [۷] نیز شرایطی برای برقراری شرط پیوستگی آمیخته مطرح شده است.

رابطه برتری روی بخت آزمایی‌ها (یعنی توزیع‌های احتمال روی یک مجموعه متناهی از پاداش‌ها) توسط یک تابعک مطلوبیت مورد انتظار نمایش داده می‌شود اگر و فقط اگر در اصول استقلال و ارشمیدسی صدق کند که این دو شرط کافی (نه لازم) برای پیوستگی آمیخته بودن رابطه برتری هستند. به طور مشابه شرط مابینی و ارشمیدسی شرط کافی (نه لازم) برای پیوستگی آمیخته هستند. در این مقاله یک شرط ضعیف به نام مغلوبیت آمیخته موضعی معرفی می‌شود که به همراه اصل ارشمیدسی یک شرط لازم و کافی برای پیوستگی آمیخته رابطه برتری است.

* ارائه‌دهنده

۲. ارتباط اصل ارشمیدسی و شرط مغلوبیت آمیخته موضعی با شرط پیوستگی آمیخته

در این بخش ابتدا برخی مفاهیم مقدماتی را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. یک رابطه دوتایی R روی X،
الف) کامل است، هرگاه برای هر $x, y \in X$، $x\,R\,y$ یا $y\,R\,x$.
ب) متعدی است، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$، اگر $x\,R\,y$ و $y\,R\,z$، آنگاه $x\,R\,z$ [۱۱].

رابطه دوتایی $\succcurlyeq$ را یک رابطه برتری گویند، هرگاه کامل و متعدی باشد. $x \succcurlyeq y$ یعنی تصمیم گیرنده به طور ضعیف x را به y ترجیح می‌دهد.

تعریف ۲.۲. تابع مطلوبیت روی X یک تابع $u : X \to \mathbb{R}$ است که این تابع یک رابطه دوتایی $\succcurlyeq$ روی X به صورت زیر ایجاد می‌کند (به عبارت دیگر u بیانگر رابطه دوتایی $\succcurlyeq$ روی X است) [۶]:

$$x \succcurlyeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y).$$

فرض کنید $\Delta(X)$ مجموعه تمام اندازه‌های احتمال روی مجموعه پیشامدهای X و $\succcurlyeq$ یک رابطه برتری روی $\Delta(X)$ باشد.
شرط مابینی بیان می‌کند که اگر برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}' \in \Delta(X)$ و $\lambda \in (0, 1)$، $\boldsymbol{\pi} \sim \boldsymbol{\pi}'$، آنگاه $\lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\pi' \sim \boldsymbol{\pi}$ [۸].
رابطه برتری $\succcurlyeq$ در اصل استقلال صدق می‌کند، هرگاه برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi'}, \boldsymbol{\sigma} \in \Delta(X)$ و $\lambda \in (0, 1)$ [۸]:

$$\boldsymbol{\pi} \succcurlyeq \boldsymbol{\pi'} \Leftrightarrow \lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma} \succcurlyeq \lambda\boldsymbol{\pi'} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}.$$

همچنین رابطه برتری $\succcurlyeq$ روی $\Delta(X)$ را ارشمیدسی گویند، هرگاه برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \in \Delta(X)$ [۹]:

$$\boldsymbol{\pi} \succ \boldsymbol{\rho} \succ \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \begin{cases} \exists \alpha \in (0, 1) : \ \alpha\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha)\boldsymbol{\sigma} \succ \boldsymbol{\rho}, \\ \exists \beta \in (0, 1) : \ \boldsymbol{\rho} \succ \beta\boldsymbol{\pi} + (1-\beta)\boldsymbol{\sigma}. \end{cases}$$

تعریف ۳.۲. رابطه برتری $\succcurlyeq$ روی فضای متریک X پیوسته است، اگر برای هر $x \in X$، مجموعه‌های کانتور بالایی و پایینی یعنی:

$$\succcurlyeq (x) = U_x = NWT(x) = \{y \in X | y \succcurlyeq x\},$$

و

$$\preccurlyeq (x) = L_x = NBT(x) = \{y \in X | x \succcurlyeq y\},$$

بسته باشند. همچنین به طور معادل برای هر $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$، گوی‌های $B_{\boldsymbol{a}}$ و $B_{\boldsymbol{b}}$ به مرکز $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر $\boldsymbol{x} \in B_{\boldsymbol{a}}$ و $\boldsymbol{y} \in B_{\boldsymbol{b}}$، $\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$ [۱۱].

تعریف ۴.۲. رابطه دوتایی $\succcurlyeq$ در شرط پیوستگی آمیخته صدق می‌کند، هرگاه برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\sigma} \in \Delta(X)$، مجموعه‌های

$$S = \{\lambda \in [0, 1] | \lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma} \succcurlyeq \boldsymbol{\rho}\},$$

و

$$T = \{\lambda \in [0, 1] | \boldsymbol{\rho} \succcurlyeq \lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma}\},$$

در $[0, 1]$ پیوسته باشند.

تعریف ۵.۲. رابطه دوتایی $\succcurlyeq$ در شرط مغلوبیت آمیخته موضعی در λ صدق می‌کند، هرگاه برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma} \in \Delta(X)$ و هر $\alpha \in (0, 1)$ یک $\beta(\alpha)$ بین α و λ وجود داشته باشد که برای هر α' بین λ و $\beta(\alpha)$:

$$\lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\sigma} \succ (\prec)\alpha\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha)\boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow$$
$$\alpha'\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha')\boldsymbol{\sigma} \succ (\prec)\alpha\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha)\boldsymbol{\sigma}.$$

رابطه دوتایی $\succcurlyeq$ در شرط مغلوبیت آمیخته موضعی صدق می‌کند، هرگاه برای هر λ، در شرط مغلوبیت آمیخته موضعی در λ صدق کند.

رابطه برتری در شرط یکنوایی آمیخته صدق می‌کند، هرگاه از این‌که $\circ \leq \alpha' < \alpha \leq 1$ بتوان نتیجه گرفت که برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma} \in \Delta(X)$،

$$\alpha\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha)\boldsymbol{\sigma} \succcurlyeq \alpha'\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha')\boldsymbol{\sigma},$$

و رابطه برتری اکید است هرگاه $\boldsymbol{\pi} \succ \boldsymbol{\sigma}$.

خاصیت یکنوایی آمیخته توسط اصل استقلال نتیجه گرفته می‌شود و این شرط به همراه اصل ارشمیدسی، پیوستگی آمیخته را نتیجه می‌دهد. ولی شرط یکنوایی آمیخته توسط مغلوبیت آمیخته موضعی نتیجه‌گیری نمی‌شود.

خاصیت پیوستگی آمیخته از اصل ارشمیدسی قوی‌تر است. با این حال شرط لازم و کافی برای ترتیب ضعیف روی $\Delta(X)$ برای برقراری شرط پیوستگی آمیخته، صدق کردن در اصل ارشمیدسی و شرط مغلوبیت آمیخته موضعی است.

قضیه ۶.۲. فرض کنید $\succcurlyeq$ یک رابطه برتری روی $\Delta(X)$ باشد. در این صورت $\succcurlyeq$ در شرط مغلوبیت آمیخته موضعی و اصل ارشمیدسی صدق می‌کند اگر و فقط اگر در شرط پیوستگی آمیخته صدق کند.

اثبات. (شرط لازم). فرض کنید $\succcurlyeq$ یک رابطه برتری باشد که در اصل ارشمیدسی و شرط مغلوبیت آمیخته موضعی صدق کند. برای هر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\rho} \in \Delta X$، حداقل یکی از مجموعه‌های S یا T در تعریف ۴.۲ ناتهی هستند. بدون این‌که به کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود، فرض کنید $T \neq \varnothing$. فرض کنید λ^* یک نقطه حدی از T باشد و $\lambda^* \notin T$.

مجموعه‌های $M^- = (\circ, \lambda^*) \cap T$ و $M^+ = (\lambda^*, 1) \cap T$ کران‌دار هستند و حداقل یکی از آن‌ها ناتهی است. (اگر هر دوی M^- و M^+ تهی باشند، در اینصورت λ^* یک نقطه حدی T نیست.) با توجه به تعریف از بین روابط $\lambda^* = \sup M^-$ و $\lambda^* = \inf M^+$ یکی یا هر دو برقرار است. (اگر $\lambda^* \neq \sup M^-$ و $\lambda^* \neq \inf M^+$، در این‌صورت $\lambda' < \lambda^*$ وجود دارد به‌طوری‌که λ' یک کران بالا برای M^- است و $\lambda'' > \lambda^*$ وجود دارد به طوری که λ'' یک کران پایین برای M^+ است. از این رو

$$(\lambda', \lambda^*) \cap T = \varnothing = (\lambda^*, \lambda'') \cap T,$$

و در پی آن λ^* یک نقطه حدی برای T نیست.)

اگر $\hat{\lambda} \in M^\theta$ که $\theta \in \{+, -\}$ و

$$\boldsymbol{\sigma} \succ \hat{\lambda}\boldsymbol{\pi} + (1-\hat{\lambda})\boldsymbol{\rho},$$

آنگاه با استفاده از اصل ارشمیدسی برای یک $\beta \in (\circ, 1)$ و $\gamma = \beta\lambda^* + (1-\beta)\hat{\lambda} \in M^\theta$،

$$\gamma\boldsymbol{\pi} + (1-\gamma)\boldsymbol{\rho} \succ \boldsymbol{\sigma}.$$

اگر $\lambda^* = \sup M^-$ ولی $\lambda^* \neq \inf M^+$، آنگاه برای یک $\epsilon' > \circ$،

$$(\lambda^*, \lambda^* + \epsilon') \cap T = \varnothing.$$

با توجه به مغلوبیت آمیخته موضعی و متعدی بودن، یک $\beta(\gamma) \in (\gamma, \lambda^*)$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$(\beta(\gamma), \lambda^*) \cap T = \varnothing.$$

فرض کنید $\epsilon = \min\{\epsilon', \lambda^* - \beta(\gamma)\}$. بنابراین

$$N_\epsilon(\lambda^*) \cap T = \varnothing,$$

که تناقض است.

اگر $\lambda^* = \inf M^+$ اما $\lambda^* \neq \sup M^-$، آنگاه به طور مشابه با بالا به تناقض خواهیم رسید.

اگر $\lambda^* = \sup M^- = \inf M^+$، آنگاه با دو بار استفاده کردن از شرط مغلوبیت آمیخته موضعی یک $\epsilon > \circ$ وجود دارد که

$$N_\epsilon(\lambda^*) \cap T = \varnothing,$$

و تناقض است.
اگر برای هر $\lambda \in T$،

$$\boldsymbol{\sigma} \sim \lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\rho},$$

آنگاه با استفاده از متعدی بودن برای هر $\lambda \in T$،

$$\lambda^*\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda^*)\boldsymbol{\rho} \succ \lambda\boldsymbol{\pi} + (1-\lambda)\boldsymbol{\rho}.$$

با استفاده از مغلوبیت آمیخته یک همسایگی $N_\epsilon(\lambda^*)$ وجود دارد به طوری که

$$N_\epsilon(\lambda^*) \cap T = \varnothing.$$

بنابراین λ^* یک نقطه حدی برای T نیست که این هم تناقض است.
از این رو اگر λ^* یک نقطه حدی T باشد، آنگاه $\lambda^* \in T$ و در پی آن T یک مجموعه بسته خواهد بود. به طریق مشابه می‌توان نشان داد S نیز بسته است. لذا $\succcurlyeq$ در شرط پیوستگی آمیخته صدق می‌کند.
(شرط کافی). فرض کنید $\succcurlyeq$ در شرط پیوستگی آمیخته صدق می‌کند. برقراری اصل ارشمیدسی واضح است. برای اثبات برقراری شرط مغلوبیت آمیخته موضعی، ثابت $\hat{\lambda} \in (0,1)$ را در نظر گرفته، به صورت برهان خلف فرض کنید $\succcurlyeq$ در شرط مغلوبیت آمیخته موضعی در $\hat{\lambda}$ صدق نمی‌کند. در این‌صورت برای برخی مقادیر $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\rho} \in \Delta(X)$ و $\alpha \in [0,1]$، $\beta(\alpha)$ وجود ندارد که در شرایط تعریف ۵.۲ صدق کند. فرض کنید $\boldsymbol{\sigma}(\alpha) \in \Delta(X)$ در شرط

$$\boldsymbol{\sigma}(\alpha) \sim \alpha\boldsymbol{\pi} + (1-\alpha)\boldsymbol{\rho},$$

صدق می‌کند. از این رو هیچ همسایگی $N_\epsilon(\hat{\lambda})$ وجود ندارد که یکی از روابط $N_\epsilon(\hat{\lambda}) \subset S_\alpha$ یا $N_\epsilon(\hat{\lambda}) \subset T_\alpha$ برقرار باشد که در آن S_α و T_α در تعریف ۴.۲ صدق می‌کنند، یعنی:

$$S_\alpha = \{\hat{\lambda} \in [0,1] | \hat{\lambda}\boldsymbol{\pi} + (1-\hat{\lambda})\boldsymbol{\rho} \succcurlyeq \boldsymbol{\sigma}(\alpha)\},$$
$$T_\alpha = \{\hat{\lambda} \in [0,1] | \boldsymbol{\sigma}(\alpha) \succcurlyeq \hat{\lambda}\boldsymbol{\pi} + (1-\hat{\lambda})\boldsymbol{\rho}\}.$$

بدون این که در کلیت مسئله لطمه‌ای وارد شود فرض کنید

$$\hat{\lambda}\boldsymbol{\pi} + (1-\hat{\lambda})\boldsymbol{\rho} \succ \boldsymbol{\sigma}(\alpha),$$

که در این حالت $\hat{\lambda} \in T^c \subset S$. اما T یک مجموعه بسته است و از این رو مکمل آن یعنی T^c یک مجموعه باز است و این یک تناقض است و از این رو $\succcurlyeq$ در شرط مغلوبیت آمیخته موضعی صدق می‌کند. □

۳. نتیجه‌گیری و بحث

اگر مغلوبیت آمیخته توسط شرط $\beta(\alpha) = \alpha$ در تعریف ۵.۲ تقویت شود، در این‌صورت یک شرط کافی (نه لازم) داریم که در زیر یک مثال نقض برای آن معرفی می‌شود.

مثال ۱.۳. فرض کنید $X = \{0,1\}$ و $\succcurlyeq$ توسط رابطه برتری

$$u(\lambda\delta_0 + (1-\lambda)\delta_1) = \lambda \sin(\frac{1}{\lambda}),$$

نمایش داده می‌شود. در این‌صورت u در α پیوسته است، اما در شرط قوی (یعنی حالتی که $\beta(\alpha) = \alpha$) برای مغلوبیت آمیخته موضعی در $\lambda = 0$ صدق نمی‌کند.

اگر شرط توسط عدم نیاز برقراری برای هر α ضعیف شده باشد، در این‌صورت شرط لازم (نه کافی) خواهد بود که در مثال زیر به آن می‌پردازیم.

مثال ۲.۳. فرض کنید $X = \{۰, ۱\}$ و $\succcurlyeq$ توسط تابع مطلوبیت زیر نمایش داده شود:

$$u(\lambda\delta_۰ + (۱-\lambda)\delta_۱) = \begin{cases} ۲, & \lambda = ۰, \\ \frac{۳}{۲}(۱ - \frac{\lambda}{۲})\sin(\frac{۱}{\lambda}), & \sin\frac{۱}{\lambda} \geq ۰, \\ \frac{۱}{۲}(۱+\lambda)\sin(\frac{۱}{\lambda}), & o.w. \end{cases}$$

در این‌صورت u در $\lambda = ۰$ پیوسته نیست، در حالی‌که $\succcurlyeq$ در همانند ضعیف (یعنی برای برخی نه همه αها) مغلوبیت آمیخته موضعی و اصل ارشمیدسی صدق می‌کند.

مراجع

1. M. Allais, *Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'école Américaine*, Econometrica. **21** (4) (1953) 503–546.
2. J. Dubra, *Continuity and completeness under risk*, Mathematical Social Sciences, Elsevier, **61** (1) (2011) 80–81.
3. W. Edwards, *The theory of decision making*, Psychological Bulletin, **51** (4) (1954) 380–417.
4. G. Gerasimou, *"(Hemi)continuity of additive preference preorders*, J. Math. Econom. **58** (2015) 79–81.
5. D. M. Kreps, *Notes on the Theory of Choice*, Westview Press, 1988.
6. D. M. Kreps, *A Course in Microeconomic Theory*, Princeton University Press, 1990.
7. D. McCarthy and K. Mikkola, *Continuity and completeness of strongly independent preorders*, MPRA Paper 79755, University Library of Munich, Germany, 2017.
8. N. H. Miller, *Notes on Microeconomic Theory*, Harvard, 2006. `http://www.business.illinois.edu/nmiller/notes.html`)
9. L. Samuelson, *Microeconomic Theory*, Springer Netherlands, 1986.
10. J. Von Neumann and O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton 1953.
11. S. Wang, *Microeconomic Theory*, 4Th Ed., Springer, Singapore, 2018.

پست الکترونیکی: mehdishams@kashanu.ac.ir

کاربرد نظریه اطلاع و آمار بیز در موسیقی‌شناسی و تجزیه تحلیل ضرب آهنگ

مهدی شمس*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. نظریه اطلاع می‌تواند به عنوان ابزاری برای تجزیه و تحلیل داده‌های موسیقی و همچنین سایر داده‌های دنباله‌ای به کار رود. از جمله این کاربردها می‌توان به تجزیه و تحلیل موسیقی شناسی، تجزیه و تحلیل صوت و پردازش ضرب آهنگ اشاره کرد که در این مقاله مورد بررسی قرار خواهد گرفت.
واژه‌های کلیدی: زنجیر مارکوف، آنتروپی نسبی، اطلاع متقابل، توزیع پسین، ضرب آهنگ.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 00A65, 94A15, 62F15.

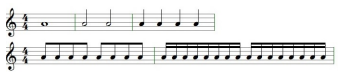
۱. پیش‌گفتار

ارتباط بین نظریه اطلاع شانون [۱۲] با موسیقی و هنر یکی از موضوعات مورد علاقه برای پژوهش بوده است [۱، ۳، ۸، ۹، ۱۴]. در حالت کلی کمیت‌های محسوس و حالت‌های ذهنی مانند عدم قطعیت، تعجب، پیچیدگی، بحران و جذاب بودن با کمیت‌های نظری نظیر آنتروپی، آنتروپی نسبی و اطلاع متقابل در ارتباط هستند. موسیقی یک فرایند ذاتاً پویا است و شنونده در مورد آن‌چه قرار است در ادامه رخ دهد انتظاراتی خواهد داشت که ممکن است بلافاصله یا پس از مدتی تاخیر این انتظارات برآورده شوند. ایده‌ای که توسط افرادی نظیر مایر [۸] و هانسلیک [۷] مطرح شده به این صورت است: مهمترین عامل در روند ذهنی شنیدن یک اثر موسیقی و لذت بردن از آن، رضایت فکری شنونده از پیگیری و پیش‌بینی مداوم اهداف آهنگساز است که انتظارات خود را برآورده کند و یا متوجه اشتباه پیش‌بینی خود شود. یک جنبه اساسی این امر این است که تجربه موسیقی به مرور زمان آشکار می‌شود و به‌صورت یک عنصر ایستایی که به‌طور کامل ارائه شده، درک نمی‌شود. مایر [۸] استدلال کرد که این تجربه به چگونگی تغییر و بازنگری در تصورات ما (هنگام وقوع رویدادها) و به چگونگی تعامل انتظار و پیش‌بینی یا واقعیت بستگی دارد و تا حد زیادی به درک اثر موسیقی روی انتظار و تعجب وابسته است. برای بررسی مفاهیمی نظیر پیش‌بینی و امید ریاضی از علم آمار استفاده می‌شود. وقتی به یک موسیقی گوش می‌دهیم، انتظارات بر اساس آشنایی با سبک‌های مختلف موسیقی و توانایی تشخیص و یادگیری قاعده‌های آماری در موسیقی ایجاد می‌شود و مدل‌های آماری می‌توانند برای تجزیه و تحلیل یک موسیقی به کار روند [۲، ۱۰]. در این مقاله به بررسی دیدگاه دینامیک اطلاعات در مورد موسیقی می‌پردازیم.

۲. مفاهیم پایه موسیقی و نظریه اطلاع

موسیقی هنر بیان احساسات به وسیله آواها است و مهمترین عوامل تشکیل دهنده آن صدا (زیر و بمی یا نواک) و ضرب (ریتم یا ضرب آهنگ) است. ضرب به معنی توالی ضربه‌های آهنگ است که به موسیقی وزن می‌دهد.

به عنوان نمونه در یک قطعه ۴ ضربی با ضرب کشش سیاه می‌توان هر ۴ سیاه یا معادل‌های آن را اجرا کرد که در شکل ۱ به ترتیب از بالا کشش‌های دولاچنگ، چنگ، سیاه، سفید و گرد اجرا شده است.



شکل ۱. نمونه‌ای از تقسیم بندی کشش‌ها در یک قطعه ۴ ضربی.

* ارائه‌دهنده

زیر و بمی کیفیت ادراکی در مورد صدا است و بر مبنای زیر و بمی روی نت‌ها درجه بندی انجام می‌شود و بر اساس بسامد (فرکانس) صداها رخ می‌دهند. طنین (رنگ) نشان دهنده توصیف کیفیت احساس شنوایی صدای موسیقیایی است. میزان (ترازه) نشانه‌هایی برای مشخص کردن تعداد ضرب آهنگ در هر دوره است. مثلاً در شکل ۱ یک میزان می‌تواند شامل هر تعداد کشش باشد که در مجموع به اندازه ۴ سیاه است و لذا تمام کشش‌ها در شکل ۱ می‌توانند کشش‌های یک میزان باشند. سرعت (تمپو یا تندا) معیاری برای سرعت اجرای قطعه موسیقی است. سازهای کوبه‌ای به سازهایی گفته می‌شوند که از طریق ضربه، تکان، سایش، نوسان یافته و تولید صدا می‌کنند.

متغیر تصادفی X با تکیه‌گاه $\mathcal{X}$ را در نظر بگیرید. عدم قطعیت راجع به X را با آنتروپی یعنی $H(X)$ نمایش می‌دهند که در حالت گسسته با داشتن تابع جرم احتمال متغیر تصادفی X یعنی $p : \mathcal{X} \to [0, 1]$ داریم:

$$H(X) = -\sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) \log p(x).$$

کمیت $l(x) = -\log p(x)$ میزان تعجب در مورد x، زمانی که مشاهده می‌شود را نشان می‌دهد و از این رو آنتروپی مقدار مورد انتظار (امید ریاضی) میزان تعجب است، یعنی $H(X) = E(l(X))$ [۴].

اکنون فرض کنید مشاهدات از داده‌های پویای $\mathcal{D}$ استخراج شده و باعث تجدید نظر در مورد اعتقاد راجع به X می‌شوند. اطلاع حاصل از این داده‌های جدید در مورد X توسط آنتروپی نسبی یا فاصله کولبک- لایبلر بین توزیع‌های پیشین $p(x)$ و پسین $p(x|\mathcal{D})$ به دست می‌آید [۴]:

$$D(p_{X|\mathcal{D}} \parallel p_X) = \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x|\mathcal{D}) \log \frac{p(x|\mathcal{D})}{p(x)}.$$

زمانی که با دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی وابسته مواجه هستیم، مشاهده یکی از آن‌ها می‌تواند باعث تغییر باور در مورد بقیه شود. آنتروپی توأم و آنتروپی شرطی معیاری برای عدم قطعیت مورد انتظار در مورد گروهی از متغیرها به شرط متغیرهای دیگر پیشنهاد می‌دهد.

در حالت خاص اطلاع متقابل

$$I(X_1; X_2) = H(X_1) - H(X_1|X_2),$$

اطلاع مورد انتظار از مشاهده X_2 در مورد X_1 و کاهش مورد انتظار در مورد عدم قطعیت در مورد X_1 بعد از مشاهده X_2 را بیان می‌کند که در آن

$$H(X_1|X_2) = H(X_1, X_2) - H(X_2),$$

آنتروپی شرطی X_1 به شرط X_2 است [۴].

به راحتی می‌توان نشان داد کمیت اطلاع متقابل متقارن است، یعنی $I(X_1; X_2) = I(X_2; X_1)$. صورت شرطی اطلاع متقابل به صورت

$$I(X_1; X_2|X_3) = H(X_1|X_3) - H(X_1|X_2, X_3),$$

خواهد بود [۴].

دنباله $(\ldots, X_{-1}, X_0, X_1, \ldots)$ از متغیرهای تصادفی را در نظر بگیرید که μ اندازه احتمال روی تمام تحقق‌های این دنباله است. دنباله مذکور در زمان t به سه حالت حال X_t، گذشته $\overleftarrow{X_t} = (\ldots, X_{t-2}, X_{t-1})$ و آینده $\overrightarrow{X_t} = (X_{t+1}, X_{t+2}, \ldots)$ افراز می‌شود. تعجب در مشاهده $X_t = x_t$ به x_t و $\overleftarrow{x_t}$ بستگی دارد، یعنی

$$l_t = -\log p(x_t|\overleftarrow{x_t}).$$

قبل از مشاهده X_t، مشاهده می‌تواند از تعجب مورد انتظار به عنوان اندازه‌ای برای عدم قطعیت راجع به X_t یعنی $H(X_t|\overleftarrow{X_t} = \overleftarrow{x_t})$ محاسبه شود. توزیع احتمال پیشگوی $p(\overrightarrow{x_t}|\overleftarrow{x_t})$ مورد توجه است. زمانی که $X_t = x_t$ مشاهده می‌شود، اطلاع پیشگوی لحظه‌ای I_t در زمان t، اطلاع در پیشامد $X_t = x_t$ راجع به آینده دنباله یعنی

$\overrightarrow{X_t}$ به شرط مشاهده گذشته $\overleftarrow{X_t} = \overleftarrow{x_t}$ خواهد بود. این مفهوم آنتروپی نسبی بین توزیع‌های پیشین و پسین روی آینده ممکن است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$I_t = D\Big(p(\overrightarrow{x_t}|x_t, \overleftarrow{x_t}) \parallel p(\overrightarrow{x_t}|\overleftarrow{x_t})\Big) = \sum_{\overrightarrow{x_t}\in\mathcal{X}^*} p(\overrightarrow{x_t}|x_t, \overleftarrow{x_t}) \log \frac{p(\overrightarrow{x_t}|x_t, \overleftarrow{x_t})}{p(\overrightarrow{x_t}|\overleftarrow{x_t})},$$

که در آن مجموع روی مجموعه دنباله‌های نامتناهی $\mathcal{X}^*$ انجام می‌شود. مشاهده می‌تواند توسط مقدار مورد انتظار I_t در زمان t محاسبه شود و در این حالت اطلاع متقابل $I(X_t; \overrightarrow{X_t}|\overleftarrow{X_t} = \overleftarrow{x_t})$ که روی مشاهدات گذشته شرطی شده است را کاهش می‌دهد. همچنین فرض می‌کنیم فرایند تصادفی $\{X_t\}$ مانا هست و در این حالت نرخ آنتروپی فرایند (آنتروپی حال به شرط گذشته) یعنی $H(\mathcal{X}) = H(X_t|\overleftarrow{X_t})$ به t بستگی ندارد [۴]. نرخ آنتروپی، معیاری برای اندازه‌گیری تعجب کلی یا غیر قابل پیش‌بینی بودن فرایند است و به سطح متوسط تعجب و عدم حتمیت یک ناظر که از روی دنباله‌های نمونه برداری شده از فرایند محاسبه می‌شود اشاره دارد. نرخ چند-اطلاعی

$$I_M(\mathcal{X}) = I(\overleftarrow{X_t}; X_t) = H(X_t) - H(\mathcal{X}),$$

اطلاع متقابل بین گذشته و حال است [۶]. آنتروپی اضافی [۵] به صورت اطلاع متقابل بین گذشته و همچنین آینده به‌علاوه حال یعنی $E = I(\overleftarrow{X_t}; X_t, \overrightarrow{X_t})$ تعریف می‌شود. نرخ اطلاع پیشگو، اطلاع متقابل بین حال و آینده به شرط گذشته است،

$$I_P(\mathcal{X}) = I(X_t; \overrightarrow{X_t}|\overleftarrow{X_t}) = H(\overrightarrow{X_t}|\overleftarrow{X_t}) - H(\overrightarrow{X_t}|X_t, \overleftarrow{X_t}),$$

که نشان‌دهنده میانگین کاهش عدم حتمیت درباره آینده روی یادگیری X_t به شرط گذشته است. با توجه به تقارن اطلاع متقابل فرمول بالا به صورت

$$I_P(\mathcal{X}) = H(X_t|\overleftarrow{X_t}) - H(X_t|\overleftarrow{X_t}, \overrightarrow{X_t}) = H(\mathcal{X}) - H_R(\mathcal{X}),$$

بازسازی می‌شود که در آن $H_R(\mathcal{X}) = H(X_t|\overrightarrow{X_t}, \overleftarrow{X_t})$ نرخ آنتروپی باقیمانده [۱۳] نام دارد. نرخ اطلاع پیشگو نشان دهنده میانگین اطلاع پیشگوی لحظه‌ای است که توسط مشاهده کننده در حال پردازش یک دنباله نمونه برداری شده از فرایند حاصل می‌شود. همچنین داریم:

$$H(X_t) = I_M(\mathcal{X}) + H_R(\mathcal{X}) + I_P(\mathcal{X}),$$

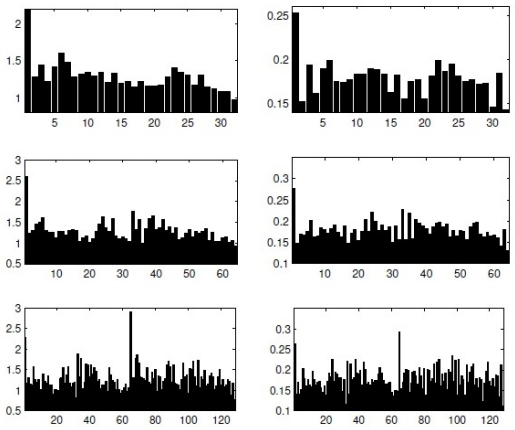
و

$$H(\mathcal{X}) = H_R(\mathcal{X}) + I_P(\mathcal{X}).$$

اگر $P_{k\times k} = (p_{ij})$ ماتریس احتمال انتقال زنجیر مارکوف با فضای حالت $\{۱, \ldots, k\}$ با درایه‌های $p_{ij} = P(X_t = j|X_{t-۱} = i)$ و $h : \mathbb{R}^{k\times k} \to \mathbb{R}$ تابع نرخ آنتروپی باشد، یعنی $h(P)$ نرخ آنتروپی زنجیر مارکوف با ماتریس احتمال انتقال P است، آنگاه $I_P(P) = h(P^۲) - h(P)$ که $P^۲$ ماتریس احتمال انتقال دو مرحله‌ای زنجیر مارکوف است.

۳. تحلیل موسیقی شناسی

یک قطعه موسیقی با میزان‌هایی شامل ۳۲، ۶۴ و ۱۲۸ نت را در نظر بگیرید. برای یک قطعه موسیقی میانگین تعجب و اطلاع پیشگوی لحظه‌ای متوسط در هر میزان محاسبه می‌شوند. از شکل ۲ این نتیجه حاصل می‌شود که اولین نت در هر میزان، به‌طور متوسط نسبت به بقیه آگاهی بخش‌تر است و میزان تعجب بیشتری را به‌طور معنی‌دار فراهم می‌کند.



شکل ۲. تحلیل توسط میانگین تعجب (ستون راست) و اطلاع پیشگوی لحظه‌ای متوسط (ستون چپ) در میزان‌هایی شامل به ترتیب ۳۲، ۶۴ و ۱۲۸ نت.

در حالتی که متغیرهای تصادفی پیوسته باشند، می‌توان پارامترهای بیشتری در مورد موسیقی نظیر تحرک، زمان و طنین را مطالعه کرد.

در [۶] رده فرایندهای تصادفی گاوس مانا معرفی شده که برای آن‌ها نرخ آنتروپی به صورت تحلیلی از تابع چگالی طیفی توانی $S(w)$ از یک سیگنال محاسبه شده است و نرخ چند-اطلاعی آن به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_M(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(w)dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log S(w)dw\Big).$$

اطلاع پیشگو برای یک فرایند گاوسی اتورگرسیو به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$I_P(\mathcal{X}) = \frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{S(w)}dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\frac{1}{S(w)}dw\Big).$$

ثابت می‌شود در یک سری زمانی اتورگرسیو مانای نامتناهی یعنی $AR(\infty)$، $I_M(\mathcal{X})$ بی‌کران است، در صورتی که برای یک سری زمانی میانگین متحرک متناهی با مرتبه q یعنی $MA(q)$، $I_P(\mathcal{X})$ بی‌کران است.

یک روش احتمالاتی برای ردیابی ضرب توسط رابرستون [۱۱] پیشنهاد شد. در این روش با توجه به ورودی‌های صوتی از یک ساز کوبه‌ای، همگام سازی انجام می‌شود و توزیع سرعت و ضرب آهنگ پیدا می‌شود. بعد از دریافت یک قطعه موسیقی جدید، این توزیع نسبت به یک مدل احتمالی با تغییرات سرعت و فاز به روز می‌شود. با استفاده از آنتروپی، عدم قطعیت سیستم در مورد ضرب آهنگ محاسبه می‌شود و مقدار اطلاع موجود در هر رویداد به عنوان آنتروپی نسبی بین توزیع پیشین و پسین به دست می‌آید. در انتها یک تقریب برای اطلاع پیشگوی لحظه‌ای به دست می‌آید.

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله چند کاربرد مفاهیم نظریه اطلاع برای تجزیه و تحلیل موسیقی، شامل تحلیل‌های موسیقی شناسی، تجزیه و تحلیل ضرب آهنگ، پردازش ضرب و موارد دیگر مورد بررسی قرار گرفت. با توجه به پویایی اطلاعات و به کمک روش‌های آماری به خصوص آمار بیز و مفاهیم نظریه اطلاع می‌توان تحقیقات بیشتری در این زمینه انجام داد.

مراجع

1. J. E. Cohen, *Information theory and music*, Behavioral Sci. **7** (2) (1962) 137–163.
2. D. Conklin and I. H. Witten, *Multiple viewpoint systems for music prediction*, J. New Music Res. **24** (1) (1995) 51–73.
3. E. Coons and D. Kraehenbuehl, *Information as a measure of structure in music*, J. Music Theory **2** (2) (1958) 127–161.
4. T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, New York: John Wiley and Sons, 1991.
5. J. Crutchfield and N. Packard, *Symbolic dynamics of noisy chaos* , Physica D: Nonlinear Phenomena, **7** (1-3) (1983) 201–223.
6. S. Dubnov, *Generalization of spectral flatness measure for non-gaussian linear processes*, Signal Processing Letters, IEEE **11** (8) (2004) 698–701.
7. E. Hanslick, *On the Musically Beautiful: a Contribution Towards the Revision of the Aesthetics of Music (Hackett Classics)*, translated by Geoffrey Payzant. Indianapolis, In: Hackett, 1854/1986.
8. L. B. Meyer, *Music, the Arts and Ideas: Patterns and Predictions in Twentieth-Century Culture*, University of Chicago Press, 1967.
9. A. Moles, *Information Theory and Esthetic Perception*, University of Illinois Press, 1966.
10. D. Ponsford, G. A. Wiggins and C. S. Mellish, *Statistical learning of harmonic movement,* J. New Music Res. **28** (2) (1999) 150–177, also available as Research Paper 874, from the Division of Informatics, University of Edinburgh.
11. A. Robertson, *A Bayesian approach to drum tracking*, in Proceedings of the 8th Sound and Music Computing Conference (SMC), 2011.
12. C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948) 379–423, 623–656.
13. S. Verdu and T. Weissman, *Erasure entropy*, in: IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT 2006), (2006) 98–102.
14. J. E. Youngblood, *Style as information*, J. Music Theory **2** (1958) 24–35.

پست الکترونیکی: mehdishams@kashanu.ac.ir

ارائه‌های پوستری

آنالیز

تعمیمی برای مفهوم متر

سید محمد امین خاتمی*
گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

چکیده. به کمک مفهومی مشابه عملگر نرم مثلثی پیوسته که در منطق فازی کاربرد دارد، تعمیمی برای خاصیت نامساوی مثلث معرفی می‌کنیم که در نهایت به تعمیمی از مفهوم متر می‌انجامد.
واژه‌های کلیدی: فضای متریک، تعمیم مفهوم متر، t-نرم، نامساوی مثلث تعمیم یافته.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 54E35, 03G25.

۱. مقدمه

مفهوم متر که اولین‌بار به شکل رسمی در اوایل قرن بیستم میلادی توسط ریاضیدانان فرانسوی معرفی شد، کاربردهای فراوانی در ریاضیات و سایر علوم دارد. یک متر روی مجموعه M تابعی است مثل $d : M \to [0, \infty)$ که در خاصیت‌های زیر صدق می‌کند

(۱) (فاصله صفر فقط برای نقاط غیر متمایز) $\forall x \forall y \, (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$،
(۲) (تقارنی بودن) $\forall x \forall y \, (d(x, y) = d(y, x))$،
(۳) (نامساوی مثلث) $\forall x \forall y \forall z \, (d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y))$.

برای مفهوم متر با توجه به کاربردهای فراوانی که دارد، تعمیم‌های بسیار زیادی ارائه شده است. این تعمیم‌ها به شکل‌های مختلفی از جمله تغییرات در هر یک از سه خاصیت مشخص شده فوق و همچنین تغییر مجموعه مقادیر تابع متر بوده‌اند [۳، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳]. مفاهیمی مثل شبه‌متر، همتامتر، فرامتر، متر نامتقارن و متر ناترایا از ساده‌ترین تعمیم‌های مفهوم متر هستند که فقط با تغییر یکی از موارد سه‌گانه فوق در تعریف متر حاصل می‌شوند. مثلاً شبه‌متر فقط با تغییر خاصیت اول به‌صورت

$$\forall x \forall y \, (d(x, y) = 0 \to x = y) \, ,$$

تعریف می‌گردد و یا فرامتر فقط با تغییر نامساوی مثلث به‌صورت

$$\forall x \forall y \forall z \, (d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}) \, ,$$

تعریف می‌شود. تعمیم‌های فراوان و پیچیده‌تر دیگری نیز برای مفهوم متر ارائه شده‌اند که از مهمترین آن‌ها می‌توان به متر احتمالی، متر فازی، B-متر و M-متر اشاره کرد [۱، ۲، ۴، ۶، ۷، ۸].

در این نوشتار کوتاه که گزارشی است مختصر از کار مشترک منتشر نشده نویسنده با مجید میرزاوزیری [۹]، با معرفی تابعی به نام "تابع معرفی نامساوی مثلث" که به اختصار آن‌را TEFD می‌نامیم، مفهوم متر را با تعمیم نامساوی مثلث آن تعمیم می‌دهیم. تعمیم ارائه شده بسیار ساده است و فقط با تغییر عمل جمع در نامساوی مثلث به یک تابع TEFD مثل $\star$ به‌دست می‌آید. به نظر می‌رسد علی‌رغم این‌که تعمیم ارائه شده بسیار ساده است، اما تا کنون در جایی به آن اشاره نشده است.

۲. پیش‌نیازها

در منطق فازی مفهوم نرم مثلثی و هم‌نرم مثلثی برای تابع درستی رابط منطقی "و قوی" و "یا قوی" مورد استفاده قرار می‌گیرند. یک نرم مثلثی پیوسته یا t-نرم پیوسته تابعی است پیوسته مثل $* : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ که روی هر دو مؤلفه صعودی است و به‌علاوه به ازای هر $x, y, z \in [0, 1]$، $x * y = y * x$، $(x * y) * z = x * (y * z)$

* ارائه‌دهنده

و $x * ۱ = x$. این خاصیت‌ها ایجاب می‌کنند که برای هر x، $x * ۰ = ۰$. جفت الحاقی t-نرم پیوسته $*$، با خاصیت زیر تعریف می‌شود

$$x \Rightarrow y \geq z \text{ اگر و فقط اگر } y \geq x * z \ ،$$

و البته با توجه به پیوستگی $*$ و بسته بودن $[۰, ۱]$ به‌راحتی می‌توان نشان داد

$$x \Rightarrow y = \max\{z : x \geq y * z\}.$$

به‌طور مشابه یک هم‌نرم مثلثی پیوسته یا s-نرم پیوسته تابعی است پیوسته مثل $\star : [۰, ۱]^۲ \to [۰, ۱]$ که روی هر دو مؤلفه صعودی است و به‌علاوه به ازای هر $x, y, z \in [۰, ۱]$، $x \star y = y \star x$، $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ و $x \star ۰ = x$. در این‌جا نیز خواص هم‌نرم ایجاب می‌کنند که برای هر x، $x \star ۱ = ۱ \star x$. مشابه t-نرم‌ها، جفت الحاقی s-نرم پیوسته $\star$، با خاصیت زیر تعریف می‌شود

$$x \star z \leq y \text{ اگر و فقط اگر } x \mathrel{\dot{\to}} y \leq z \ .$$

در این‌جا نیز پیوستگی $\star$ و بسته بودن $[۰, ۱]$ ایجاب می‌کنند که

$$x \mathrel{\dot{\to}} y = \min\{z : x \leq y \star z\}.$$

۳. نتایج اصلی

برای تعمیم نامساوی مثلث، عمل جمع به‌کار رفته در آن را با "تابع معرفی نامساوی مثلث" که به اختصار با TEFD نمایش می‌دهیم، عوض می‌کنیم. ایده تعریف TEFD را از خواص هم‌نرم مثلثی اقتباس کرده‌ایم.

تعریف ۱.۳. تابع $\star : [۰, \infty)^۲ \to [۰, \infty)$ با خواص زیر را "تابع معرفی نامساوی مثلث" یا به اختصار TEFD می‌نامیم.

(T۱) $a \star b = b \star a$،
(T۲) $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$،
(T۳) $a \leq b$ ایجاب می‌کند که $a \star c \leq b \star c$ و $c \star a \leq c \star b$،
(T۴) $a \star ۰ = a$،
(T۵) $\star$ روی مؤلفه اولش پیوسته است (با متر اقلیدسی روی $[۰, \infty)^۲$ و $[۰, \infty)$).

توجه کنید که بر خلاف هم‌نرم مثلثی، در این‌جا ویژگی مرزی $x \star ۱ = ۱$ برقرار نیست. در جدول ۱، s-نرم‌های پیوسته مشهور و TEFD های نظیر آن‌ها را می‌توانید مشاهده کنید.

جدول ۱. s-نرم‌های پیوسته مشهور و TEFD نظیر آن‌ها.

نام	هم‌نرم مثلثی پیوسته	TEFD متناظر
لوکاسیویچ	$\min\{۱, x + y\}$	$x + y$
گودل	$\max\{x, y\}$	$\max\{x, y\}$
حاصل‌ضربی	$x + y - x.y$	ندارد (یا ما پیدا نکردیم)
$\star_p$	$\min\{۱, (\sqrt{x} + \sqrt{y})^۲\}$	$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^۲$
$\star_s$	$\min\{۱, \sqrt{x^۲ + y^۲}\}$	$\sqrt{x^۲ + y^۲}$

با توجه به خاصیت جابجایی، پیوسته بودن $\star$ روی مؤلفه اول، پیوستگی آن روی مؤلفه دوم را نتیجه می‌دهد. به‌علاوه مشابه آن‌چه در [۵، گزاره ۱.۱۹] برای t-نرم‌ها انجام شده است، می‌توان نشان داد، صعودی بودن $\star$ روی مؤلفه‌هایش نتیجه می‌دهد که پیوستگی $\star$ روی مؤلفه اولش معادل با پیوستگی $\star$ است.
اکنون مفهوم متر را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۲.۳. فرض کنید $\star$ یک TEFD و M یک مجموعه ناتهی باشد. یک $\star$-متر روی M تابعی است مثل $d : M^{۲} \to [۰, \infty)$ که در شرایط زیر صدق می‌کند

(۱) (فاصله صفر فقط برای نقاط غیر متمایز) $\forall x \forall y \, (d(x, y) = ۰ \Leftrightarrow x = y)$،
(۲) (تقارنی بودن) $\forall x \forall y \, (d(x, y) = d(y, x))$،
(۳) (نامساوی $\star$-مثلث) $\forall x \forall y \forall z \, (d(x, y) \leq d(x, z) \star d(z, y))$.

در این‌جا نیز، مفهوم شبه $\star$-متر با ضعیف کردن شرط اول و قائل شدن فاصله صفر برای نقاط متمایز، قابل تعریف است.

مثال ۳.۳. با توجه به TEFD های معرفی شده در جدول ۱، واضح است که TEFD لوکاسویچ، نامساوی مثلث به شکل استاندارد آن را می‌دهد

$$\forall x \forall y \forall z \, (d(x, y) \leq d(x, z) \star d(z, y)) \, ,$$

و بنابراین در این حالت چیزی جز متر معمولی را نخواهیم داشت.
از طرفی TEFD گودل، منجر به نامساوی مثلث به‌صورت زیر می‌شود

$$\forall x \forall y \forall z \, (d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}) \, ,$$

که همان تعریف فرامتر باشد (که البته می‌دانیم هر فرامتری یک متر نیز می‌باشد).

مثال زیر نشان می‌دهد که $\star$-مترهایی وجود دارند که متر نیستند.

مثال ۴.۳. با توجه به TEFD های جدول ۱، محاسبه زیر نشان می‌دهد تابع $d(a, b) = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{۲}$ یک $\star_p$-متر روی مجموعه $M = [۰, \infty)$ تعریف می‌کند.

$$\begin{aligned} d(a, b) &= \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^{۲} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{c} + \sqrt{c} - \sqrt{b}\right)^{۲} \\ &\leq \left(\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{c})^{۲}} + \sqrt{(\sqrt{c} - \sqrt{b})^{۲}}\right)^{۲} \\ &= \left(\sqrt{d(a, c)} + \sqrt{d(c, b)}\right)^{۲} \\ &= d(a, c) \star_p d(c, b), \end{aligned}$$

از طرفی چون $d(۱, ۲۵) = ۱۶ \not\leq d(۱, ۱۶) + d(۱۶, ۲۵) = ۹ + ۱$، لذا d یک متر روی M نیست.

شاید بتوان گفت وجود جفت الحاقی برای عملگرهای t-نرم و s-نرم، مهمترین دلیلی بود که از عملگر s-نرم برای تعریف TEFD استفاده کردیم. جفت الحاقی TEFD به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۵.۳. فرض کنید $\star$ یک TEFD باشد، جفت الحاقی $\star$ تابعی است مثل $\dot{\to} : [۰, \infty)^{۲} \to [۰, \infty)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$a \dot{\to} b = \inf\{c : c \star a \geq b\}.$$

توجه دارید چون $b \in \{c : c \star a \geq b\}$ لذا $\dot{\to}$ خوش تعریف است و به‌علاوه برای هر $a, b, c \in [۰, \infty)$،

$$c \geq a \dot{\to} b \text{ اگر و فقط اگر } c \star a \geq b. \qquad (۱)$$

قضیه زیر بعضی از خواص جفت الحاقی یک TEFD را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۳. [۹] فرض کنید $\star$ یک TEFD و $\dot{\to}$ جفت الحاقی $\star$ باشد. در این‌صورت

(۱) $a \dot{\to} b = \min\{c : c \star a \geq b\}$،
(۲) $۰ \dot{\to} a = a$،
(۳) $a \geq b$ اگر و فقط اگر $a \dot{\to} b = ۰$،
(۴) $a \star (a \dot{\to} b) = \max\{a, b\}$،
(۵) $a \dot{\to} b \geq (a \dot{\to} c) \dot{\to} (c \dot{\to} b)$،
(۶) $a \dot{\to} b \leq (a \dot{\to} c) \star (c \dot{\to} b)$.

در مثال زیر، جفت الحاقی TEFD های جدول ۱ را آورده‌ایم.

مثال ۷.۳. اگر $a \geq b$ آنگاه $a \dashrightarrow b = ۰$ و اگر $a < b$ آنگاه

- برای TEFD لوکاسیویچ: $a \dashrightarrow b = b - a$،
- برای TEFD گودل (یا ماکزیمم): $a \dashrightarrow b = b$،
- برای $\star_s$: $a \dashrightarrow b = \sqrt{b^۲ - a^۲}$،
- برای $\star_p$: $a \dashrightarrow b = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^۲$.

اگر $\star$ یک TEFD باشد، قضیه زیر نشان می‌دهد که با کمک جفت الحاقی آن می‌توان یک $\star$-متر ساخت.

قضیه ۸.۳. فرض کنید $\star$ یک TEFD و $\dashrightarrow$ جفت الحاقی آن باشد. در این‌صورت تابع $d : [۰, \infty)^۲ \to [۰, \infty)$ با ضابطه $d(a, b) = (a \dashrightarrow b) \star (b \dashrightarrow a)$ یک $\star$-متر روی $[۰, \infty)$ تعریف می‌کند.

اثبات. به کمک اتحادها و نامساوی‌هایی که در قضیه ۶.۳ معرفی شدند، موضوع ثابت می‌شود. برای جزئیات می‌توانید به [۹] مراجعه کنید. □

مثال ۹.۳. $\star$-مترهای متناظر با TEFD های مندرج در جدول ۱ که از قضیه فوق به‌دست می‌آیند، به‌صورت زیر هستند

- برای TEFD لوکاسیویچ $d_L(a, b) = |b - a|$ که البته روی $\mathbb{R}$ نیز با همین ضابطه قابل تعمیم است،
- برای TEFD ماکزیمم $d_{\max}(a, b) = \begin{cases} ۰, & a = b, \\ \max\{a, b\}, & a \neq b, \end{cases}$،
- برای $\star_s$، $d_s(a, b) = \sqrt{|b^۲ - a^۲|}$ که مجدداً روی $\mathbb{R}$ نیز با همین ضابطه قابل تعمیم است،
- برای $\star_p$، $d_p(a, b) = |\sqrt{b} - \sqrt{a}|^۲$.

توپولوژی روی یک فضای $\star$-متریک را مانند توپولوژی روی فضاهای متریک می‌توان تعریف کرد. برای این‌که مزیت جفت الحاقی را برای یک TEFD بهتر ببینید، اجازه بدهید کمی هم در این مورد صحبت کنیم.

تعریف ۱۰.۳. فرض کنید (M, d) یک فضای $\star$-متریک باشد. برای هر $a \in M$ و هر $r > ۰$، گوی باز حول a به شعاع r به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$N_r(a) = \{b : d(a, b) < r\}.$$

برای زیرمجموعه A از M، نقطه $x \in A$ را یک نقطه داخلی می‌نامند هرگاه $\epsilon > ۰$ موجود باشد به‌طوری که $N_\epsilon(x) \subseteq A$. A را $\star$-باز می‌نامند هرگاه هر نقطه‌اش درونی باشد.

اثبات قضیه زیر از روی تعریف فوق و این نکته که برای هر $r > ۰$، $s > ۰$ ای وجود دارد که $s \star s < r$، انجام می‌شود.

قضیه ۱۱.۳. [۹] برای هر فضای $\star$-متریک (M, d)، مجموعه همه مجموعه‌های $\star$-باز، یک توپولوژی روی M تشکیل می‌دهد.

در اثبات قضیه زیر، یکی از موارد استفاده از جفت الحاقی یک TEFD را می‌بینید.

قضیه ۱۲.۳. در هر فضای $\star$-متریک (M, d)، هر گوی باز یک مجموعه $\star$-باز است.

اثبات. فرض کنید $\star$ یک TEFD و $\dashrightarrow$ جفت الحاقی آن باشد. به‌علاوه فرض کنید (M, d) یک فضای $\star$-متریک است و $x \in M$ و $r > ۰$. نشان می‌دهیم هر $y \in N_r(x)$ یک نقطه داخلی $N_r(x)$ است. در واقع اگر قرار دهیم $\epsilon = d(x, y) \dashrightarrow r$، آنگاه $N_\epsilon(y) \subseteq N_r(x)$. برای این منظور عنصر دلخواه z در $N_\epsilon(y)$ را در نظر بگیرید. لذا داریم $d(z, y) < \epsilon$. بنابراین

$$d(z, y) < d(x, y) \dashrightarrow r.$$

اکنون خاصیت الحاقی بودن، یعنی خاصیت ۱ نتیجه می‌دهد $d(z,y) \star d(x,y) < r$.
بالاخره با توجه به نامساوی $\star$-مثلث و تقارنی بودن دو تابع $\star$ و d، نتیجه می‌گیریم، $d(x,z) \leq d(x,y) \star d(y,z) < r$، که نشان می‌دهد $z \in N_r(x)$. □

با همین روش می‌توان نشان داد هر فضای $\star$-متریک مانند فضاهای متریک، شمارای اول و نرمال است [۹].
برای توپولوژی حاصل‌ضربی نیز در حالت متناهی، می‌توان نشان داد که توپولوژی حاصل از $\star$-متر با توپولوژی جعبه‌ای حاصل از $\star$-متر یکی است. در واقع اگر به ازای یک TEFD ثابت مثل $\star$، $\{(M_i, d_i)\}_{i=1}^n$ خانواده‌ای از فضاهای $\star$-متریک باشد و d_{box} و d_T روی $M = \prod_{1 \leq i \leq n} M_i$ به‌صورت

$$d_{box}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{1 \leq i \leq n} d_i(x_i, y_i)،$$
$$d_T(\bar{x}, \bar{y}) = d_1(x_1, y_1) \star d_2(x_2, y_2) \star \cdots \star d_n(x_n, y_n)،$$

تعریف شوند، آن‌گاه نه تنها d_{box} و d_T دو $\star$-متر روی M تعریف می‌کنند، بلکه توپولوژی حاصل از آن‌ها روی M یکسان است. برای دیدن جزئیات می‌توانید به [۹] مراجعه کنید.

موضوع جالبی که در ادامه این تحقیق می‌توان به آن پرداخت، مطالعه متریک‌پذیری فضاهای $\star$-متریک می‌باشد.

مراجع

1. I. A. Bakhtin, *The contraction mapping principle in quasimetric spaces*, Funct. Anal. Unianowsk Gos. Ped. Inst. **30** (1989) 26–37.
2. A. Branciari, *A fixed point theorem of Banach–Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces*, Publ. Math. Debrecen **57** (1-2) (2000) 31–37.
3. J. G. Ceder, *Some generalizations of metric spaces*, Pacific J. Math. **11** (1) (1961) 105–125.
4. O. Kaleva and S. Seikkala, *On fuzzy metric spaces*, Fuzzy set Syst. **12** (3) 1984 215–229.
5. E. P. Klement, R. Mesiar, E. Pap, *Triangular Norms*, , Trends in Logic, Studia Logica Library, Vol. 8, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.
6. K. Menger, *Statistical metric*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **28** (12) (1942) 535–537.
7. K. Menger, B. Schweizer and A. Sklar, *On probabilistic metrics and numerical metrics with probability (I)*, Czechoslovak Math. J. **9** (1959) 459–466.
8. M. Mirzavaziri, *Function valued metric spaces*, Surv. Math. Appl. **5** (2010) 321–332.
9. S. M. A. Khatami and M. Mirzavaziri, *Yet another generalization of the notion of a metric space*, (2020). `arXiv:2009.00943`
10. W. H. Schikhof, *Ultrametric Calculus*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
11. J. Väisälä, *Gromov hyperbolic spaces*, Expo. Math. **23** (3) (2005) 187–231.
12. W. A. Wilson, *On Quasi-Metric Spaces*, Amer. J. Math. **53** (3) (1931) 675–684.
13. W. A. Wilson, *On Semi-Metric Spaces*, Amer. J. Math. **53** (2) (1931) 361–373.

پست الکترونیکی: khatami@birjandut.ac.ir

نامساوی دیاز-متکالف برای شبه‌انتگرال‌ها

محمدرضا کریم‌زاده*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
و بیاض دارابی
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران

چکیده. در این مقاله، حالت فازی نامساوی انتگرالی دیاز-متکالف که توسط مولفان بررسی شده بود به حالت شبه‌انتگرال‌ها تعمیم داده می‌شود.
واژه‌های کلیدی: شبه انتگرال‌ها، نامساوی انتگرالی، نامساوی دیاز-متکالف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 03E72, 26E50.

۱. مقدمات

شبه‌انتگرال‌ها تعمیم یافته انتگرال‌های کلاسیک هستند که در آن، انتگرال‌ها روی نیم حلقه‌ها به همراه دو شبه عملگر جمع و ضرب تعریف می‌شوند. بر اساس ساختار ارائه شده، مفهوم $\ominus$- اندازه (اندازه شبه-جمع)، شبه‌انتگرال بیان می‌شود. شبه-آنالیز می‌تواند موضوع جالبی برای تعمیم نامساوی از حالت کلاسیک به حالت‌های دیگر باشد که شامل تحلیل کلاسیک همانند حالت‌های دیگر باشد. مطالعه روی نامساوی‌های انتگرالی و توسیع آنها به شبه‌انتگرال‌ها توسط نویسندگانی چون مسیار، اویانگ و آگاهی انجام شده است [۱، ۲، ۵، ۶، ۷]. اخیراً در این زمینه می‌توان به کارهای دارابی از ایران اشاره نمود. در این قسمت به بیان برخی تعاریف و نتایج مقدماتی از شبه‌انتگرال‌ها می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱. عملگر $\oplus$ روی $[a,b]$ شبه-جمع نامیده می‌شود اگر $\oplus$ دارای شرایط زیر باشد:
(۱) خاصیت جابه جایی داشته باشد. (۲) نانزولی نسبت به ($\preceq$) باشد.
(۳) خاصیت شرکت پذیری داشته باشد. (۴) دارای عنصر صفر باشد که با $\circ$ نمایش داده می‌شود.
قرارداد می‌کنیم که $[a,b]_+ = \{x | x \in [a,b] \quad \circ \preceq x\}$.

تعریف ۲.۱. عملگر $\odot$ روی $[a,b]$، شبه ضرب نامیده می‌شود اگر $\odot$ دارای شرایط زیر باشد:
(۱) خاصیت جابه‌جایی داشته باشد.
(۲) به طور مثبت نانزولی باشد. یعنی، $x \preceq y$ نتیجه دهد $x \odot z \preceq y \odot z$ برای هر $z \in [a,b]_+$.
(۳) خاصیت شرکت‌پذیری داشته باشد.
(۴) دارای عضو واحد $\mathbf{1} \in [a,b]$ باشد. یعنی، برای هر $x \in [a,b]$، $\mathbf{1} \odot x = x$ باشد.
(۵) $\mathbf{0} \odot x = \mathbf{0}$.
(۶) $\odot$ روی $\oplus$ بخش‌پذیر باشد. یعنی، $x \odot (y \oplus z) = (x \odot y) \oplus (x \odot z)$.

در ادامه نیم‌حلقه‌ی $([a,b], \oplus, \odot)$ را برای دو حالت مهم (با رفتار کاملاً متفاوت) در نظر خواهیم گرفت [۱]. در حالت اول، شبه-عملگرها توسط تابع پیوسته و یکنوای $g : [a,b] \to [\circ, \infty]$ تولید می‌شود. یعنی شبه‌عملگرها به‌شکل $x \oplus y = g^{-1}(g(x) + g(y))$ و $x \odot y = g^{-1}(g(x).g(y))$ معرفی می‌شوند. در این‌صورت شبه‌انتگرال برای تابع $f : [c,d] \to [a,b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{[c,d]}^{\oplus} f(x)dx = g^{-1}\left(\int_c^d g(f(x))dx\right). \qquad (۱)$$

* ارائه‌دهنده

در حالت دوم، $x \oplus y = \max(x, y)$ و $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$. در این‌صورت شبه‌انتگرال برای تابع $f : \mathbb{R} \to [a, b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\mathbb{R}}^{\oplus} f \odot dm = \sup_{x \in \mathbb{R}}(f(x) \odot \psi(x)),$$

که تابع ψ یک $\sup-$اندازه روی m تعریف می‌کند [۱]. اگر اندازه لبگ روی $\mathbb{R}$ را با نماد μ نشان دهیم، در این‌صورت داریم

$$m(A) = \operatorname{ess\,sup}(x|x \in A) = \sup\{a|\mu(\{x|x \in A, x > a\}) > 0\}.$$

قضیه ۳.۱. [۱] فرض کنیم m، $\sup-$ اندازه روی $\Big([0, \infty], \mathbb{B}([0, \infty])\Big)$ باشد که در آن $\mathbb{B}([0, \infty])$، $-\sigma$ جبر بورل روی $[0, \infty]$ می‌باشد و $m(A) = \operatorname{ess\,sup}_{\mu}(\psi(x)|x \in A)$ و $\psi : [0, \infty] \to [0, \infty]$ چگال پیوسته باشد. در این‌صورت، برای شبه-جمع $\oplus$ با مولد g، خانواده‌ی $\{m_\lambda\}$ از $\oplus_\lambda-$ اندازه روی $([0, \infty], \mathbb{B})$ وجود دارد که $m = \lim_{\lambda \to \infty} m_\lambda$، که در آن $\oplus_\lambda$ توسط g^λ (g به توان λ) تولید می‌شود و $\lambda \in (0, \infty)$ می‌باشد.

قضیه ۴.۱. [۱] فرض کنید $([0, \infty], \sup, \odot)$ یک نیم‌حلقه با مولد g باشد، یعنی برای هر $x, y \in [a, b]$ داشته باشیم $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$. فرض کنید m همانند قضیه ۳.۱ باشد در این‌صورت خانواده $\{m_\lambda\}$ از $\oplus_\lambda-$اندازه‌ها وجود دارد که $\oplus_\lambda$ توسط g^λ برای $\lambda \in (0, \infty)$ تولید می‌شود به قسمی که برای هر تابع پیوسته $f : [0, \infty] \to [0, \infty]$ داشته باشیم:

$$\int^{\sup} f \odot dm = \lim_{\lambda \to \infty} \int^{\oplus_\lambda} f \odot dm_\lambda = \lim_{\lambda \to \infty} \left(g^\lambda\right)^{-1} \left(\int g^\lambda(f(x))dx \right).$$

قضیه ۵.۱. فرض می‌کنیم Σ خانواده‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد. برای هر $f, f_1, f_2 \in F$ و عدد ثابت λ، داریم:

(۱) $\int_{[c,d]}^{\oplus}(f_1 + f_2)dx = \int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 dx + \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 dx$.

(۲) $\int_{[c,d]}^{\oplus}(\lambda \otimes f)dx = \lambda \otimes \int_{[c,d]}^{\oplus} f dx$.

(۳) اگر $f_1 \leq f_2$ آن‌گاه $\int_{[c,d]}^{\oplus} f_1 dx \leq \int_{[c,d]}^{\oplus} f_2 dx$.

(۴) $\int_{[c,d]\cup[e,f]}^{\oplus} f dx = \int_{[c,d]}^{\oplus} f dx \oplus \int_{[e,f]}^{\oplus} f dx$

۲. نتایج اصلی

در این بخش به ارائه نامساوی دیاز-متکالف برای شبه‌انتگرال‌ها می‌پردازیم.

حالت کلاسیک نامساوی دیاز-متکالف: [۴] فرض کنید (X, μ) یک فضای احتمال، $f, g \in L^2(X, \mu)$، $0 < m < M$ و $mg \leq f \leq Mg$، آن‌گاه

$$\int_X f^2 d\mu \cdot \int_X g^2 d\mu \leq \frac{(M + m)^2}{4Mm} \left(\int_X (f \cdot g)d\mu \right)^2. \qquad (۲)$$

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $f, h : [a, b] \to [c, d]$ توابعی پیوسته و $g : [c, d] \to [0, +\infty)$ تابعی پیوسته و صعودی باشد. در این‌صورت داریم:

$$\int_{[a,b]}^{\oplus} f^2(x)dx \odot \int_{[a,b]}^{\oplus} h^2(x)dx \leq \frac{(M + m)^2}{4Mm} \int_{[a,b]}^{\oplus} (f \odot h)^2(x)dx.$$

در حالتی دیگر، اگر $([0, \infty], \sup, \odot)$ یک نیم‌حلقه فرض شود، به‌طوری‌که $x \odot y = g^{-1}(g(x)g(y))$ آن‌گاه نامساوی دیاز-متکالف را به‌صورت زیر خواهیم داشت.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $f, h : [a, b] \to [c, d]$ توابعی پیوسته و $g : [c, d] \to [\circ, +\infty)$ تابعی پیوسته و صعودی باشد. در این‌صورت رابطه زیر برقرار است:

$$\int^{\sup} f^{\mathbf{۲}} \odot dm \odot \int^{\sup} h^{\mathbf{۲}} \odot dm \leq \frac{(M+m)^{\mathbf{۲}}}{\mathbf{۴}Mm} \int^{\sup} (f \odot h)^{\mathbf{۲}}\, dm.$$

نتیجه ۳.۲. حال که نامساوی دیاز–متکالف را برای شبه‌انتگرال‌ها بیان کردیم، خواننده می‌تواند نامساوی‌های از این دست را مورد مطالعه قرار داده و در شبه‌انتگرال‌ها بررسی کند.

مراجع

1. H. Agahi, H. R. Mesiar and Y. Ouyang, *Chebyshev type inequalities for pseudo-integrals*, Nonlinear Anal. **72** (6) (2010) 2737–2743.
2. B. Daraby, *Generalization of the Stolarsky type inequality for pseudo-integrals*, Fuzzy Sets Syst. **194** (1) (2012) 90–96.
3. M. S. Moslehian, R. Nakamoto and Y. Seo, *A Diaz Metealf type inequality for positive linear maps and its applications*, Electron. J. Linear Algebra **22** (2011) 279–190.
4. A. Flores-Franulič and H. Román-Flores, *A Chebyshev type inequality for fuzzy integrals*, Appl. Math. Comput. **190** (2009) 1178–1184.
5. Y. Ouyang and R. Mesiar, *On the comonotonic-*-property for sugeno integral*, Appl. Math. Comput. **211** (2009) 450–458.
6. M. Sugeno, *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications*, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Japan, 1974.
7. Z. Wang and G. J. Klir, *Fuzzy Measure Theory*, Plenum Press, New York, 1992.

پست الکترونیکی: bdaraby@maragheh.ac.ir
پست الکترونیکی: mkmk150@gmail.com

معیاری برای منظم‌پذیری آرون-برنر نگاشت سه‌خطی کران‌دار

ندا اخلاقی
پژوهشگر مستقل
و محمدرضا یاسمیان*
گروه علوم پایه، دانشگاه شهید رجایی کاشان، دانشگاه فنی و حرفه‌ای استان اصفهان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله ابتدا به تعریف منظم‌پذیری آرون-برنر نگاشت سه‌خطی کران‌دار و برخی ویژگی‌های آن می‌پردازیم. سپس در ادامه شرایط لازم و کافی برای منظم‌پذیری آرون-برنر این نوع نگاشت‌ها را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم نگاشت سه‌خطی کران‌دار $f : X_۱ \times X_۲ \times X_۳ \to X_۴$ منظم‌پذیر آرون-برنر است اگر و تنها اگر

$$f^{t***}(X_۱^{**}, X_۲^{**}, X_۴^{*}) = f^{***i**}(X_۱^{**}, X_۲^{**}, X_۴^{*})$$

و

$$f^{s******}(X_۲^{**}, X_۳^{**}, X_۴^{*}) = f^{t******j}(X_۲^{**}, X_۳^{**}, X_۴^{*})$$

.

واژه‌های کلیدی: منظم‌پذیر آرنز، منظم‌پذیر آرون-برنر، نگاشت سه‌خطی کران‌دار.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 17C65, 46H25.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنیم $f : X_۱ \times X_۲ \to X_۳$ نگاشتی دوخطی کران‌دار بر فضاهای نرم‌دار باشد. آرنز در سال ۱۹۵۱ در [۱] نشان داد که توسیع‌های f به صورت f^{***} و f^{r****r} از $X_۱^{**} \times X_۲^{**}$ به $X_۳^{**}$ هستند. هنگامی که این توسیع‌ها برابر باشند، آن‌گاه f منظم‌پذیر آرنز نامیده می‌شود. اگر ضرب طبیعی از جبر باناخ A دارای ویژگی مذکور باشد، آن‌گاه جبر باناخ A را منظم‌پذیر آرنز می‌نامیم. برای اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به [۲، ۳، ۴، ۷، ۹] مراجعه کنید.

بعدها موضوع تعمیم‌داده شد و برای نگاشت‌های سه‌خطی کران‌دار مورد بحث قرار گرفت، در ادامه به مختصری از این موضوعات پرداخته‌ایم.

۲. مفاهیم اولیه منظم‌پذیری آرون-برنر

این بخش را با تعریف زیر شروع می‌کنیم:

تعریف ۱.۲. فرض کنیم $X_۱, X_۲, X_۳$ و $X_۴$ فضاهای نرم‌دار روی میدان $\mathbb{F} = \mathbb{R}$یا$\mathbb{C}$ باشند. نگاشت $f : X_۱ \times X_۲ \times X_۳ \to X_۴$ را سه‌خطی می‌نامیم هرگاه نسبت به هریک از مؤلفه‌های دامنه‌اش خطی باشد.

نگاشت سه خطی f را کران‌دار می‌نامیم، در صورتی‌که $c > ۰$ موجود باشد که برای هر $x_۱ \in X_۱, x_۲ \in X_۲, x_۳ \in X_۳$ و $x_۴ \in X_۴$ داشته باشیم:

$$\|f(x_۱, x_۲, x_۳)\| \leq c\|x_۱\|\|x_۲\|\|x_۳\|,$$

و نرم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\|f\| = \sup\{\|f(x_۱, x_۲, x_۳)\| : \|x_۱\| \leq ۱, \|x_۲\| \leq ۱, \|x_۳\| \leq ۱\}.$$

* ارائه‌دهنده

نگاشت f کران‌دار است اگر و تنها اگر پیوسته باشد.

تعریف ۲.۲. فرض کنیم X_1, X_2, X_3 و X_4 فضاهای نرم‌دار و $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_4$ نگاشتی سه‌خطی کران‌دار باشد. در این‌صورت می‌توان الحاقی f را به‌صورت

$$f^* : X_4^* \times X_1 \times X_2 \to X_3^*$$
$$< f^*(x_4^*, x_1, x_2), x_3 >=< x_4^*, f(x_1, x_2, x_3) >,$$

برای هر $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, x_3 \in X_3$ و $x_4 \in X_4$ تعریف نمود. نگاشت f^* نیز نگاشتی سه خطی کران‌دار است و می‌توان الحاقی مراتب بالاتر را نیز برای آن تعریف نمود.

تعریف ۳.۲. فرض کنیم $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_4$ نگاشتی سه‌خطی کران‌دار بر روی فضاهای نرم‌دار باشد. در این‌صورت می‌توان نگاشت‌های واگرد f را به‌صورت زیر تعریف نمود:

$$f^i : X_2 \times X_1 \times X_3 \to X_4 \ : \ f^i(x_2, x_1, x_3) = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$f^j : X_1 \times X_3 \times X_2 \to X_4 \ : \ f^j(x_1, x_3, x_2) = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$f^r : X_3 \times X_2 \times X_1 \to X_4 \ : \ f^r(x_3, x_2, x_1) = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$f^t : X_3 \times X_1 \times X_2 \to X_4 \ : \ f^t(x_3, x_1, x_2) = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$f^s : X_2 \times X_3 \times X_1 \to X_4 \ : \ f^s(x_2, x_3, x_1) = f(x_1, x_2, x_3).$$

تمامی این نگاشت‌های سه‌خطی کران‌دار می‌باشند و به آسانی می‌توان نشان داد که توسیع‌های f به‌صورت‌های:

$$f^{****} \ , \ f^{i****i} \ , \ f^{j****j} \ , \ f^{r****r} \ , \ f^{t*****s} \ , \ f^{s*****t},$$

از $X_1^{**} \times X_2^{**} \times X_3^{**}$ به X_4^{**} هستند که لزوماً با یکدیگر برابر نیستند. هنگامی‌که این توسیع‌ها برابر باشند، نگاشت f را منظم‌پذیر آرون -برنر می‌نامیم.

در [۵] خسروی و همکاران با استفاده از جایگشت‌های s_3، منظم‌پذیری آرون-برنر را تعریف نموده و نشان دادند که اگر X یک فضای نرم‌دار باشد و $\Phi, \Psi \in X^*$، در این‌صورت نگاشت سه‌خطی کران‌دار $f : X \times X \times X \to X$ با ضابطه

$$(x_1, x_2, x_3) \to f(x_1, x_2, x_3) =< \Phi, x_1 >< \Psi, x_2 > x_3,$$

برای هر $x_1, x_2, x_3 \in X$ منظم‌پذیر آرون-برنر است. آن‌ها همچنین نشان دادند که هر نگاشت سه‌خطی کران‌دار بر فضاهای نرم‌دار منظم، نگاشت منظم‌پذیر آرون-برنر است. به‌ویژه، اگر X منظم باشد و Y فضای باناخ باشد، آن‌گاه هر نگاشت سه‌خطی کران‌دار $f : X \times X \times X \to Y$ منظم‌پذیر آرون-برنر است.

شیخعلی و همکاران نیز در [۸] و [۱۰] به این موضوعات پرداخته و نشان دادند که اگر دو مؤلفه دامنه تابع سه‌خطی کران‌دار f انعکاسی باشد، آن‌گاه f منظم‌پذیر آرون-برنر است. همچنین چندین محک و برخی ویژگی‌های تجزیه‌پذیری را مورد بررسی قرار دادند.

با استفاده از قضیه گلدشتاین می‌توان منظم‌پذیری آرون-برنر را به‌صورت حدود مکرر تعریف نمود. اگر $(x_\alpha), (y_\beta)$ و (z_γ) به‌ترتیب تورهای کران‌دار در X_1, X_2 و X_3 باشند که با توپولوژی ضعیف ستاره به

$x_1^{**} \in X_1^{**}, x_2^{**} \in X_2^{**}$ و $x_3^{**} \in X_3^{**}$ همگرا باشند، آن‌گاه داریم:

$$f^{i****i}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = \omega^* - \lim_{\beta}\lim_{\alpha}\lim_{\gamma} f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma),$$
$$f^{j****j}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = \omega^* - \lim_{\alpha}\lim_{\gamma}\lim_{\beta} f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma),$$
$$f^{r*****r}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = \omega^* - \lim_{\gamma}\lim_{\beta}\lim_{\alpha} f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma),$$
$$f^{****}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = \omega^* - \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\lim_{\gamma} f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma),$$
$$f^{t*****s}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = \omega^* - \lim_{\gamma}\lim_{\alpha}\lim_{\beta} f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma),$$
$$f^{s*****t}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}) = \omega^* - \lim_{\beta}\lim_{\gamma}\lim_{\alpha} f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma).$$

در این‌صورت f منظم‌پذیر آرون-برنر است اگر و تنها اگر تمامی این حدود مکرر با یکدیگر برابر باشند. برای اطلاعات بیشتر در این خصوص به [۵، ۶، ۱۰] مراجعه کنید.

۳. نگاشت سه‌خطی کراندار منظم‌پذیر آرون-برنر

قضیه ۱.۳. نگاشت سه‌خطی کران‌دار $f : X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_4$ منظم‌پذیر آرون-برنر است اگر و تنها اگر

آ) $f^{t***}(X_1^{**}, X_2^{**}, X_4^{*}) = f^{**i**}(X_1^{**}, X_2^{**}, X_4^{*})$.

ب) $f^{s******s}(X_2^{**}, X_3^{**}, X_4^{*}) = f^{t*******j}(X_2^{**}, X_3^{**}, X_4^{*})$.

اثبات. فرض کنیم تساوی‌های (آ) و (ب) برقرار باشند. از تساوی (ب) برای هر $x_1^{**} \in X_1^{**}, x_2^{**} \in X_2^{**}$ و $x_3^{**} \in X_3^{**}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&< f^{t*****s}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}), x_4^{*} > = < f^{t****}(x_3^{**}, x_1^{**}, x_2^{**}), x_4^{*} > \\
&= < f^{t******}(x_4^{*}, x_3^{**}, x_1^{**}), x_2^{**} > = < f^{t*******}(x_2^{**}, x_4^{*}, x_3^{**}), x_1^{**} > \\
&= < f^{t*******j}(x_2^{**}, x_3^{**}, x_4^{*}), x_1^{**} > = < f^{s******s}(x_2^{**}, x_3^{**}, x_4^{*}), x_1^{**} > \\
&= < f^{s******}(x_4^{*}, x_2^{**}, x_3^{**}), x_1^{**} > = < f^{s*****}(x_2^{**}, x_3^{**}, x_1^{**}), x_4^{*} > \\
&= < f^{s*****t}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}), x_4^{*} > .
\end{aligned}$$

بنابراین $f^{t*****s} = f^{s*****t}$ و نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}
&< f^{t******}(x_4^{*}, x_3^{**}, x_1^{**}), x_2^{**} > = < f^{t*****}(x_3^{**}, x_1^{**}, x_2^{**}), x_4^{*} > \\
&= < f^{t******s}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}), x_4^{*} > = < f^{t******s}(x_1^{**}, x_2^{**}, x_3^{**}), x_4^{*} > \\
&= < f^{s*****}(x_2^{**}, x_3^{**}, x_1^{**}), x_4^{*} > = < x_2^{**}, f^{s****}(x_3^{**}, x_1^{**}, x_4^{*}) > \\
&= < f^{s****t}(x_4^{*}, x_3^{**}, x_1^{**}), x_2^{**} >,
\end{aligned}$$

و چون $f^{s****t}(X_4^{*}, X_3^{**}, X_1^{**}) \subseteq X_2^{*}$، پس داریم:

$$f^{t******}(X_4^{*}, X_3^{**}, X_1^{**}) \subseteq X_2^{*}. \qquad (۱)$$

از طرف دیگر از تساوی (آ) داریم:

$$\begin{aligned}
&< f^{t******}(x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}), x_{۱}^{**} >=< f^{t*****}(x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}, x_{۱}^{**}), x_{۲}^{**} > \\
&=< f^{t****}(x_{۳}^{**}, x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}), x_{۴}^{*} >=< f^{t***}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}), x_{۳}^{**} > \\
&=< f^{**i**}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}), x_{۳}^{**} >=< f^{**is}(x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}), x_{۱}^{**} >,
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $f^{t******}(X_{۲}^{**}, X_{۴}^{*}, X_{۳}^{**}) = f^{**i**}(X_{۲}^{**}, X_{۴}^{*}, X_{۳}^{**})$. در نتیجه داریم:

$$f^{t******}(X_{۲}^{**}, X_{۴}^{*}, X_{۳}^{**}) \subseteq X_{۱}^{*}. \qquad (۲)$$

حال با استفاده از (۱) ، (۲) و [۸، قضیه۷] نتیجه می‌گیریم که f نگاشتی منظم‌پذیر آرون-برنر است.
برعکس، فرض کنیم f منظم‌پذیر آرون-برنر باشد. پس $f^{t*****s} = f^{s*****t}$ و داریم:

$$\begin{aligned}
&< f^{s******}(x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}, x_{۴}^{*}), x_{۱}^{**} >=< f^{s*****}(x_{۴}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}), x_{۱}^{*} > \\
&=< f^{s****}(x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}, x_{۱}^{**}), x_{۴}^{*} >=< f^{s*****t}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}), x_{۴}^{*} > \\
&=< f^{t*****s}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}), x_{۴}^{*} >=< f^{t****}(x_{۳}^{**}, x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}), x_{۴}^{*} > \\
&=< f^{t*****}(x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}, x_{۱}^{**}), x_{۲}^{**} >=< f^{t******}(x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}), x_{۱}^{**} > \\
&=< f^{t*******j}(x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}, x_{۴}^{*}), x_{۱}^{**} >,
\end{aligned}$$

که تساوی (ب) قضیه را نتیجه می‌دهد. برای اثبات تساوی (آ)، منظم‌پذیری آرون-برنر f نتیجه می‌دهد که $f^{****} = f^{t*****s}$. فرض کنیم (x_α) تورکران‌داری در $X_{۱}$ باشد که با توپولوژی ضعیف ستاره به $x_{۱}^{**} \in X_{۱}^{**}$ همگراست. در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned}
&< f^{**i**}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}), x_{۳}^{**} >=< f^{***i*}(x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}), x_{۱}^{**} > \\
&= \lim_{\alpha} < f^{**i*}(x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}), x_\alpha >= \lim_{\alpha} < f^{**i}(x_{۴}^{*}, x_{۳}^{**}, x_\alpha), x_{۲}^{**} > \\
&= \lim_{\alpha} < f^{**}(x_{۳}^{**}, x_{۴}^{*}, x_\alpha), x_{۲}^{**} >= \lim_{\alpha} < f^{***}(x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}, x_{۴}^{*}), x_\alpha > \\
&=< x_{۱}^{**}, f^{***}(x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}, x_{۴}^{*}) >=< f^{****}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}), x_{۴}^{*} > \\
&=< f^{t*****}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۳}^{**}), x_{۴}^{*} >=< f^{t****}(x_{۳}^{**}, x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}), x_{۴}^{*} > \\
&=< f^{t****}(x_{۱}^{**}, x_{۲}^{**}, x_{۴}^{*}), x_{۳}^{**} >,
\end{aligned}$$

که تساوی (آ) را نتیجه می‌دهد و اثبات به پایان می‌رسد. □

نتیجه ۲.۳. فرض کنیم $(z_\gamma) \subseteq X_{۳}$ و $(y_\beta) \subseteq X_{۲}, (x_\alpha) \subseteq X_{۱}$ تورهایی کران‌دار و با توپولوژی ضعیف ستاره به‌ترتیب به $x_{۳}^{**} \in X_{۳}^{**}$ و $x_{۲}^{**} \in X_{۲}^{**}, x_{۱}^{**} \in X_{۱}^{**}$ همگرا باشند. در این‌صورت نگاشت سه‌خطی کران‌دار $f : X_{۱} \times X_{۲} \times X_{۳} \to X_{۴}$ منظم‌پذیر آرون-برنر است اگر و تنها اگر

آ) $\omega^* - \lim_\gamma \lim_\alpha \lim_\beta f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) = \omega^* - \lim_\alpha \lim_\beta \lim_\gamma f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)$.

ب) $\omega^* - \lim_\beta \lim_\gamma \lim_\alpha f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) = \omega^* - \lim_\gamma \lim_\alpha \lim_\beta f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma)$.

اثبات. اگر نگاشت f منظم‌پذیر آرون-برنر باشد، آن‌گاه به وضوح تساوی‌های (آ) و (ب) برقرار است. برای برعکس، فرض کنیم (آ) و (ب) برقرار باشند، در این‌صورت نشان می‌دهیم f منظم‌پذیر آرون-برنر است. از

تساوی (ب) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} < f^{s******s}(x_۲^{**}, x_۳^{**}, x_۴^{*}), x_۱^{**} > &= \lim_{\beta}\lim_{\gamma}\lim_{\alpha} < x_۴^{*}, f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) > \\ &= \lim_{\gamma}\lim_{\alpha}\lim_{\beta} < x_۴^{*}, f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) > \\ &=< f^{t******j}(x_۲^{**}, x_۳^{**}, x_۴^{*}), x_۱^{**} > . \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$f^{s******s}(X_۲^{**}, X_۳^{**}, X_۴^{*}) = f^{t******j}(X_۲^{**}, X_۳^{**}, X_۴^{*}). \qquad (۳)$$

از تساوی (آ) نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned} < f^{t***}(x_۱^{**}, x_۲^{**}, x_۴^{*}), x_۳^{**} > &= \lim_{\gamma}\lim_{\alpha}\lim_{\beta} < x_۴^{*}, f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) > \\ &= \lim_{\alpha}\lim_{\beta}\lim_{\gamma} < x_۴^{*}, f(x_\alpha, y_\beta, z_\gamma) > \\ &=< f^{**i**}(x_۱^{**}, x_۲^{**}, x_۴^{*}), x_۳^{**} > . \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$f^{t***}(X_۱^{**}, X_۲^{**}, X_۴^{*}) = f^{**i**}(X_۱^{**}, X_۲^{**}, X_۴^{*}). \qquad (۴)$$

حال با استفاده از قضیه قبل و از (۳) و (۴) منظم‌پذیری آرون-برنر f را نتیجه می‌گیریم. □

مراجع

1. R. Arens, *The adjoint of a bilinear operation,* Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951) 839–848.
2. H. G. Dales, A. Rodríguez-Palacios, and M. V. Velasco, *The second transpose of a derivation,* J. London Math. Soc. (2) **64** (3) (2001) 707–721.
3. K. Haghnejad Azar, *Arens regularity and factorization property,* J. Sci. Kharazmi Univ. **13** (2) (2013) 327–336.
4. K. Haghnejad Azar, *Arens regularity of bilinear forms and unital Banach module spaces,* Bull. Iranian Math. Soc. **40** (2) (2014) 505–520.
5. A. A. Khosravi, H. R. Ebrahimi Vishki and A. M. Peralta, *Aron-Berner extensions of triple maps with application to the bidual of Jordan Banach triple systems,* Linear Algebra Appl. **580** (2019) 436–463.
6. E. M. Landesman and B. Russo, *The second dual of a C^*-ternary ring,* Canad. Math. Bull. **26** (2) (1983) 241–246.
7. A. Sheikhali and N. Akhlaghi, *Arens regularity of Banach module actions and the strongly irregular property,* J. Math. Computer. Sci. **13** (1) (2014) 41–46.
8. A. Sheikhali, A. Ebadian and K. Haghnejad Azar, *Close-to-regularity and completely regularity of bounded tri-linear maps,* (2019). `arXiv:1911.01038`
9. A. Sheikhali, A. Ebadian and K. Haghnejad Azar, *On the properties of the Arens regularity of bounded bilinear mappings,* Math. Res. **6** (2) (2020) 235–242.
10. A. Sheikhali, A. Ebadian and K. Haghnejad Azar, *Regularity of bounded tri-linear maps and the fourth adjoint of a tri-derivation,* Global Anal. Discrete Math. **5** (1) (2020) 51–65.

پست الکترونیکی: Neda.Akhlaghi1365@gmail.com
پست الکترونیکی: myasamian@yahoo.com

ارائه‌های پوستری

آنالیز عددی

حل معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی با استفاده از روش هم‌مکانی مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لژاندر

مرضیه پوربابایی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و عباس سعادتمندی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله با استفاده از یک روش تقریبی و با کمک چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته و روش هم‌مکانی به حل عددی معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی می‌پردازیم. برای این منظور از مفاهیم مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان-لیوویل برای حل معادلات خطی و غیرخطی کسری از مرتبه توزیعی استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن روش پیشنهادی، این دسته از معادلات را به دستگاهی از معادلات جبری تبدیل و سپس جواب معادله را به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری کاپوتو، مرتبه توزیعی، روش هم‌مکانی، چندجمله‌ای‌های لژاندر.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 65L03, 65L10, 65N35.

۱. پیش‌گفتار

هر دو دسته معادلات دیفرانسیل مرتبه صحیح و کسری نمونه‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی هستند. برای این دسته از معادلات تحقیقات کمی انجام گرفته است. در حقیقت بیشتر معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری توزیعی جواب تحلیلی ندارند، بنابراین روش‌های عددی مانند روش ماتریس عملیاتی [۷]، روش هم‌مکانی چبیشف [۶]، روش عناصر متناهی [۳]، روش عناصر طیفی لژاندر [۲] مورد استفاده قرار گرفته شده است.

در این مقاله ما قصد داریم معادله دیفرانسیل کسری از مرتبه توزیعی زیر را بررسی نمائیم [۵].

$$\int_{\delta}^{\beta} H_1\left(\alpha, D^{\alpha}u(t)\right) d\alpha + H_2\left(t, u(t), D^{\gamma_i}u(t)\right) = g(t), \quad t \in [0, L], \tag{1}$$

به‌طوری‌که δ و β اعدادی مثبت، D^{α} مشتق کسری از نوع کاپوتو و $(\gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_r)$ اعداد مثبت، و H_1 و H_2 توابعی خطی یا غیرخطی هستند. شرایط اولیه برای معادله (۱) به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$u^{(j)}(0) = u_0^{(j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, \ell - 1, \tag{2}$$

به‌طوری‌که $\ell = \max\{\lceil\beta\rceil, \lceil\gamma_r\rceil\}$ و سقف تابع به وسیله $\lceil . \rceil$ نمایش داده می‌شود.

۲. مقدمات و پیش نیازها

در این قسمت برخی از خواص مشتق کسری کاپوتو و انتگرال کسری ریمان لیوویل که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد را بررسی می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α بهشکل زیر تعریف می‌شود [۷].

$$D^{\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha+1-n}} ds, \quad n-1 < \alpha \leq n, \ n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

* ارائه‌دهنده

به‌طوری‌که $\alpha > 0$ مرتبه مشتق و $n = \lceil \alpha \rceil$ نیز کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی با α و $\Gamma(.)$ نشان‌دهنده تابع گاماست. برای مشتق کسری روابط زیر برقرار است.

$$D^\alpha C = 0, \quad D^\alpha t^m = \begin{cases} 0, & m < \lceil \alpha \rceil, \\ \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+1-\alpha)} t^{m-\alpha}, & m \geq \lceil \alpha \rceil, \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{۴}$$

تعریف ۲.۲. عملگر انتگرال کسری ریمان -لیوویل از مرتبه α به‌شکل زیر تعریف می‌شود [۵].

$$I^\alpha u(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(s)}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, & \alpha > 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \end{cases} \tag{۵}$$

برای انتگرال کسری ریمان-لیوویل داریم:

$$I^\alpha t^k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1+\alpha)} t^{k+\alpha}, \ k > -1. \tag{۶}$$

عملگر مشتق کسری و انتگرال کسری ریمان لیوویل عملگرهایی خطی هستند و در خواص زیر صدق می‌کنند:

$$I^\alpha \left(D^\alpha u(t) \right) = u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!} u^k(0), \tag{۷}$$

فرم تحلیلی چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته $L_{i,h}(t)$ برای $t \in [0, h]$ به‌صورت زیر است [۷]:

$$L_{i,h}(t) = \sum_{k=0}^{i} \frac{(-1)^{i+1}(i+k)! t^k}{(i-k)!(k!)^2 h^k}, \tag{۸}$$

همچنین برای چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته، شرط تعامد به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_0^h L_{i,h}(t) L_{j,h}(t) dt = \begin{cases} \frac{h}{2i+1}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{۹}$$

۳. بیان روش و تقریب تابع

هر تابع $u(t)$ که در $(0, h)$ مربع انتگرال‌پذیر باشد را می‌توان به‌صورت بسط چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته به‌صورت زیر نوشت که $u(t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j L_{j,h}(t)$ که ضرائب c_j به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$c_j = \frac{2j+1}{h} \int_0^h u(t) L_{j,h}(t) dt, \ j = 0, 1, \ldots$$

در عمل تنها $N+1$ جمله اول چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته درنظر گرفته می‌شود. از این رو ما می‌نویسیم:

$$u_N(t) = \sum_{j=0}^{N} c_j L_{j,h}(t) = C^T \Phi(t), \tag{۱۰}$$

به‌طوری‌که $C^T = [c_0, c_1, \ldots, c_N]$, $\Phi(t) = [L_{0,h}(t), L_{1,h}(t), \ldots, L_{N,h}(t)]^T$. فرم ماتریسی چندجمله‌ای‌های لژاندر به‌صورت زیر بیان می‌شود [۸] که

$$\Phi(t) = A T_N(t),$$

به‌طوری که

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ -۱ & (-۱)^{۲}۲! & ۰ & \cdots & ۰ \\ (-۱)^{۲} & (-۱)^{۳}\frac{۳!}{۱!} & (-۱)^{۴}\frac{۴!}{۲!} & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-۱)^{N} & (-۱)^{N+۱}\frac{(N+۱)!}{(N-۱)!} & (-۱)^{N+۲}\frac{(N+۲)!}{۲!(N-۲)!} & \cdots & (-۱)^{۲N}\frac{(۲N)!}{N!} \end{pmatrix}.$$

و $T_N(t)=[۱,t,t^{۲},\ldots,t^{N}]^{T}$. در این‌صورت داریم:

$$\begin{aligned} (۱۱)\quad I^{\alpha}(\Phi(t)) &= I^{\alpha}(AT_N(t)) = AI^{\alpha}(T_N(t)) \\ &= A\left[\frac{\Gamma(۱)}{\Gamma(۱+\alpha)}t^{\alpha} \quad \frac{\Gamma(۲)}{\Gamma(۲+\alpha)}t^{۱+\alpha} \quad \frac{\Gamma(۳)}{\Gamma(۳+\alpha)}t^{۲+\alpha} \quad \cdots \quad \frac{\Gamma(N+۱)}{\Gamma(N+۱+\alpha)}t^{N+\alpha}\right]^{T} \\ &= AM_{\alpha,t}T_N(t), \end{aligned}$$

که در آن ماتریس $M_{\alpha,t}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(۱۲)\qquad M_{\alpha,t}=\begin{bmatrix} \frac{\Gamma(۱)}{\Gamma(۱+\alpha)}t^{\alpha} & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & \frac{\Gamma(۲)}{\Gamma(۲+\alpha)}t^{\alpha} & ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & \frac{\Gamma(N+۱)}{\Gamma(N+۱+\alpha)}t^{\alpha} \end{bmatrix}.$$

حال برای حل معادله (۱) با استفاده از چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته و برای $\beta \geq \gamma_i$، $D^{\beta}u(t)$ را به شکل زیر بسط می‌دهیم [۵]:

$$(۱۳)\qquad D^{\beta}u(t)=C^{T}\Phi(t)=C^{T}AT_N(t),$$

به کمک رابطه (۷) داریم:

$$(۱۴)\qquad u(t)=C^{T}AM_{\beta,t}T_N(t)+\sum_{k=۰}^{\ell-۱}\frac{t^{k}}{k!}u^{(k)}(۰),$$

بنابراین با در نظر گرفتن معادله (۱۴) می‌توان نوشت:

$$(۱۵)\qquad D^{\gamma_i}u(t)=C^{T}AM_{\beta-\gamma_i,t}T_N(t)+\sum_{k=۰}^{\ell-۱}\frac{D^{\gamma_i}(t^{k})}{k!}u^{(k)}(۰),$$

و

$$(۱۶)\qquad D^{\alpha}u(t)=C^{T}AM_{\beta-\alpha,t}T_N(t)+\sum_{k=۰}^{\ell-۱}\frac{D^{\alpha}(t^{k})}{k!}u^{(k)}(۰),$$

با جای‌گذاری روابط (۱۴)-(۱۶) در معادله (۱) داریم:

$$\begin{aligned} (۱۷)\quad &\int_{\delta}^{\beta}H_{۱}(\alpha,C^{T}AM_{\beta-\alpha,t}T_N(t)+\sum_{k=۰}^{\ell-۱}\frac{D^{\alpha}(t^{k})}{k!}u^{(k)}(۰))d\alpha \\ &+H_{۲}(t,C^{T}AM_{\beta,t}T_N(t)+\sum_{k=۰}^{\ell-۱}\frac{t^{k}}{k!}u^{(k)}(۰),C^{T}AM_{\beta-\gamma_i}T_N(t)+\sum_{k=۰}^{\ell-۱}\frac{D^{\gamma_i}(t^{k})}{k!}u^{(k)}(۰))=g(t), \end{aligned}$$

در این قسمت با محاسبه انتگرال در رابطه (۱۷) با کودراتور گاوس لژاندر [۱] و با جای‌گذاری ریشه‌های لژاندر $t_i,\ i = ۱, \ldots, m - \ell + ۱$ در بازه $[۰, h]$ به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\sum_{j=۱}^{S} w_j H_۱(\sigma_j, C^T A M_{\beta-\sigma_j,t} T_N(t_i) + \sum_{k=۰}^{\ell-۱} \frac{D^{\sigma_j}(t_i^k)}{k!} u^{(k)}(۰)) + H_۲(t_i, C^T A M_{\beta,t} T_N(t_i)$$
$$+ \sum_{k=۰}^{\ell-۱} \frac{t_i^k}{k!} u^{(k)}(۰), C^T A M_{\beta-\gamma_i,t} T_N(t_i) + \sum_{k=۰}^{\ell-۱} \frac{D^{\gamma_i}(t_i^k)}{k!} u^{(k)}(۰)) = g(t_i),$$

به‌طوری‌که σ_j و w_j به ترتیب نقاط و وزن‌های انتگرال‌گیری گاوس لژاندر هستند. با در نظر گرفتن شرایط مرزی و با حل دستگاه جبری حاصل، تعداد $N + ۱$ مجهول c_i به‌دست می‌آیند.

۴. دست‌آوردهای پژوهش

در این قسمت به منظور کارآیی روش دو مثال عددی مطرح می‌کنیم.

مثال ۱.۴. مثال زیر را در نظر بگیرید [۴].

$$\int_{۰/۲}^{۱/۵} \Gamma(۳ - \alpha) D^{\alpha} u(t) d\alpha = ۲ \left(\frac{t^{۱/۸} - t^{۰/۵}}{\ln t} \right),\ u(۰) = u'(۰) = ۰,$$

جواب دقیق این مسأله به‌صورت $u(t) = t^۲$ است. در جدول ۱ نرم دو خطا برای $m = ۲$ و مقادیر مختلف S گزارش شده است.

از این جدول می‌توان نتیجه گرفت با افزایش S نرم دو خطا کاهش می‌یابد و تقریبا می‌توان به جواب دقیق رسید. همچنین نمودار سمت راست از شکل ۱ خطای مطلق برای $m = ۲, S = ۱۱$ را نشان می‌دهد.

جدول ۱. نرم دو خطا برای $m = ۲$ و مقادیر مختلف S برای مثال ۱.۴.

S	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
خطا دو نرم	$۵/۲۹ \times ۱۰^{-۳}$	$۱/۸۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۹/۳۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱/۲۶ \times ۱۰^{-۱۵}$	$۶/۴۸ \times ۱۰^{-۲۱}$	$۱/۵۱ \times ۱۰^{-۲۶}$

مثال ۲.۴. در این جا مسأله غیر خطی زیر را در نظر می‌گیریم [۴].

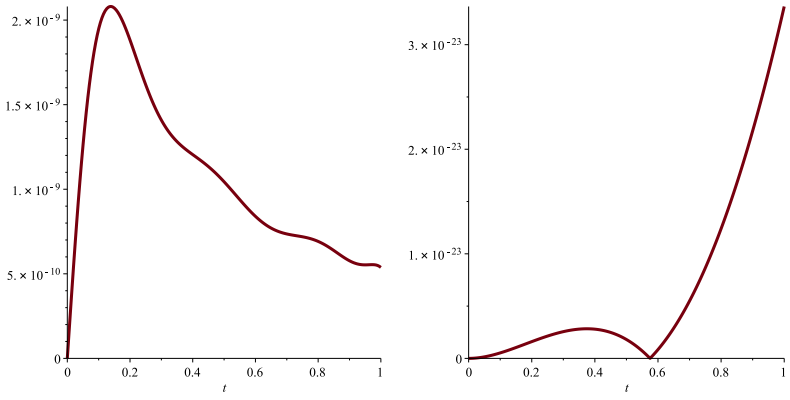
$$\int_{۰}^{۱} (\Gamma(۴ - \alpha) D^{\alpha} u(t))^۲ d\alpha = \frac{۱۸ t^۴ (t^۲ - ۱)}{(\ln t)},\ \ u(۰) = ۰,$$

جواب دقیق این مسأله به‌صورت $u(t) = t^۳$ است. نمودار سمت چپ از شکل ۱ خطای مطلق به ازای $m = ۸, S = ۵$ نشان می‌دهد.

همچنین جدول ۲ مقادیر مختلف نرم دو خطا را به ازای $m = ۷$ و مقادیر مختلف S گزارش می‌دهد که از این جدول نیز واضح است که با افزایش مقدار S نرم دو خطا کاهش می‌یابد.

جدول ۲. نرم دو خطا برای $m = ۷$ و مقادیر مختلف S برای مثال ۲.۴.

S	۲	۳	۴	۵	۶
نرم دو خطا	$۱/۴۹ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۸۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۶/۳۱ \times ۱۰^{-۸}$	$۱/۱۷ \times ۱۰^{-۹}$	$۲/۳۴ \times ۱۰^{-۱۱}$



شکل ۱. شکل راست نمودار خطای مطلق برای مثال (۱.۴) به ازای $m = ۲, S = ۱۱$ و شکل چپ نمودار خطای مطلق برای مثال (۲.۴) به ازای $m = ۸, S = ۵$.

مراجع

1. C. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni and T. A. Zang, *Spectral Methods in Fluid Dynamic,* Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall, 1988.
2. M. Dehghan and M. Abbaszadeh, *A Legendre spectral element method (SEM) based on the modified bases for solving neutral delay distributed-order fractional damped diffusion-wave equation,* Math. Methods Appl. Sci. **41** (2018) 3476–3494.
3. W. Fan and F. Liu, *A numerical method for solving the two-dimensional distributed order space-fractional diffusion equation on an irregular convex domain,* Appl. Math. Lett. **77** (2018) 114–121.
4. N. Jibenja, B. Yuttanan and M. Razzaghi, *An efficient method for numerical solutions of distributed-order fractional differential equations*, J. Comput. Nonlinear Dynam. **13** (2018) 111003.
5. S. Mashayekhi and M. Razzaghi, *Numerical solution of distributed order fractional differential equations by hybrid functions,* J. Comput. Phys. **315** (2016) 169–181.
6. M. Morgado, M. Rebelo, L. Ferrás and N. Ford, *Numerical solution for diffusion equations with distributed order in time using a Chebyshev collocation method,* Appl. Numer. Math. **114** (2017) 108–123.
7. M. Pourbabaee and A. Saadatmandi, *A novel Legendre operational matrix for distributed order fractional differential equations*, Appl. Math. Comput. **361** (2019) 215–231.
8. Y. Yang, Y. Ma and L. Wang, *Legendre polynomials operational matrix method for solving fractional partial differential equations with variable coefficients*, Math. Probl. Eng. **2015** (2015) 915195.

پست الکترونیکی: m.pourbabaee@kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: saadatmandi@kashanu.ac.ir

روش هم‌مکانی مبتنی بر توابع چبیشف شیفت‌یافته و پایه شعاعی در تقریب یک معادله سهموی با شرط اولیه غیرمحلی

اشرف حاجی‌علو*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و فاطمه ذبیحی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. تعداد زیادی از پدیده‌ها در زمینه‌های مختلف فیزیکی به وسیله معادلات مشتق جزئی سهموی با شرایط اولیه غیرمحلی شبیه‌سازی شده‌اند، در حالی‌که تعداد کمی از روش‌های عددی برای حل این‌گونه مسائل وجود دارد. حل تقریبی مسئله‌ای از این مدل مبتنی بر چندجمله‌ای‌های چبیشف شیفت داده شده در زمان و توابع پایه شعاعی گاوسی در مکان، در این مقاله مورد بررسی قرار می‌گیرد و دستگاه خطی معادلات جبری به‌دست آمده از روش هم‌مکانی حل می‌شود. مثال عددی نشان می‌دهد که روش ارائه شده، آسان و کارآمد است و نتایج عددی پایدار و بسیار دقیقی را تولید می‌کند.

واژه‌های کلیدی: روش‌های بدون شبکه، توابع پایه شعاعی، چندجمله‌ای‌های چبیشف شیفت‌یافته، شرط اولیه غیرمحلی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 35K20, 65M70.

۱. پیش‌گفتار

مسائل مختلفی در زمین‌شناسی، هدایت گرمایی، فیزیک پلاسما، مهندسی شیمی، ترموستاتیک، هیدرودینامیک و راکتورهای اتمی از مسائل مقدار مرزی اولیه غیرکلاسیک تولید می‌شوند. مسائل غیرکلاسیک با شرایط اولیه غیرمحلی که مسائل زمان دوره‌ای یا کلاسیک را تعمیم می‌دهند، می‌توانند با نتایج بهتر از شرط اولیه کلاسیک در مدل‌سازی انتشار رادیونوکلوئیدها در مایع استوکس، فاضلاب و پخش در محیط متخلخل به کار روند.

مسئله سهموی با شرط اولیه غیرمحلی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varphi(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \le T, \tag{1}$$

با شرایط مرزی

$$u(0,t) = g_0(t), \quad 0 < t \le T, \tag{2}$$

$$u(1,t) = g_1(t), \quad 0 < t \le T, \tag{3}$$

و شرط اولیه وزنی زمانی غیرمحلی:

$$u(x,0) = \sum_{j=1}^{N} \beta_j(x) u(x,T_j) + \chi(x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < T_1 < T_2 < \cdots < T_N = T, \tag{4}$$

به‌طوری‌که توابع φ , g_0 , g_1 , β_j , T_j , χ معلومند و u مجهول است. وجود و یکتایی جواب‌های این مسئله با فرض زیر نشان داده شده است [۵].

$$\sum_{j=1}^{N} \|\beta_j(x)\|_2 e^{-\pi^2 T_j} < 1, \quad 0 < x < 1,$$

* ارائه‌دهنده

به‌طوری‌که $\|.\|_۲$ ماکزیمم نرم روی $L^۲(۰,۱)$ می‌باشد. این‌ها با رویکرد کلاسیک، نظریه نیمه گروهی انتزاعی و نمایش تئوری پتانسیل، روش ضربی و اصل ماکزیمم جواب اثبات می‌شوند [۲، ۳، ۴] .

مقاله‌های زیادی راجع به روش‌های عددی معادلات دیفرانسیل جزیی سهموی با شرط اولیه کلاسیک و شرایط مرزی غیرمحلی وجود دارند، اما تعداد کمی از روش‌های عددی برای حل مسئله با شرط اولیه غیراستاندارد که در این‌جا ارائه شده، وجود دارد. دهقان از طرح تفاضلات متناهی برای حل این مسئله استفاده کرد [۶]. مؤلفان در [۸]، طرح‌های تفاضلات متناهی آنالیز شده را به کار برده‌اند و اخیراً برای حل این معادله، از روش ریتز گالرکین در [۱] استفاده شده است. ما از روش توابع پایه شعاعی (RBFs) که یک روش بدون شبکه و ابزاری قدرتمند برای درون‌یابی است، استفاده کرده‌ایم که کاری نو و جدید می‌باشد و تاکنون مسئله جاری با این روش، حل نشده است. روش توابع پایه شعاعی، اولین بار توسط هاردی در سال ۱۹۶۸ مورد مطالعه قرار گرفت. کانسا در سال ۱۹۹۰ آن را برای حل معادلات دیفرانسیل به کار برد و در دهه‌های اخیر، این روش به کرات برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی(ODE) و معادلات با مشتقات جزئی (PDE) به کار برده شده است، مانند حل معادله برگرز، معادله آب برای شبیه‌سازی جریان‌ها، مسائل هدایت گرما و بسیاری مسائل دیگر [۷]. مزیت مهم رویه‌های عددی با استفاده از توابع پایه شعاعی نسبت به سایر روش‌ها، عدم نیاز به تولید شبکه، دقت بالا به خصوص برای ابعاد بالا و دامنه‌های نامنظم، انعطاف‌پذیری و به کارگیری آسان آن‌هاست.

رایج‌ترین نوع این توابع در جدول ۱ ذکر شده‌اند که در آن r برابر است با $r = \|x - x_i\|_۲$ و پارامتر مثبت ε، پارامتر شکلی نام دارد. با کاهش پارامتر شکلی، دقت افزایش یافته، اما پایداری روش کاهش می‌یابد. مقدار بهینه این پارامتر که منجر به برقراری دقت و پایداری روش می‌شود، یک مسئله باز است.

جدول ۱. رایج ترین توابع پایه شعاعی.

گاوسی(GA)	$\phi(r) = e^{-(\varepsilon r)^۲}$
مالتی‌کوادریک(MQ)	$\phi(r) = \sqrt{۱ + (\varepsilon r)^۲}$
مالتی‌کوادریک معکوس(IMQ)	$\phi(r) = \frac{۱}{\sqrt{۱+(\varepsilon r)^۲}}$
کوادراتیک معکوس(IQ)	$\phi(r) = \frac{۱}{۱+(\varepsilon r)^۲}$

۲. توابع پایه شعاعی و چندجمله‌ای‌های چبیشف

تعریف ۱.۲. تابع $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ را شعاعی گویند، اگر یک تابع $\phi : [۰, \infty) \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد، به طوری‌که

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|_۲).$$

تعریف ۲.۲. تابع پایه شعاعی φ، یک تابع با مقدار حقیقی است که به فاصله شعاعی بین نقاط داده $\mathbf{x}$ و مراکز $\mathbf{x}_j, j = ۱, ..., n$ به‌صورت $\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) = \phi(r), \ r = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_۲$ وابسته است.

برای تقریب تابع $u(x)$ با روش RBF، فرض می‌کنیم تابع S ترکیب خطی از توابع پایه شعاعی ϕ روی مجموعه مراکز پراکنده $\mathbf{x}_۱, \mathbf{x}_۲, ..., \mathbf{x}_n$ در $\mathbb{R}^d$ باشد، یعنی $S(\mathbf{x}) = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_۲)$. با استفاده از شرایط $S(\mathbf{x}_i) = u(\mathbf{x}_i), i = ۱, ..., n$ و تشکیل دستگاه خطی $\mathbf{A}\Lambda = \mathbf{U}$، می‌توان ضرایب λ_j را به‌دست آورد، به طوری‌که

$$\mathbf{A} = [\phi(\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|]_{i,j=۱,...,n}, \ \Lambda = [\lambda_j]_{j=۱,...,n}, \ \mathbf{U} = [u_i]_{i=۱,...,n}.$$

ماتریس درون‌یاب $\mathbf{A}$ با مراکز متمایز برای توابع پایه شعاعی معکوس‌پذیر است، در نتیجه دستگاه فوق حل‌پذیر است و جواب یکتا دارد.

تعریف ۳.۲. چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع دوم روی بازه $[-۱, ۱]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\psi_۰(z) = ۱, \quad \psi_۱(z) = ۲z, \quad \psi_n(z) = ۲z\psi_{n-۱}(z) - \psi_{n-۲}(z),$$

برای کارهای عددی و تحلیلی، معمولا از چندجمله‌ای‌های چبیشف شیفت داده شده با تغییر متغیر $z = ۲t - ۱$، $۰ < t \leq ۱$ و انتقال بازه $[-۱, ۱]$ به $[۰, ۱]$ استفاده می‌شود.

۳. حل مسئله

برای حل مسئله (۱)-(۴) از توابع پایه شعاعی گاوسی برای گسسته‌سازی متغیر مکان و از توابع پایه‌ای چندجمله‌ای‌های چبیشف شیفت داده شده نوع دوم برای گسسته‌سازی متغیر زمان استفاده کرده‌ایم [۹].
فرض کنید $x_۱$ و x_M و $\Omega_۱ = \{x_i | ۰ < x_i < ۱, i = ۲, ۳, ..., M-۱\}$ مجموعه گره‌های پراکنده روی $[۰, ۱]$ و $t_۱ = ۰$ و $\Omega_۲ = \{t_j | ۰ < t_j \leq ۱, j = ۲, ۳, ..., N\}$ مجموعه گره‌های پراکنده روی $[۰, T]$ باشند، جواب مسئله (۱)-(۴) به‌صورت

$$u(x,t) \approx \tilde{u}(x,t) = \sum_{i=۱}^{M}\sum_{j=۱}^{N} \lambda_{ij}\phi_i(x)\psi_j^*(t) = \Phi_M^T(x)\Lambda\Psi_N^*(t), \tag{۵}$$

تقریب زده می‌شود، به طوری‌که $\phi_i(x) = e^{-\varepsilon^۲(x-x_i)^۲}$ تابع پایه شعاعی گاوسی و $\psi_j^*(t)$ تابع پایه‌ای چندجمله‌ای‌های چبیشف $(SCH-BF)$ از درجه $j-۱$ هستند و داریم، $\Phi_M(x) = [\phi_۱(x), ..., \phi_M(x)]^T$ و $\Psi_N^*(t) = [\psi_۱^*(t), ..., \psi_N^*(t)]^T$، که T ترانهاده می‌باشد و $\Lambda = [\lambda_{ij}]_{i=۱,...,M, j=۱,...,N}$ ماتریسی از ضرایب مجهول است که باید تعیین شود. همچنین از (۵) داریم:

$$\tilde{u}_t = \Phi_M^T(x)\Lambda(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_N^*(t)), \tag{۶}$$

$$\tilde{u}_{xx} = (\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\Phi_M^T(x))\Lambda\Psi_N^*(t), \tag{۷}$$

با جای‌گذاری (۵)-(۷) در معادلات (۱)-(۴) خواهیم داشت:

$$\Phi_M^T(x)\Lambda(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_N^*(t)) = (\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\Phi_M^T(x))\Lambda\Psi_N^*(t) + \varphi(x,t), \tag{۸}$$

$$\Phi_M^T(۰)\Lambda\Psi_N^*(t) = g_۰(t), \tag{۹}$$

$$\Phi_M^T(۱)\Lambda\Psi_N^*(t) = g_۱(t), \tag{۱۰}$$

$$\Phi_M^T(x)\Lambda\Psi_N^*(۰) = \sum_{j=۱}^{N}\beta_j(x)\Phi_M^T(x)\Lambda\Psi_N^*(T_j) + \chi(x). \tag{۱۱}$$

برای تعیین ماتریس ضرایب مجهول Λ با استفاده از $(N-۱) \times (M-۲)$ نقطه هم‌مکانی $\Gamma_۱ = \{(x_i, t_j) | x_i \in \Omega_۱, t_j \in \Omega_۲\}$ در معادله (۸)، خواهیم داشت:

$$\Phi_M^T(x_i)\Lambda(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_N^*(t_j)) = (\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}\Phi_M^T(x_i))\Lambda\Psi_N^*(t_j) + \varphi(x_i,t_j), \tag{۱۲}$$

علاوه بر این، با استفاده از $N-۱$ نقطه هم‌مکانی $t_j \in \Omega_۲$ در معادلات (۹) و (۱۰) داریم:

$$\Phi_M^T(۰)\Lambda\Psi_N^*(t_j) = g_۰(t_j), \tag{۱۳}$$

$$\Phi_M^T(۱)\Lambda\Psi_N^*(t_j) = g_۱(t_j), \tag{۱۴}$$

جدول ۲. بهترین خطاهای نرم $L^۲$ به‌دست آمده از روش‌های مختلف و روش ارائه شده.

روش ارائه شده	روش RGM در [۱]	روش Crandall در [۶]	روش BTCS در [۶]
$۲/۶ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۸/۹ \times ۱۰^{-۹}$	$۱/۱ \times ۱۰^{-۷}$	$۶/۰ \times ۱۰^{-۵}$
روش FTCP در [۶]	روش Crank–Nicolson در [۶]	روش Saulyev I در [۶]	روش Saulyev II در [۶]
$۵/۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۶/۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۴}$	$۳/۰ \times ۱۰^{-۴}$

جدول ۳. خطاهای مطلق برای $t = ۱$ و مقادیر مختلف x.

x	روش ۱ در [۸]	روش ۲ در [۸]	روش ۳ در [۸]	روش RGM در [۱]	روش ارائه شده
۰/۲۵	$۲/۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱۰/۰ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۵/۱ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۱۷}$
۰/۵	$۴/۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۱۰}$	$۷/۲ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۲/۰ \times ۱۰^{-۱۷}$
۰/۷۵	$۲/۹ \times ۱۰^{-۶}$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۱۰/۰ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۵/۱ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱/۹ \times ۱۰^{-۱۷}$

و نهایتاً با به کار بردن M نقطه هم‌مکانی $x_i \in \Omega_۱ \cup \{x_۱, x_M\}$ در معادله (۱۱) داریم:

$$\Phi_M^T(x_i)\Lambda\Psi_N^*(۰) = \sum_{j=۱}^{N} \beta_j(x_i)\Phi_M^T(x_i)\Lambda\Psi_N^*(T_j) + \chi(x_i). \quad (۱۵)$$

معادلات (۱۲)-(۱۵) یک دستگاه $M \times N$ از معادلات جبری خطی و $M \times N$ ضرایب مجهول λ_{ij} را تشکیل می‌دهند که از حل این دستگاه، ضرایب مجهول به دست آمده و با استفاده از این ضرایب، می‌توان تقریبی از تابع مجهول $u(x,t)$ را از رابطه (۵) به‌دست آورد.

۴. نتایج عددی

در این بخش، مثال عددی با در دسترس بودن جواب دقیق برای بررسی دقت روش، ارائه شده است. تمام محاسبات با استفاده از $Maple۱۶$ و $Digits = ۴۰$ انجام شده و نرم خطاهای زیر به‌کار برده شده است:

$$RMS(u) = \sqrt{\frac{\sum_{i=۱}^{M}\sum_{j=۱}^{N} |u(x_i,t_j) - \tilde{u}(x_i,t_j)|^۲}{MN}},$$

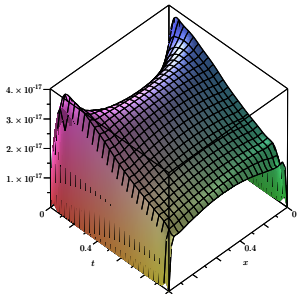
$$\|e(x,t)\|_{L^۲}^۲ = \int_۰^۱ \int_۰^T (u(x,t) - \tilde{u}(x,t))^۲ dt dx.$$

مثال ۱.۴. مسئله (۱) با شرایط مرزی (۲) و (۳) و شرط اولیه غیراستاندارد (۴) با مفروضات زیر

$$\varphi(x,t) = (-۱ + \pi^۲)\sin(\pi x)e^{-t}, \quad u(x,۰) = u(x,T_۱) - u(x,T_۲) + \chi(x),$$

$$\chi(x) = \sin(\pi x)(۱ - e^{-T_۱} + e^{-T_۲}), \quad g_۰(t) = ۰, \quad g_۱(t) = ۰,$$

و جواب دقیق $u(x,t) = \sin(\pi x)e^{-t}$ را در نظر بگیرید، به طوری‌که $۰ < T_۱ < T_۲ = T = ۱$ با ۲۵۵ نقطه هم‌مکانی و پارامتر شکلی $\varepsilon = ۰/۳$ و $T_۱ = ۰/۵$، خطای مطلق RMS برابر $۲/۵۳ \times ۱۰^{-۱۷}$ و خطای $L^۲$ برابر $۲/۵۸ \times ۱۰^{-۱۷}$ به‌دست آمده که این خطاها با بهترین نتایج [۱، ۶]، در جدول ۲ مقایسه شده‌اند. در جدول ۳ نیز با روش ارائه شده و روش‌های در [۱، ۸]، خطاهای مطلق برای $t = ۱$ و مقادیر مختلف x آورده شده‌اند. همچنین، در شکل ۱ نمودار خطای مطلق ترسیم شده است. از جدول‌ها و نمودار مشخص است که نتایج عددی روش ارائه شده دارای دقت بالاتری نسبت به سایر روش‌هاست.



شکل ۱. نمودار خطای مطلق $|u - \tilde{u}|$ با $M = ۱۷$ و $N = ۱۵$ و $\varepsilon = ۰/۳$.

مراجع

1. Z. Barikbin, *A new method for exact product form and approximation solutions of a parabolic equation with nonlocal initial condition using Ritz method*, IJNAO. **10** (1) (2020) 121–138.
2. L. Bysezewski, *Strong maximum principle for parabolic nonlinear problems with nonlocal inequalities together with arbitrary functionals*, J. Math. Anal. Appl. **156** (1991) 457–470.
3. L. Bysezewski, *Uniqueness of solutions of parabolic semilinear nonlinear boundary problems*, J. Math. Anal. Appl. **165** (1992) 427–478.
4. J. Chabrowski, *On the non-local problem with a functional for parabolic equation*, Funkcial. Ekvac. **165** (1984) 101–123.
5. J. Chadam and H. M. Yin, *Determination of an unknown function in a parabolic equation with an overspecified condition*, Math. Meth. Appl. Sci. **13** (1990) 421–430.
6. M. Dehghan, *Numerical schemes for one-dimensional parabolic equations with nonstandard initial condition*, Appl. Math. Comput. **147** (2) (2004) 321–331.
7. A. Hajiollow, Y. Lotfi, K. Parand, A. H. Rasanan, K. Rashedi and J. A. Rad, *Recovering a moving boundary from Cauchy data in an inverse problem which arises in modeling brain tumor treatment: the (quasi)linearization idea combined with radial basis functions (RBFs) approximation*, Eng. Comput. (2020) 1–15. DOI: 10.1007/s00366-019-00909-8
8. J. Martín-Vaquero and S. Sajavičius, *The two-level finite difference schemes for the heat equation with nonlocal initial condition*, Appl. Math. Comput. **342** (2019) 166–177.
9. M. Ranjbar and M. Aghazadeh, *Collocation method based on shifted Chebyshev and radial basis functions with symmetric variable shape parameter for solving the parabolic inverse problem*, Inverse. Probl. Sci. Eng. **27** (3) (2019) 369–387.

پست الکترونیکی: a.hajiollow@gmail.com
پست الکترونیکی: zabihi@kashanu.ac.ir

روش عملیاتی موجک لژاندر برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی

ماجد رئیسی*
دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
و مریم عرب عامری
دانشکده ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. در این مقاله، روش موجک لژاندر برای محاسبه جواب تقریبی دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی توسعه داده شده است. ابتدا خواص موجک لژاندر ارائه، سپس خواص گفته شده برای تبدیل دستگاه معادلات انتگرال به یک دستگاه معادلات جبری مورد استفاده قرار می‌گیرد. دستگاه حاصل نیز به روش نیوتن حل می‌شود. در نهایت نتایج به‌دست آمده به روش فعلی با روش موجک بی اسپلاین مقایسه شده است.
واژه‌های کلیدی: موجک لژاندر، معادله دیفرانسیل انتگرال کسری، ماتریس عملیاتی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34A08, 65R10.

۱. پیش‌گفتار

نظریه موجک‌ها در طیف گسترده‌ای از رشته‌های مهندسی کاربرد دارد، به‌ویژه، با توجه به [۲]، در تحلیل سیگنال برای نمایش و تجزیه شکل موج، تجزیه و تحلیل فرکانس زمان و الگوریتم‌های سریع برای پیاده‌سازی آسان بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. در چند دهه گذشته، روش‌های متعددی برای به‌دست آوردن حل تقریبی یا عددی معادلات دیفرانسیل انتگرال خطی و غیرخطی ارائه شده است.

در گذشته روش موجک لژاندر برای حل معادلات انتگرال و معادلات دیفرانسیل انتگرال از اشکال مختلف استفاده شده است. در [۷] ونکاتش و همکاران روش موجک لژاندر را برای حل نوعی از معادلات دیفرانسیل انتگرال غیرخطی استفاده کرده‌اند.

دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی با شرایط اولیه داده شده، به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$y_i^{(p)}(x) = G_i(x, Y(x)) + \sum_{j=1}^{l} \int_0^x k_{i,j}(x,t) F_{i,j}(t, Y(t)) dt, \quad i = 1, 2, \ldots, l \tag{1}$$

$$y_i^{(s)}(0) = \beta_{i,s}, \quad s = 0, 1, \ldots, p-1, \quad i = 1, 2, \ldots, l$$

$$G_i(x, Y(x)) = G_i\left(x, .y_1(x), y_1^{(1)}(x), \ldots, y_1^{(p)}(x), \ldots, y_l(x), y_l^{(1)}(x), \ldots, y_l^{(p)}(x)\right),$$
$$F_{i,j}(t, Y(t)) = G_i\left(t, .y_1(t), y_1^{(1)}(t), \ldots, y_1^{(p)}(t), \ldots, y_l(t), y_l^{(1)}(t), \ldots, y_l^{(p)}(t)\right),$$

که $k_{i,j}(x,t)$ هسته انتگرال و $y_i^{(p)}(x)$ مشتق مرتبه p-ام $y_i(x)$ هستند.

۲. موجک لژاندر

موجک لژاندر $\psi_{nm}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x)$ دارای چهار آرگومان $m, \hat{n}, k$ و x است، که $n = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$، $\hat{n} = 2n - 1$، $k \in Z^+$، m درجه چندجمله‌ای لژاندر و x متغیر مستقل هستند. با

* ارائه‌دهنده

توجه به [۷]، این تابع بر بازه $[۰, ۱)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\psi_{n,m}(x) = \psi(k, \hat{n}, m, x) \begin{cases} \sqrt{m + \frac{۱}{۲}}\, ۲^{k/۲} p_m(۲^k x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}-۱}{۲^k} \le x < \frac{\hat{n}+۱}{۲^k}, \\ ۰, & \text{در غیر این‌صورت}, \end{cases}$$

که در رابطه فوق $m = ۰, ۱, \ldots, M-۱$، $p(x)$ چندجمله‌ای لژاندر از مرتبه m و ضریب $\sqrt{m + \frac{۱}{۲}}$ برای متعامد یکه بودن موجک‌های لژاندر استفاده شده است.

۳. بهترین تقریب توابع با استفاده از موجک لژاندر

هر تابع دلخواه $f(x) \in L^۲[۰, ۱)$ را می‌توان بر حسب بسط نامتناهی از توابع متعامد موجک لژاندر به‌صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{m=۰}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x),$$

که $c_{nm} = \langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ و $\langle f(x), \psi_{nm}(x) \rangle$ ضرب داخلی $f(x)$ و $\psi_{nm}(x)$ هستند.

همچنین، با توجه به کامل بودن فضای $L^۲[۰, ۱)$، بهترین تقریب تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x) \approx \sum_{n=۱}^{۲^{k-۱}} \sum_{m=۰}^{M-۱} c_{nm} \psi_{nm}(x) = C^T \Psi(x), \tag{۲}$$

که C و $\Psi(x)$ بردارهای ستونی از مرتبه $۲^{k-۱}M$ به‌صورت زیر هستند:

$$C = [c_{۱۰}, c_{۱۱}, \ldots, c_{m-۱}, c_{۲۰}, c_{۲۱}, \ldots, c_{۲M-۱}, \ldots, c_{۲^{k-۱}۰}, c_{۲^{k-۱}۱}, \ldots, c_{۲^{k-۱}M-۱}]^T, \tag{۳}$$

$$\Psi(x) = [\psi_{۱۰}(x), \psi_{۱۱}(x), \ldots, \psi_{m-۱}(x), \psi_{۲۰}(x), \ldots, \psi_{۲M-۱}(x), \ldots, \psi_{۲^{k-۱}۰}(x), \ldots, \psi_{۲^{k-۱}M-۱}(x)]^T. \tag{۴}$$

۱.۳. ماتریس عملیاتی مشتق.

در [۳] ماتریس عملیاتی مشتق برای موجک لژاندر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Psi'(x) = D^{(۱)} \Psi(x),$$

که

$$D^{(۱)} = \begin{bmatrix} H & ۰ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & H & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۰ & H & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & H \end{bmatrix},$$

که در آن H ماتریسی از مرتبه $M \times M$ است و عناصر آن به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$H_{r,s} = \begin{cases} ۲^{k+۱} \sqrt{(۲r-۱)(۲s-۱)}, & r = ۲, \ldots, M, \quad (r+s) \text{ فرد}, \\ ۰. & \text{در غیر این صورت}, \end{cases}$$

۲.۳. **ماتریس عملیاتی انتگرال.** در [۴] ماتریس عملیاتی انتگرال pگانه برای موجک لژاندر به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\circ}^{x}\cdots\int_{\circ}^{x}\Psi(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{p\text{-مرتبه}}=Q^{(p)}\Psi(x),$$

که در آن Q یک ماتریس از مرتبه $M\times M$ ۲$^{k-1}$ ۲$^{k-1}$ و به شکل زیر است:

$$Q=\frac{1}{2^{k}}\begin{bmatrix}X & W & W & \cdots & W\\ \circ & X & W & \cdots & W\\ \circ & \circ & X & \cdots & W\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \circ & \circ & \circ & \cdots & X\end{bmatrix},$$

که X و W ماتریس‌هایی از مرتبه $M\times M$ هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \circ & \circ & \cdots & \circ & \circ\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \circ & \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & \circ & \cdots & \circ & \circ\\ \circ & -\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{5}} & \circ & \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{7}} & & \cdots & \circ & \circ\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ & \frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}}\\ \circ & \circ & \circ & \circ & \cdots & -\frac{1}{\sqrt{2M-3}\sqrt{2M-1}} & \circ\end{bmatrix},$$

$$W=\begin{bmatrix}2 & \circ & \circ & \cdots & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ\\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \circ & \circ & \circ & \cdots & \circ\end{bmatrix}.$$

۴. روش موجک لژاندر برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی

دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای غیرخطی داده شده در معادله (۱) را در نظر می‌گیریم. ابتدا توابع مجهول را با روش موجک لژاندر و استفاده از (۲) به‌صورت زیر تقریب می‌زنیم:

$$y_i(x)=A_i^T\Psi(x),\ i=1,2,\ldots,l \qquad (5)$$

که A_i^T مشابه C^T در رابطه (۳) و $\Psi(x)$، به‌صورت رابطه (۴) تعریف می‌شود.

اکنون $L\equiv\dfrac{d^p}{dx^p}$ و $L^{-1}=\int_{\circ}^{x}\cdots\int_{\circ}^{x}(.)\underbrace{dx\cdots dx}_{p\text{-مرتبه}}$ را در نظر می‌گیریم. همچنین مشتق و انتگرال $y_i(x)$ که $i=1,2,\ldots,l$ را می‌توان به‌صورت تقریبی، با استفاده از ماتریس‌های عملیاتی موجک لژاندر، به فرم زیر به‌دست آورد:

$$y_i^{(s)}(x)=A_i^T\Psi^{(s)}(x)=A_i^TD^{(s)}\Psi(x),\quad s=1,2,\ldots,p,\ i=1,2,\ldots,l,$$

و

$$\int_{\circ}^{x}\cdots\int_{\circ}^{x}y_i(x)\underbrace{dx\cdots dx}_{s\text{-مرتبه}}=Q^p\Psi(x).\quad s=1,2,\ldots,p,\ i=1,2,\ldots,l.$$

با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (۱) و با اثر دادن عملگر L^{-1} بر طرفین معادله داریم:

$$L^{-1}L\left[A_i^T\Psi(x)\right] = L^{-1}[G_i(x,\Omega(x))] + L^{-1}\left[\sum_{j=1}^{l}\int_0^x k_{i,j}(x,t)F_{i,j}(t,\Omega(t))dt\right], \quad i=1,2,\ldots,l, \tag{۶}$$

که

$$\Omega(x) = \left(x, A_1^T\Psi(x), A_1^T D\Psi(x), \ldots, A_1^T D^p\Psi(x), \ldots, A_l^T\Psi(x), A_l^T D\Psi(x), \ldots, A_1^T D^p\Psi(x)\right).$$

قرار می‌دهیم:

$$U_i(x) = L^{-1}[G_i(x,\Omega(x))], \quad V_i(x) = L^{-1}\left[\sum_{j=1}^{l}\int_0^x k_{i,j}(x,t)F_{i,j}(t,Y(t))dt\right].$$

به این ترتیب، رابطه (۶) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A_i^T\Psi(x) = \sum_{s=0}^{p-1}\beta_{i,s}x^s + U_i(x) + V_i(x), \quad i=1,2,\ldots,l, \tag{۷}$$

که در آن

$$\beta_{i,s} = y_i^{(s)}(0) = A_i^T D^s\Psi(0). \quad i=1,2,\ldots,l,\ s=0,1,\ldots,p-1.$$

اکنون با استفاده از نقاط هم‌محلی $x_r = \frac{2r-1}{2^k M}$، که $r = 1,2,\ldots,2^{k-1}M$، در معادله (۷) یک دستگاه جبری با $2^{k-1}Ml$ معادله و $2^{k-1}Ml$ مجهول برای A_i به‌دست می‌آید $(i=1,2,\ldots,l)$. با حل این دستگاه به روش نیوتون، می‌توان مقادیر مجهول A_i و در نتیجه جواب $y_i(x) = A_i^T\Psi(x)$، که $i=1,2,\ldots,l$، را تعیین کرد.

۵. مثال عددی

مثال ۱.۵. با توجه به [۱]، دستگاه معادلات دیفرانسیل انتگرال ولترای زیر را با شرایط اولیه داده شده در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} y_1''(x) = \cosh(x) - \frac{1}{2}\sinh^2(x) - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \int_0^x((x-t)y_1^2(t) + (x-t)y_2^2(t))dt, \\ y_2''(x) = -(1-4x)\cosh(x) + 8\sinh(x) - 4x + \int_0^x((x-t)y_1^2(t) - (x-t)y_2^2(t))dt, \end{cases}$$

$$y_1(0) = 1,\ y_1'(0) = 1,\ y_2(0) = -1,\ y_2'(0) = 1.$$

دستگاه فوق با استفاده از روش توضیح داده شده بر اساس موجک لژاندر حل شده است و جواب تقریبی به ازای $M = 8$ و $k = 2$ به‌دست آمده است. خطای L_2 حاصل از این تقریب در نقاط متساوی الفاصله از بازه‌ی $[0,1]$ در جدول ۱ نشان داده شده است.
همچنین، با توجه به [۵] و [۶]، خطای جواب به‌دست آمده از روش موجک بی اسپلاین در جدول ۱ آمده است. همان‌طور که از جدول مشخص است، جواب به‌دست آمده از روش موجک لژاندر در مقایسه با روش موجک بی اسپلاین از دقت قابل ملاحظه‌ای برخوردار است.

جدول ۱. خطای مطلق به‌دست آمده توسط روش موجک لژاندر و روش موجک بی اسپلاین برای مثال ۱.۵.

x	روش موجک لژاندر		روش موجک بی اسپلاین	
	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$
۰	$۴/۶۹۱۵۵ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۴/۶۹۱۵۹ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۱/۲۲۱۷۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱/۲۲۱۷۷ \times ۱۰^{-۴}$
۰/۱	$۳/۶۵۹۳ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳/۶۵۱۵۲ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳/۹۲۶۷۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۹۲۶۷۱ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۲	$۲/۴۰۹۱۸ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۲/۴۳۳۶۱ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۱/۴۹۰۸۴ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۴۹۱۹۵ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۳	$۲/۳۶۷ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۲/۴۴۰۲۷ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۴/۰۶۰۰۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۰۶۵۵۲ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۴	$۳/۸۵۹۱۴ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳/۶۸۰۳۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳/۶۴۹۰۹ \times ۱۰^{-۵}$	$۳/۶۶۵۴۵ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۵	$۵/۸۲۷۷۸ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۵/۸۲۳۲۴ \times ۱۰^{-۱۱}$	$۳/۴۲۹۵۱ \times ۱۰^{-۷}$	$۲/۴۳۶۶۸ \times ۱۰^{-۸}$
۰/۶	$۵/۱۵۸۱ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۴/۵۵۱۹۱ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۴/۰۴۵۴۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۱۱۲۴۷ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۷	$۲/۰۵۱۶۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳/۰۶۸۶۶ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۴/۸۶۱۸۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۴/۹۶۵۰۶ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۸	$۱/۴۷۸۸۲ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۳/۱۶۴۱۴ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۱/۸۳۷۵۷ \times ۱۰^{-۵}$	$۱/۹۷۵۷۳ \times ۱۰^{-۵}$
۰/۹	$۷/۱۰۵۴۳ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۴/۴۶۴۲۱ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۵/۸۰۴۶۱ \times ۱۰^{-۵}$	$۵/۶۴۰۰۴ \times ۱۰^{-۵}$

مراجع

1. J. Biazar, H. Ghazvini and M. Eslami, *He's homotopy perturbation method for systems of integro-differential equations*, Chaos, Solitons Fractals **39** (2009) 1253–1258.
2. C. K. Chui, *Wavelets, a Mathematical Tool for Signal Analysis*, in: SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, SIAM, Pennsylvania, 1997.
3. F. Mohammadi and M. M. Hosseini, *A new Legendre wavelet operational matrix of derivative and its applications in solving the singular ordinary differential equations*, J. Franklin Inst. **348** (2011) 1787–1796.
4. M. Razzaghi and S. Yousefi, *The Legendre wavelets operational matrix of integration*, Int. J. Syst. Sci. **32** (4) (2001) 495–502.
5. P. K. Sahu and S. Saha Ray, *A new approach based on semi-orthogonal B-spline wavelets for the numerical solutions of the system of nonlinear Fredholm integral equations of second kind*, Comput. Appl. Math. **33** (2014) 859–872.
6. P. K. Sahu and S. Saha Ray,*Legendre wavelets operational method for the numerical solutions of nonlinear Volterra integro-differential equations system*, Appl. Math. Comput. **256** (2015) 715–723.
7. S. G. Venkatesh, S. K. Ayyaswamy, S. R. Balachandar and K. Kannan, *Wavelet solution for class of nonlinear integro-differential equations*, Indian J. Sci. Technol. **6** (2013) 4670–4677.

پست الکترونیکی: majed.raisi@yahoo.com
پست الکترونیکی: arabameri@math.usb.ac.ir

حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم با به‌کارگیری موجک‌های لژاندر

معصومه مهموم سالکویه
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و مهدی سبزواری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله با استفاده از موجک‌های لژاندر به حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی خطی نوع دوم می‌پردازیم. پس از بیان تعاریف مقدماتی مرتبط با معادلات فازی و موجک‌های لژاندر، شکل پارامتری معادلات انتگرال فردهلم خطی فازی معرفی می‌شود. سپس با به‌کارگیری موجک‌های لژاندر به‌عنوان توابع پایه‌ای در این معادلات، تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی به‌دست می‌آید. نهایتاً با ارائه دو مثال عددی و ارائه نتایج مربوطه، دقت بالای روش مورد بررسی قرار می‌گیرد.
واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال فازی نوع دوم، موجک‌های لژاندر، روش گالرکین.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 45B05, 39D45, 65N30.

۱. مقدمه و تعاریف مقدماتی

یکی از شاخه‌های علم ریاضی که کاربرد فراوانی در مسائل مختلف مهندسی، فیزیک و سایر علوم دارد معادلات انتگرال است. معادلات انتگرال فازی شاخه‌ای از معادله انتگرال می‌باشد که در سال‌های اخیر مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. مفهوم اعداد فازی و عملیات محاسباتی بر روی این اعداد ابتدا توسط پرفسور لطف علی رحیم اوغلو عسکر زاده مشهور به لطفی زاده و همکاران وی معرفی و مورد بررسی قرار گرفت [۳]. پس از آن مفاهیم فازی به سرعت به فضاهای متریک، فضاهای توپولوژیک، معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و سایر شاخه‌های ریاضیات و علوم گسترش یافت.

از آن‌جا که حل تحلیلی معادلات انتگرال فازی معمولا پیچیده و دشوار است، لذا روش‌های عددی در حل این معادلات توصیه می‌شود. در سال‌های اخیر بسیاری از توابع پایه‌ای در حل عددی معادلات انتگرال فازی به‌کار رفته‌اند، که از آن جمله می‌توان به موجک‌ها اشاره نمود [۱، ۲].

در این مقاله پس از ارائه برخی تعاریف مقدماتی مربوط به اعداد و معادلات انتگرال فازی، موجک‌های لژاندر را معرفی می‌کنیم. سپس با استفاده از روش گالرکین، معادله انتگرال فازی را به دستگاهی از معادلات جبری خطی تبدیل نموده و با حل این دستگاه، تقریبی از جواب معادله انتگرال فازی را به‌دست می‌آوریم. در نهایت با ارائه چند مثال عددی، دقت بالای روش ارائه شده را نشان خواهیم داد.

تعریف ۱.۱. یک عدد فازی u به شکل پارامتری عبارت است از زوج مرتب $(\underline{u}(r), \overline{u}(r))$ که $r \in [0, 1]$ به قسمی که

۱. تابع $\underline{u}$ کراندار، یکنوای صعودی و از چپ پیوسته است.
۲. تابع $\overline{u}$ کراندار، یکنوای نزولی و از چپ پیوسته است.
۳. برای هر $r \in [0, 1]$، داریم $\underline{u}(r) \leqslant \overline{u}(r)$.

* ارائه‌دهنده

۲. معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم

معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم در حالت کلی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)u(s)\mathrm{d}s. \tag{۱}$$

در معادله فوق $f(t) \in L^۲[۰,۱)$ و $k(t,s) \in L^۲([۰,۱) \times [۰,۱))$ توابعی معلوم و $u(t)$ تابعی مجهول است. در این بخش با توجه به تعریف ۱.۱، شکل پارامتری معادله انتگرال فردهلم فازی نوع دوم را به‌صورت زیر ارائه می‌نماییم.

در این مقاله فرض می‌کنیم $\lambda = ۱$، $a = ۰$ و $b = ۱$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم $\underline{f}(t,r)$، $\overline{f}(t,r)$، $\underline{u}(t,r)$ و $\overline{u}(t,r)$ شکل پارامتری از $f(t)$ و $u(t)$ باشند که $۰ \leqslant r,t \leqslant ۱$. شکل پارامتری معادلات فردهلم خطی فازی نوع دوم به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t,r) &= \underline{f}(t,r) + \int_۰^۱ v_۱(t,s,\underline{u}(s,r),\overline{u}(s,r))\mathrm{d}s, \\ \overline{u}(t,r) &= \overline{f}(t,r) + \int_۰^۱ v_۲(t,s,\underline{u}(s,r),\overline{u}(s,r))\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{۲}$$

به قسمی که برای هر $۰ \leqslant t,r \leqslant ۱$ داریم

$$\begin{aligned} v_۱(t,s,\underline{u}(s,r),\overline{u}(s,r)) &= \begin{cases} k(t,s)\underline{u}(s,r) & k(t,s) \geqslant ۰ \\ k(t,s)\overline{u}(s,r) & k(t,s) < ۰ \end{cases}, \\ v_۲(t,s,\underline{u}(s,r),\overline{u}(s,r)) &= \begin{cases} k(t,s)\overline{u}(s,r) & k(t,s) \geqslant ۰ \\ k(t,s)\underline{u}(s,r) & k(t,s) < ۰ \end{cases}. \end{aligned} \tag{۳}$$

اگر $k^+(s,t) = \max\limits_{۰ \leqslant t,s \leqslant ۱} \{k(t,s), ۰\}$ و $k^-(s,t) = \min\limits_{۰ \leqslant t,s \leqslant ۱} \{k(t,s), ۰\}$ آن‌گاه معادله انتگرال فازی (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \underline{u}(t,r) &= \underline{f}(t,r) + \int_۰^۱ k^+(t,s)\underline{u}(s,r)\mathrm{d}s + \int_۰^۱ k^-(t,s)\overline{u}(s,r)\mathrm{d}s, \\ \overline{u}(t,r) &= \overline{f}(t,r) + \int_۰^۱ k^+(t,s)\overline{u}(s,r)\mathrm{d}s + \int_۰^۱ k^-(t,s)\underline{u}(s,r)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{۴}$$

برای هر $۰ \leqslant t,r \leqslant ۱$ معادله (۴) یک دستگاه معادلات انتگرال فردهلم خطی در حالت غیر فازی است.

۳. موجک‌های لژاندر

موجک‌ها خانواده‌ای از توابع را تشکیل می‌دهند که از انتقال و اتساع تابعی به نام موجک مادر به‌دست می‌آیند.

تعریف ۱.۳. موجک‌های لژاندر بر بازه $[۰,۱)$ به‌صورت $\Psi_{m,n}(t) = \Psi(k,\widehat{n},m,t)$ نمایش داده می‌شوند که در آن k عددی صحیح و مثبت است و $\widehat{n} = ۲n - ۱$ که $n = ۱,۲,\ldots,۲^{k-۱}$. همچنین m برابر مرتبه چند جمله‌ای لژاندر است. این موجک‌ها به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\Psi_{m,n}(t) = \begin{cases} \left(m+\frac{۱}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}} ۲^{\frac{k}{۲}} L_m(۲^k t - \widehat{n}) & \frac{\widehat{n}-۱}{۲^k} \leqslant t < \frac{\widehat{n}+۱}{۲^k} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}. \tag{۵}$$

در رابطه بالا $L_m(t)$ چندجمله‌ای لژاندر از مرتبه m است که از رابطه بازگشتی زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} &L_۰(t) = ۱,\ L_۱(t) = t, \\ &l_{m+۱}(t) = \frac{۲m+۱}{m+۱} t L_m(t) - \frac{m}{m+۱} l_{m-۱}(t), \quad m = ۱,۲,۳,\ldots. \end{aligned} \tag{۶}$$

۴. تقریب توابع

خانواده $\{\Psi_{mn}(t)\}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^۲[۰,۱)$ است. بنابراین هر تابع دلخواه $f \in L^۲[۰,۱)$ را می‌توان توسط موجک‌های لژاندر به‌صورت زیر بسط داد:

$$f(t) = \sum_{n=۱}^{\infty} \sum_{m=۰}^{\infty} c_{nm} \Psi_{nm}(t), \tag{۷}$$

که در آن $c_{nm} = \langle f(t), \Psi_{nm}(t) \rangle$ است و $\langle \cdot, \cdot \rangle$ بیانگر ضرب داخلی در فضای $L^۲[۰,۱)$ است. اگر سری (۷) را از جایی به بعد قطع کنیم، تقریبی از تابع $f(t)$ به شکل زیر به‌دست می‌آید که آن را با $f_{kM}(t)$ نشان می‌دهیم:

$$f(t) \simeq f_{kM}(t) = \sum_{n=۱}^{۲^{k-۱}} \sum_{m=۰}^{M-۱} c_{nm} \Psi_{nm}(t) = C^T \Psi(t). \tag{۸}$$

در رابطه فوق C و Ψ بردارهایی از مرتبه $۲^{k-۱}M \times ۱$ هستند و عبارتند از:

(۹)
$$C = [c_{۱۰}, c_{۱۱}, \ldots, c_{۱(M-۱)}, c_{۲۰}, \ldots, c_{۲(M-۱)}, \ldots, c_{۲^{k-۱}(M-۱)}]^T,$$
$$\Psi(t) = [\Psi_{۱۰}(t), \Psi_{۱۱}(t), \ldots, \Psi_{۱(M-۱)}(t), \Psi_{۲۰}(t), \ldots, \Psi_{۲(M-۱)}(t), \ldots, \Psi_{۲^{k-۱}(M-۱)}(t)]^T.$$

به‌طریق مشابه می‌توان $k(t,s) \in L^۲([۰,۱) \times [۰,۱))$ را توسط موجک‌های لژاندر به‌صورت

$$k(t,s) \simeq \Psi^T(t) K \Psi(s), \tag{۱۰}$$

تقریب زد که در آن K ماتریس مربعی از مرتبه $۲^{k-۱}M$ است و درایه‌های آن به‌صورت $k_{ij} = \langle \Psi_i(t), \langle k(t,s), \Psi_j(s) \rangle \rangle$ می‌باشند. در اینجا $\Psi_i(t)$ درایه iام از بردار $\Psi(t)$ تعریف شده در رابطه (۹) می‌باشد.

۵. حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم

معادله انتگرال فازی (۴) را در نظر می‌گیریم. با توجه به تقریب توابع دو متغیره (۱۰) داریم

$$k^+(t,s) \simeq \Psi^T(t) K^+ \Psi(s), \; k^-(t,s) \simeq \Psi^T(t) K^- \Psi(s), \tag{۱۱}$$

$$\underline{u}(t,r) \simeq \Psi^T(t) \underline{U} \Psi(r), \; \overline{u}(t,r) \simeq \Psi^T(t) \overline{U} \Psi(r), \tag{۱۲}$$

$$\underline{f}(t,r) \simeq \Psi^T(t) \underline{F} \Psi(r), \; \overline{f}(t,r) \simeq \Psi^T(t) \overline{F} \Psi(r). \tag{۱۳}$$

در معادلات بالا K^+، K^-، $\underline{F}$ و $\overline{F}$ ماتریس‌های مربعی مرتبه $۲^{k-۱}M$ با درایه‌های معلوم و $\underline{U}$ و $\overline{U}$ ماتریس‌های از همین مرتبه با درایه‌های مجهول هستند. با جایگذاری روابط (۱۱) تا (۱۳) در رابطه (۴) و با توجه به رابطه $\int_۰^۱ \Psi(s)\Psi^T(s)\mathrm{d}s = I$، نهایتاً پس از ساده کردن معادلات به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{F} + K^+ \underline{U} + K^- \overline{U}, \\ \overline{U} &= \overline{F} + K^+ \overline{U} + K^- \underline{U}. \end{aligned} \tag{۱۴}$$

دستگاه بالا یک دستگاه معادلات خطی با $۲^{۲k-۲}M^۲$ معادله و همین تعداد مجهول است. پس از حل دستگاه و محاسبه درایه‌های ماتریس‌های مجهول $\underline{U}$ و $\overline{U}$ می‌توان با استفاده از معادله (۱۲) تقریبی از $\underline{u}(t,r)$ و $\overline{u}(t,r)$ ارائه نمود.

۶. نتایج عددی

مثال ۱.۶. معادله انتگرال فردهلم فازی (۴) با توابع

$$\overline{f}(t,r) = -\frac{۱}{۳}t^۲ + t^۲r + \frac{۷}{۳}t + \frac{۱}{۴}r - \frac{۱}{۱۲} - ۲rt,$$
$$\underline{f}(t,r) = -\frac{۵}{۳}t - t^۲r - \frac{۱}{۴}r + \frac{۵}{۳}t^۲ + \frac{۵}{۱۲} + ۲rt.$$

و هسته $k(t,s) = (۲t-۱)^۲(۱-۲s)$ را در نظر می‌گیریم. با به کارگیری موجک‌های لژاندر به ازای $k = ۲$ و $M = ۲$ داریم

$$K^+ = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۶} & ۰ & ۰ \\ -\frac{\sqrt{۳}}{۲۴} & \frac{۱}{۲۴} & ۰ & ۰ \\ \frac{۱}{۱۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۶} & ۰ & ۰ \\ \frac{\sqrt{۳}}{۲۴} & -\frac{۱}{۲۴} & ۰ & ۰ \end{pmatrix}, \quad K^- = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۱۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۶} \\ ۰ & ۰ & \frac{\sqrt{۳}}{۲۴} & \frac{۱}{۲۴} \\ ۰ & ۰ & -\frac{۱}{۱۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۶} \\ ۰ & ۰ & -\frac{\sqrt{۳}}{۲۴}\sqrt{۳} & -\frac{۱}{۲۴} \end{pmatrix}$$

$$\overline{F} = \begin{pmatrix} \frac{۳۱}{۱۴۴} & -\frac{\sqrt{۳}}{۱۴۴} & \frac{۲۵}{۱۴۴} & -\frac{\sqrt{۳}}{۱۴۴} \\ \frac{۴۳\sqrt{۳}}{۵۷۶} & -\frac{۱}{۶۴} & \frac{۲۵\sqrt{۳}}{۵۷۶} & -\frac{۱}{۶۴} \\ \frac{۴۷}{۷۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۶} & \frac{۳۵}{۷۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۶} \\ \frac{۴۱\sqrt{۳}}{۵۷۶} & -\frac{۱}{۱۹۲} & \frac{۳۵\sqrt{۳}}{۵۷۶} & -\frac{۱}{۱۹۲} \end{pmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} \frac{۱۳}{۱۴۴} & \frac{\sqrt{۳}}{۱۴۴} & \frac{۱۹}{۱۴۴} & \frac{\sqrt{۳}}{۱۴۴} \\ -\frac{۱۱\sqrt{۳}}{۵۷۶} & \frac{۱}{۶۴} & \frac{۷\sqrt{۳}}{۵۷۶} & \frac{۱}{۶۴} \\ \frac{۱۱}{۷۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۳۶} & \frac{۲۳}{۷۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۳۶} \\ \frac{۲۳\sqrt{۳}}{۵۷۶} & \frac{۱}{۱۹۲} & \frac{۲۹\sqrt{۳}}{۵۷۶} & \frac{۱}{۱۹۲} \end{pmatrix}.$$

ماتریس‌های $\overline{U}$ و $\underline{U}$ از قرار دادن ماتریس‌های فوق در معادلات (۱۴) و حل دستگاه خطی متناظر به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\overline{U} = \begin{pmatrix} \frac{۷}{۳۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۹۶} & \frac{۵}{۳۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۹۶} \\ \frac{۷\sqrt{۳}}{۹۶} & -\frac{۱}{۹۶} & \frac{۵\sqrt{۳}}{۹۶} & -\frac{۱}{۹۶} \\ \frac{۲۱}{۳۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۲} & \frac{۱۵}{۳۲} & -\frac{\sqrt{۳}}{۳۲} \\ \frac{۷\sqrt{۳}}{۹۶} & -\frac{۱}{۹۶} & \frac{۵\sqrt{۳}}{۹۶} & -\frac{۱}{۹۶} \end{pmatrix}, \quad \underline{U} = \begin{pmatrix} \frac{۱}{۳۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۹۶} & \frac{۳}{۳۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۹۶} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۹۶} & \frac{۱}{۹۶} & \frac{\sqrt{۳}}{۳۲} & \frac{۱}{۹۶} \\ \frac{۳}{۳۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۳۲} & \frac{۹}{۳۲} & \frac{\sqrt{۳}}{۳۲} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۹۶} & \frac{۱}{۹۶} & \frac{\sqrt{۳}}{۳۲} & \frac{۱}{۹۶} \end{pmatrix}$$

نهایتاً با قرار دادن ماتریس‌های بالا در معادله (۱۲) جواب‌های تقریبی $\underline{u}(t,r) = rt$ و $\overline{u}(t,r) = (۲-r)t$ به ازای $۰ \leqslant r,t \leqslant ۱$ حاصل می‌گردد که همان جواب دقیق معادله است.

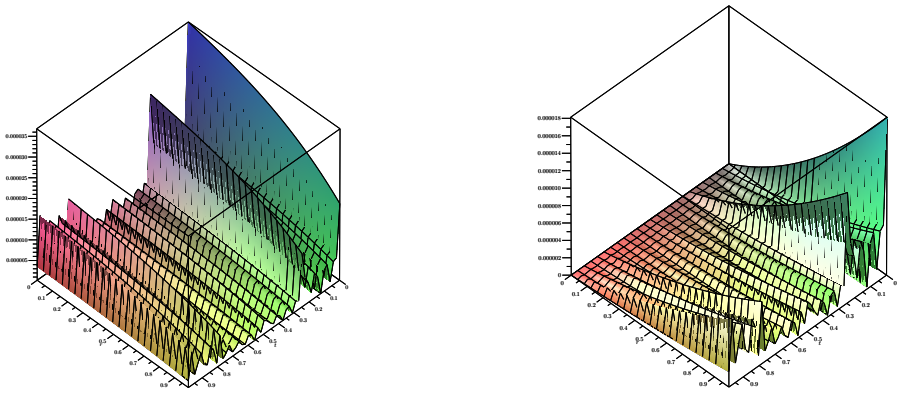
مثال ۲.۶. معادله انتگرال فازی (۴) با توابع

$$\overline{f}(t,r) = \sin(\pi t)\left(\frac{۲}{۱۵}r^۲ - \frac{۱۱}{۱۵}r + \frac{۵۲}{۱۵} - \frac{۱۳}{۱۵}r^۳\right),$$
$$\underline{f}(t,r) = \sin(\pi t)\left(\frac{۱۳}{۱۵}r^۲ + \frac{۱۱}{۱۵}r + \frac{۸}{۱۵} - \frac{۲}{۱۵}r^۳\right).$$

و هسته $k(t,s) = ۰/۲\pi \sin(\pi t)\sin(۲\pi s)$ و جواب دقیق $\underline{u}(t,r) = (r^۲ + r)\sin(\pi t)$ و $\overline{u}(t,r) = (۴ - r^۳ - r)\sin(\pi t)$ را در نظر می‌گیریم. به ازای $k = ۳$ و $M = ۵$، نتایج عددی در جدول ۱ و همچنین منحنی خطای مطلق در شکل ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۱. خطای مطلق مثال ۲.۶ به ازای $k = ۳$ و $M = ۵$ در نقطه $t = ۰/۲$.

r	خطای $\underline{u}$	خطای $\underline{u}$
۰	۰	$۵/۶۵ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۱	$۱/۵۵ \times ۱۰^{-۷}$	$۵/۵۰ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۲	$۳/۳۹ \times ۱۰^{-۷}$	$۵/۳۵ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۳	$۵/۵۱ \times ۱۰^{-۷}$	$۵/۱۸ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۴	$۷/۹۱ \times ۱۰^{-۷}$	$۴/۹۹ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۵	$۱/۰۶ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۷۶ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۶	$۱/۳۵ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۴۹ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۷	$۱/۶۸ \times ۱۰^{-۶}$	$۴/۱۷ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۸	$۲/۰۳ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۷۹ \times ۱۰^{-۶}$
۰/۹	$۲/۴۱ \times ۱۰^{-۶}$	$۳/۳۴ \times ۱۰^{-۶}$



شکل ۱. منحنی خطای مطلق مثال ۲.۶ به ازای $k = ۳$ و $M = ۵$ برای $\underline{u}(t,r)$ (سمت راست) و $\overline{u}(t,r)$ (سمت چپ).

مراجع

۱. م. سبزواری و ع. سعادتمندی، به‌کارگیری موجک چبیشف نوع دوم در حل عددی معادلات انتگرال فردهلم خطی فازی نوع دوم، مجله موجک‌ها و جبرخطی ۶ (۱) (۱۳۹۸) ۱۸–۱.

۲. م. مهموم سالکویه و م. سبزواری، حل عددی معادلات انتگرال فردهلم فازی نوع دوم با به‌کارگیری موجک‌های CAS، مجله موجک‌ها و جبرخطی، پذیرفته شده.

3. S. L. Chang and L. A. Zadeh, *On Fuzzy mapping and control*, IEEE Trans. Systems Man. Cybernet. **2** (1972) 30–34.

پست الکترونیکی: masoumehmahmoom@grad.kashanu.ac.ir

پست الکترونیکی: sabzevari@kashanu.ac.ir

حل عددی مسئله براتو با استفاده از روش انتگرال‌گیری گاوس-توران

زهرا محمودی*
گروه ریاضی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ابهر، ابهر، ایران

چکیده. یک روش عددی بر پایه بی‌اسپلاین درجه پنجم برای حل مسئله براتو که به‌طور گسترده در سوخت، نظریه احتراق و انتقال گرما کاربرد دارد، توسعه داده شده است. مسئله براتو به‌شکل معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرالی ولترا-فردهلم تبدیل می‌شود. از روش بسط تابع مجهول به کمک روش هم‌محلی مبتنی بر بی‌اسپلاین درجه پنجم و قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوس-توران برای تقریب انتگرال‌ها استفاده می‌شود. نتایج عددی حاصل شده با روش پیشنهادی با نتایج به‌دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: مسئله براتو، معادله انتگرالی غیرخطی ولترا-فردهلم، بی‌اسپلاین درجه پنجم، قاعده انتگرال‌گیری گاوس-توران.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 34K28, 74G15, 60D30.

۱. پیش‌گفتار

مسئله براتو از ساده‌سازی مدل اشتعال سوخت جامد در تئوری احتراق حرارتی [۱، ۶] به‌وجود آمده است. همچنین مسئله براتو یک مسئله مقادیر ویژه غیرخطی است بدین معنی که اغلب به عنوان یک ابزار مقایسه برای روش‌های عددی به‌کار برده می‌شود. [۴] جاکوبسون و اشمیت یک خلاصه عالی از اهمیت و پیشینه مسئله براتو فراهم آورده‌اند.

مسئله مقدار مرزی براتو در مختصات مسطح یک بعدی به‌شکل زیر است:

$$u''(x) + \lambda e^{u(x)} = 0,\ 0 < x < 1,\ u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

جواب دقیق معادله (۱) با $u(x) = -2\ln[\frac{\cosh((x-\frac{1}{2})\frac{\theta}{4})}{\cosh(\frac{\theta}{4})}]$ مفروض شده است، که θ در $\theta = \sqrt{2\lambda}\cosh(\frac{\theta}{4})$ صدق می‌کند.

جواب مسئله براتو صفر، یک و دو است وقتی که به‌ترتیب $\lambda > \lambda_c$، $\lambda = \lambda_c$ و $\lambda < \lambda_c$ باشد و مقدار بحرانی λ_c در معادله $\frac{1}{4}\sqrt{2\lambda_c}\sinh(\frac{\theta}{4}) = 1$ صدق کند [۱۰] و همچنین مقدار بحرانی λ_c برابر با $\lambda_c = 3.5138307190$ فرض شده است.

برای فرمول‌بندی مسئله براتو (۱) برحسب معادله انتگرالی ولترا-فردهلم ابتدا باید دوبار نسبت به x انتگرال‌گیری کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$$u(x) - u(0) = -\lambda \int_0^x \int_0^\eta e^{u(t)} dt d\eta + cx, \tag{2}$$

با به‌کارگیری انتگرال‌گیری جزءبه‌جزء و شرایط مرزی (۱) به‌دست می‌آوریم:

$$u(x) = \lambda(-\int_0^x (x-t)e^{u(t)}dt + \int_0^1 (1-t)xe^{u(t)}dt). \tag{3}$$

از آن‌جائی که معادله انتگرالی (۳) به روش صریح قابل حل نیست لازم است که از روش‌های عددی که ترکیب مناسبی از انتگرال‌گیری عددی و درونیابی می‌باشند استفاده کنیم.

در این مقاله روش هم‌محلی مبتنی بر تقریب تابع مجهول توسط بی‌اسپلاین درجه پنجم و سپس قاعده انتگرال‌گیری گاوس توران را برای تقریب معادله‌های انتگرالی ولترا- فردهلم غیرخطی توسعه خواهیم داد.

* ارائه‌دهنده

۲. روش هم‌محلی بی‌اسپلاین درجه پنجم

فضای بی‌اسپلاین درجه پنجم و توابع پایه در ساختن درونیاب s که در فرمول‌بندی روش هم‌محلی بی‌اسپلاین درجه پنجم مورد استفاده قرار می‌گیرد را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $\triangle_N \equiv \{a = t_۰ < t_۱ < \cdots < t_N = b\}$ یک افراز یکنواخت از بازه $[a,b]$ با طول گام $h = \dfrac{b-a}{N}$ و $s(t) \in S_۵(\Delta_N) = \{s \in C^۴[a,b]; s|_{[t_i,t_{i+۱}]} \in P_۵, i = ۰,۱,\ldots,N-۱\}$ که $P_۵$ کلاس چندجمله‌ای درجه پنجم است.

برای تقریب جواب تحلیلی u در معادله (۳)، ساختار بی‌اسپلاین درجه پنجم به کمک ده نقطه اضافی می‌تواند اجرا شود، به‌طوری که

$$t_{-۵} < t_{-۴} < t_{-۳} < t_{-۲} < t_{-۱}\ ,\ t_{N+۱} < t_{N+۲} < t_{N+۳} < t_{N+۴} < t_{N+۵}.$$

می‌توان در هر کدام از زیر بازه‌های افراز Δ_N تابع اسپلاین $s(t)$ را به‌صورت ترکیب خطی از پایه‌های $B_i^۵(t)$ به‌شکل زیر نوشت [۲]:

$$s(t) = \sum_{i=-۲}^{N+۲} c_i B_i^۵(t), \tag{۴}$$

که پایه‌های $B_i^۵(t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} B_i^۰(t) = \begin{cases} ۱, & if\ t_i \le t \le t_{i+۱} \\ ۰, & \text{سایر نقاط} \end{cases}, \\ B_i^k(t) = \left(\frac{t-t_i}{t_{i+k}-t_i}\right)B_i^{k-۱}(t) + \left(\frac{t_{i+k+۱}-t}{t_{i+k+۱}-t_{i+۱}}\right)B_{i+۱}^{k-۱}(t),\ k \ge ۱, \end{cases}$$

و ضرایب $c_i,\ -۲ \le i \le N+۲$ها از شرایط درونیابی و شرایط انتهایی زیر مشخص می‌شوند

$$s(t_i) = u(t_i),\ ۰ \le i \le N,$$

و

$$\begin{cases} (i)\ D^j s(t_۰) = D^j u(t_۰),\ D^j s(t_N) = D^j u(t_N),\ j = ۱,۲, \\ or \\ (ii)\ D^j s(t_۰) = D^j s(t_N),\ j = ۱,۲,۳,۴, \\ or \\ (iii)\ D^j s(t_۰) = ۰,\ D^j s(t_N) = ۰,\ j = ۳,۴. \end{cases} \tag{۵}$$

۳. قاعده‌ی انتگرال‌گیری گاوس-توران

فرض کنید P_m مجموعه تمام چندجمله‌ای‌های جبری از درجه حداکثر m باشد. فرمول انتگرال‌گیری گاوس-توران به‌صورت زیر است [۵، ۹]:

$$\int_a^b f(x)d\lambda(x) = \sum_{\nu=۱}^{n}\sum_{i=۰}^{۲q} A_{\nu,i} f^{(i)}(\tau_\nu) + R_{n,۲q+۱}(f), \tag{۶}$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$، $q \in \mathbb{N}_۰$، $f \in C^{۲(q+۱)n}(\mathbb{R})$ و $d\lambda(x)$ اندازه نامنفی روی خط حقیقی $\mathbb{R}$ با تکیه‌گاه فشرده (بسته و کراندار) یا نامتناهی است، که برای آن تمام گشتاورهای

$$\mu_k = \int_a^b x^k d\lambda(x),\ k = ۰,۱,\ldots,$$

موجود و متناهی هستند ، $\mu_۰ > ۰$ و $A_{\nu,i}$ وزن‌های قاعده انتگرال‌گیری به‌صورت

$$A_{\nu,i} = \int_a^b l_{\nu,i}(x)d\lambda(x), (i = ۰,\ldots,۲q,\ \nu = ۱,\ldots,n),$$

جدول ۱. مقادیر τ_ν و $A_{\nu,i}$ به ازای $i = ۰, \ldots, ۴$ و $\nu = ۱, \ldots, ۴$.

$\tau_۱ = -۰/۸۹۹۸۲۹۲۱۲۵۶۰۹۹$	$\tau_۲ = -۰/۳۶۵۹۲۴۳۵۴۶۹۱۴۶$
$\tau_۳ = ۰/۳۶۵۹۲۴۳۵۴۶۹۱۶۷۹$	$\tau_۴ = ۰/۸۹۹۸۲۹۲۱۲۶۵۰۹۸۶$
$A_{۱,۰} = ۰/۳۱۵۶۰۴۲۰۶۰۶۲۶۲۴$	$A_{۱,۲} = ۰/۰۰۱۲۱۳۹۷۶۵۳۳۰۱۵$
$A_{۲,۰} = ۰/۶۸۴۳۹۵۷۹۳۹۳۷۴۰۵$	$A_{۲,۲} = ۰/۰۱۰۴۸۰۱۶۳۸۳۵۹۵۰۸$
$A_{۳,۰} = ۰/۶۸۴۳۹۵۷۹۳۹۳۷۳۷۷$	$A_{۳,۲} = ۰/۰۱۰۴۸۰۱۶۳۸۳۵۹۴۹$
$A_{۴,۰} = ۰/۳۱۵۶۰۴۲۰۶۰۶۲۶۰۳$	$A_{۴,۲} = ۰/۰۰۱۲۱۳۹۷۶۵۳۳۰۱۴۹۰$
$A_{۱,۱} = ۰/۰۱۵۱۷۹۱۹۲۷۲۷۷۸۴۷$	$A_{۱,۳} = ۲/۶۷۴۰۳۷۴۳۴۷۰۸۷۸ * ۱۰^{-۵}$
$A_{۲,۱} = ۰/۰۱۳۵۵۶۰۹۳۵۱۵۵۲۹$	$A_{۲,۳} = ۰/۰۰۰۱۱۲۸۰۲۵۰۹۹۳۸۸$
$A_{۳,۱} = -۰/۱۳۵۵۶۰۹۳۵۱۵۵۳۳۶ * ۱۰^{-۱}$	$A_{۳,۳} = -۰/۱۱۲۸۰۲۵۰۹۹۳۸۸۰ * ۱۰^{-۳}$
$A_{۴,۱} = -۰/۱۵۱۷۹۱۹۲۷۲۷۷۸۲۱ * ۱۰^{-۱}$	$A_{۴,۳} = -۰/۲۶۷۴۰۳۷۴۳۴۷۰۸۲۱ * ۱۰^{-۴}$
$A_{۱,۴} = ۵/۴۲۶۴۳۵۱۸۳۴۸۶۷۵ * ۱۰^{-۷}$	$A_{۲,۴} = ۰/۰۰۰۰۲۶۳۶۴۲۳۵۴۹۶۰۵$
$A_{۳,۴} = ۰/۰۰۰۰۲۶۳۶۴۲۳۵۴۹۶$	$A_{۴,۴} = ۵/۴۲۶۴۳۵۱۸۳۴۸۵۹۵ * ۱۰^{-۷}$

تعریف می‌شود که در آن $l_{\nu,i}(x)$ چندجمله‌ای اساسی درونیاب هرمیت است. گره‌های τ_ν $(\nu = ۱, \ldots, n)$ در رابطه (۶) صفرهای چندجمله‌ای تکین $\pi_n(x) = x^n + a_{n-۱}x^{n-۱} + \ldots + a_۱x + a_۰$ هستند که انتگرال زیر را کمینه می‌کند:

$$F(a_۰, a_۱, \ldots, a_{n-۱}) = \int_a^b [\pi_n(x)]^{۲q+۲} d\lambda(x),$$

بنابراین رابطه (۶) برای تمام چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر $۲(q+۱)n - ۱$ دقیق است، یعنی

$$R_{n,۲q+۱}(f) = ۰, \forall f \in P_{۲(q+۱)n-۱}.$$

به ازای $i = ۰, \ldots, ۴$ و $\nu = ۱, \ldots, ۴$ مقادیر τ_ν و $A_{\nu,i}$ را در جدول ۱ داریم [۵، ۹].

۴. حل عددی معادلات انتگرالی ولترا-فردهلم غیرخطی

معادله انتگرالی ولترا-فردهلم غیرخطی (۳) را در نظر می‌گیریم

$$u(x) = \lambda \left[-\int_۰^x (x-t)e^{u(t)}dt + \int_۰^۱ (۱-t)xe^{u(t)}dt \right].$$

تابع مجهول $u(t)$ را با تابع بی‌اسپلاین درجه پنجم از (۴) تقریب می‌زنیم و در نقاط $x_i = ih, \ , h = \frac{۱}{N}\ i = ۰, ۱, \ldots, N$ گسسته‌سازی می‌کنیم

$$s(x_i) = \lambda \left[-\int_۰^{x_i} (x_i - t)e^{s(t)}dt + \int_۰^۱ (۱-t)x_i e^{s(t)}dt \right], \ i = ۰, ۱, \ldots, N.$$

با افراز بازه‌های $[۰, ۱]$ و $[۰, x_i]$ به N زیر بازه مساوی داریم:

$$s(x_i) = \lambda \left[-\sum_{p=۰}^{i-۱} \int_{x_p}^{x_{p+۱}} (x_i - t)e^{s(t)}dt + \sum_{p=۰}^{N-۱} \int_{x_p}^{x_{p+۱}} (۱-t)x_i e^{s(t)}dt \right], \ i = ۰, ۱, \ldots, N. \quad (۷)$$

برای استفاده از فرمول گاوس-توران برای تقریب انتگرال‌ها، باید به کمک تغییر متغیر زیر هر یک از زیر بازه‌های $[x_p, x_{p+۱}]$ را به بازه $[-۱, ۱]$ تبدیل کنیم:

$$t = \frac{۱}{۲}[(x_{p+۱} - x_p)y + (x_{p+۱} + x_p)], \ dt = \frac{(x_{p+۱} - x_p)}{۲}dy = \frac{h}{۲}dy.$$

جدول ۲. قدرمطلق خطای جواب مسئله (۱) در نقاط خاص به ازای $N = ۱۰, \lambda = ۲$.

$^{*}۱/۸۶(-۷) = ۱/۸۶ \times ۱۰^{-۷}$

x_i	روش در [۸]	روش در [۷]	روش در [۳]	روش (۹)
۰/۱	۲/۱۳(−۳)	۱/۵۲(−۲)	۱/۷۲(−۵)	۱/۸۵(−۷)*
۰/۲	۴/۲۱(−۳)	۱/۴۷(−۲)	۳/۲۶(−۵)	۱/۵۰(−۷)
۰/۳	۶/۱۹(−۳)	۵/۸۹(−۳)	۴/۴۹(−۵)	۱/۸۶(−۷)
۰/۴	۸/۰۰(−۳)	۳/۲۵(−۳)	۵/۲۸(−۵)	۱/۸۲(−۷)
۰/۵	۹/۶۰(−۳)	۶/۹۸(−۳)	۵/۵۶(−۵)	۱/۹۱(−۷)
۰/۶	۱/۰۹(−۳)	۳/۲۵(−۳)	۵/۲۸(−۵)	۱/۸۲(−۷)
۰/۷	۱/۱۹(−۲)	۵/۸۹(−۴)	۴/۴۹(−۵)	۱/۸۶(−۷)
۰/۸	۱/۲۴(−۲)	۱/۴۷(−۲)	۳/۲۶(−۵)	۱/۵۰(−۷)
۰/۹	۱/۰۹(−۲)	۱/۵۲(−۲)	۱/۷۲(−۵)	۱/۸۵(−۷)

برای تقریب انتگرال‌ها در معادله (۷)، فرمول انتگرال‌گیری گاوس-توران (۶) را به ازای $q = ۲$ و $n = ۴$ به‌کار می‌بریم و دستگاه غیرخطی $(N + ۵) \times (N + ۱)$ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(۸) \quad \begin{cases} s(x_i) = \frac{\lambda h}{۲}(-\sum_{p=۰}^{i-۱}\sum_{\nu=۱}^{۴}\sum_{l=۰}^{۴} A_{\nu,l}((x_i - \xi_{p\nu})e^{s(\xi_{p\nu})})^{(l)} \\ \\ +\sum_{p=۰}^{N-۱}\sum_{\nu=۱}^{۴}\sum_{l=۰}^{۴} A_{\nu,l}((x_i - \xi_{p\nu})e^{s(\xi_{p\nu})})^{(l)}),\ i = ۰, ۱, \ldots, N, \end{cases}$$

که در آن $\xi_{p\nu} = \frac{(x_{p+۱}-x_p)\tau_\nu + (x_{p+۱}+x_p)}{۲}$ و گره‌های τ_ν و ضرایب $A_{\nu,l}$ را از جدول ۱ داریم. اما برای به‌دست آوردن جواب از معادلات (۸) به چهار معادله دیگر نیاز داریم، برای این منظور شرایط انتهایی (۵) به معادلات (۸)، دستگاه غیرخطی $(N + ۵) \times (N + ۵)$ زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$(۹) \quad \begin{cases} s(x_i) = \frac{\lambda h}{۲}(-\sum_{p=۰}^{i-۱}\sum_{\nu=۱}^{۴}\sum_{l=۰}^{۴} A_{\nu,l}((x_i - \xi_{p\nu})e^{s(\xi_{p\nu})})^{(l)} \\ \\ +\sum_{p=۰}^{N-۱}\sum_{\nu=۱}^{۴}\sum_{l=۰}^{۴} A_{\nu,l}((x_i - \xi_{p\nu})e^{s(\xi_{p\nu})})^{(l)}), i = ۰, ۱, \ldots, N, \\ \\ D^j s(x_۰) = D^j s(x_N),\ ۱ \le j \le ۴, \end{cases}$$

حال با حل دستگاه غیرخطی فوق ضرایب $c_i, i = -۲, -۱, \ldots, N + ۲$ را به‌دست می‌آوریم و با جای‌گذاری c_iها در رابطه (۴)، جواب تقریبی معادله (۳) را به‌دست می‌آوریم.

۵. نتایج عددی و مقایسه روش ارائه شده

به منظور تست پایداری و دقت روش ارائه شده در حل معادله انتگرالی ولترا-فردهلم (۳)، قدرمطلق خطای جواب‌های معادله (۳) با نتایج موجود در [۸، ۷، ۳] برای مقادیر $\lambda = ۲$ و $N = ۱۰$ مقایسه شده‌اند و نتایج در جدول ۲ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش این مقاله برای حل مسئله براتو بسیار دقیق است.

مراجع

1. E. Allgower, S. G. Cruceanu and S. Tavener, *Application of numerical continuation to compute all solutions of semilinear elliptic equations*, Advan. Geom. **9** (3) (2009) 371–400.
2. A. Askari Hemmat, T. Ismaeelpour and H. Saeedi, *Quartic and pantic B-spline operational matrix offractional integration*. Wave. Line. Alg. **3** (2) (2016) 55–68.
3. H. Caglar, N. Caglar, M. Antonios Valaristos and N. Antonios, Anagnostopoulos, *B-spline method for solving Bratus problem*, Int. J. Comput. Math. **87** (8) (2010) 1885–1891.
4. J. Jacobson, and K. Schmitt, *The Liouville-Bratu-Gelfand problem for radial operators*, J. Diff. Eq. **184** (1) (2002) 283–298.
5. M. M. Jamei and S. Fakhravar, *Gauss-Turan Numerical Integration Method*, Master of Science Thesis, Khaje Nassir Al-Deen Toosi University of Technology, 2011.
6. L. Jin, *Application of Modified Variational Iteration Method to the Bratu-Type Problems*, Int. J. Cont. Math. Sci. **54** (4) (2010) 153–158.
7. S. Liao, and Y. Tan, *A general approach to obtain series solutions of nonlinear differential equations*, Stud. Appl. Math. **119** (4) (2007) 297–354.
8. J. S. McGough, *Numerical continuation and the Gelfand problem*, Appl. Math. Comput. **89** (1998) 225–239.
9. G. V. Milovanović, M. M. Spalević and M. S. Pranić, *Error bounds of some Gauss-Turán-Kronrod quadratures with Gori-Micchelli weights for analytic functions*, Kragu. J. Math. **30** (2007) 221–234.
10. A. M. Wazwaz, *Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations*, Appl. Math. Comput. **166** (3) (2005) 652–663.

پست الکترونیکی: z_mahmoodi_a@yahoo.com

ارائه پوستری

بهینه‌سازی

جواب بهینه تقریبی مسئله برنامه‌ریزی خطی اعداد فازی

فائزه تیبا*
دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده. برنامه‌ریزی خطی (LP) مسئله بهینه‌سازی است که با یافتن جواب‌های بهینه تحت قیود مساوی یا نامساوی ارتباط دارد. در سال‌های اخیر به دلیل عدم قطعیت‌های ایجاد شده توسط پارامترها و متغیرها، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) اهمیت زیادی پیدا کرده است. در این مقاله، به‌منظور یافتن جواب بهینه تقریبی مسئله برنامه‌ریزی خطی اعداد فازی (FNLP)، به معرفی قضایا و تعاریف بهترین و بدترین جواب بهینه فازی می‌پردازیم.
واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی فازی، جواب بهینه، جواب بهینه تقریبی، اعداد فازی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: XXC61.

۱. مقدمه

در سال ۲۰۰۰، Buckley و Feuring یک روش برای یافتن جواب مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی که تمام پارامترها و متغیرهای آن اعداد فازی هستند، ارائه دادند که انقلابی در حل برنامه‌ریزی‌های فازی ایجاد نمود [۱]. ملکی، با استفاده از مفهوم مقایسه اعداد فازی، روشی برای حل LP با متغیرهای فازی پیشنهاد داد [۳]. در سال ۲۰۰۹، لطفی روش‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی تماما فازی پیشنهاد داد [۵]. در سال ۲۰۱۲ و ۲۰۱۳، Fan روش برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی را بر اساس مجموعه‌های فازی بیان شده غیرقطعی موجود در قیود و تابع هدف توسعه داد [۳، ۴]. اخیراً نیز محققان زیادی در این رشته فعالیت کرده‌اند. به‌عنوان مثال در سال ۲۰۱۵، عزتی یک الگوریتم جدید برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی با استفاده از مسائل خطی چندهدفه ارائه داد [۲]. در این مقاله، نواقص موجود در مطالعه ساختار جواب تقریبی FNLP را برطرف کرده و جواب‌هایی ارائه می‌دهیم که به‌طور عینی معنای جواب تقریبی را منعکس می‌کند.

۲. مسئله برنامه‌ریزی خطی اعداد فازی

مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \min c^T x \\ \text{s.t.} \quad Ax \geq b,\ x \geq 0, \end{cases}$$

که $A = [a_{ij}]_{m\times n} \in F^{m\times n}$، $b = (b_i)_{i=1}^m \in F^m$، $c = (c_i)_{i=1}^n \in F^n$، c^T ترانهاده ماتریس c است و $x = (x_i)_{i=1}^n$ بردار ستونی nبعدی است [۸].

گزاره ۱.۲. [۹] فرض کنید $c \in F^n$، $b \in F^m$ و $A \in F^{m\times n}$ باشد برای هر $r \in [0, 1]$، اگر $x^* \in R^n$ جواب بهینه مسئله برنامه‌ریزی خطی کلاسیک باشد.

$$\begin{cases} \min \underline{c^T}(r)x \\ s.t. \quad \overline{A}x \geq \underline{b}(r),\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \min \overline{c^T}(r)x \\ s.t. \quad \underline{A}x \geq \overline{b}(r),\ x \geq 0 \end{cases}$$

* ارائه‌دهنده

به عبارت دیگر

$$\begin{cases} \min \underline{c_i}(r)x_i \\ s.t. \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}}(r)x_j\right)_{i=1}^{m} \geq \left(\underline{b_i}(r)\right)_{i=1}^{m}, \\ \quad x_j \geq 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \min \overline{c_i}(r)x_i \\ s.t. \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}}(r)x_j\right)_{i=1}^{m} \geq \left(\overline{b_i}(r)\right)_{i=1}^{m}, \\ \quad x_j \geq 0. \end{cases}$$

۳. جواب‌های بهینه تقریبی فازی

به‌طور کلی، در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی پیدا کردن جواب بهینه فازی درست هنگامی‌که $\underline{A}(r)$، $\underline{b}(r)$، $\underline{c}(r)$، $\overline{A}(r)$، $\overline{b}(r)$، و $\overline{c}(r)$ توابعی از r هستند، دشوار است. در ادامه روشی برای حل بهترین یا بدترین جواب بهینه تقریبی فازی ارائه می‌دهیم.

تعریف ۱.۳. [۶] برای $A \in F(R)$ و $0 \leq r \leq 1$، برش‌های سطح r آن به‌صورت زیر است:

$$[\tilde{A}]_r = \begin{cases} \{x \mid \tilde{A}(x) \geq r\}, & 0 < r \leq 1, \\ \{x \mid \tilde{A}(x) > 0\}, & r = 0. \end{cases}$$

تعریف ۲.۳. [۷] فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$، $b \in F^m$، $c \in F^n$ و $r_1, r_2, \ldots, r_s \in (0,1)$ (به ازای یک مقدار مثبت s) با رابطه $r_{s+1} = 1 > r_s > \cdots > r_2 > r_1 > r_0 = 0$ هستند. همچنین، فرض کنیم $x^B(r_j) = (x_i^B(r_j))_{i=1}^n$ بهترین جواب بهینه r_j و $x^W(r_j) = \left(x_i^W(r_j)\right)_{i=1}^n$ بدترین جواب بهینه r_j برای FNLPP(1) هستند ($j = 0, 1, 2, \ldots, s, s+1$). آن‌گاه می‌گوییم $\tilde{x}^B(r) = (\tilde{x}_i^B(r))_{i=1}^n$ و $\tilde{x}^W(r) = (\tilde{x}_i^W(r))_{i=1}^n$ جواب‌های بهینه تقریبی برای FNLPP(1) هستند.

با توجه به مجموعه $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ و این‌که $\tilde{x}_i^B(r) \;\; i = 1, 2, \ldots, n$ تابع خطی بین نقاط $(r_j, x_i^B(r_j))$ است، می‌توان نوشت:

$$\tilde{x}_i^B(r) = \begin{cases} \frac{r}{r_1}x_i^B(r_1) + \frac{r_1 - r}{r_1}x_i^B(0), & r \in [0, r_1], \\ \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}x_i^B(r_2) + \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}x_i^B(r_1), & r \in (r_1, r_2], \\ \quad \vdots & \\ \frac{r - r_{s-1}}{r_s - r_{s-1}}x_i^B(r_s) + \frac{r_s - r}{r_s - r_{s-1}}x_i^B(r_{s-1}), & r \in (r_{s-1}, r_s], \\ \frac{r - r_s}{1 - r_s}x_i^B(1) + \frac{1 - r}{1 - r_s}x_i^B(r_s), & r \in (r_s, 1]. \end{cases}$$

به همین صورت $\tilde{x}_i^W(r)$ را نیز می‌توان تعریف نمود.

تعریف ۳.۳. فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$، $b \in F^m$، $c \in F^n$ و $r_1, r_2, \ldots, r_s \in (0,1)$ (به ازای یک مقدار مثبت s) با رابطه $r_{s+1} = 1 > r_s > \cdots > r_2 > r_1 > r_0 = 0$ هستند. همچنین، $\tilde{x}_i^B(r)$ و $\tilde{x}_i^W(r)$ به ترتیب بهترین و بدترین جواب بهینه تقریبی FNLPP(1)، با توجه به مجموعه سطح $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$، هستند. فرض کنیم بردارهای ستون مجموعه فازی n بعدی $\left(u_{\tilde{x}_i^B}\right)_{i=1}^n = u_{\tilde{x}^B}$ و $\left(u_{\tilde{x}_i^W}\right)_{i=1}^n = u_{\tilde{x}^W}$ به

صورت زیر تعریف شود:

$$u_{\tilde{x}_i^B} = \begin{cases} \sup\left\{r \in [\circ, 1] :\ t \in [\underline{\tilde{x}_i^B}, \overline{\tilde{x}_i^B}]\right\}, & \left\{r \in [\circ, 1] :\ t \in [\underline{\tilde{x}_i^B}, \overline{\tilde{x}_i^B}]\right\} \neq \varnothing \\ \circ, & \left\{r \in [\circ, 1] :\ t \in [\underline{\tilde{x}_i^B}, \overline{\tilde{x}_i^B}]\right\} = \varnothing \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$u_{\tilde{x}_i^B} = \begin{cases} \sup\left\{r \in [\circ, 1] :\ t \in [\underline{\tilde{x}_i^W}, \overline{\tilde{x}_i^W}]\right\}, & \left\{r \in [\circ, 1] :\ t \in [\underline{\tilde{x}_i^W}, \overline{\tilde{x}_i^W}]\right\} \neq \varnothing \\ \circ, & \left\{r \in [\circ, 1] :\ t \in [\underline{\tilde{x}_i^W}, \overline{\tilde{x}_i^W}]\right\} = \varnothing \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

در این‌صورت می‌گوییم $u_{\tilde{x}^B}$ و $u_{\tilde{x}^W}$ بهترین و بدترین جواب بهینه تقریبی مجموعه فازی، با توجه به مجموعه سطح $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$، است. به‌ویژه اگر $u_{\tilde{x}^B} \in E$ و $u_{\tilde{x}^W} \in E$ فرض شود، آن‌گاه می‌گوییم $u_{\tilde{x}^B}$ و $u_{\tilde{x}^W}$ بهترین و بدترین جواب بهینه تقریبی فازی است.

قضیه ۴.۳. فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$، $b \in F^m$، $c \in F^n$ و $r_1, r_2, \ldots, r_s \in (\circ, 1)$ (به ازای یک مقدار مثبت s) با رابطه $r_\circ = \circ < r_1 < r_2 < \cdots < r_s < r_{s+1} = 1$ هستند. همچنین، $x^B(r_j) = (x_i^B(r_j))_{i=1}^n$ بهترین جواب بهینه r_j و $x^W(r_j) = \left(x_i^W(r_j)\right)_{i=1}^n$ بدترین جواب بهینه r_j برای $FNLPP(1)$ هستند. اگر به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ دنباله متناهی $\{x_i^B(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ و $\{x_i^W(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ یکنوا (غیرصعودی یا غیرنزولی) فرض شود، آن‌گاه $u_{\tilde{x}^B}$ و $u_{\tilde{x}^W}$ بهترین و بدترین جواب بهینه تقریبی عدد فازی برای $FNLPP(1)$، با توجه به مجموعه سطح $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ هستند.

اثبات. برای هر $i = 1, 2, \ldots, n$ از یکنوایی دنباله $\{x_i^B(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ و $\{x_i^W(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ می‌دانیم که جواب‌های بهینه تقریبی FNLPP(1) با توجه به مجموعه سطح $\{r_1, r_2, \ldots, r_s\}$ در $[\circ, 1]$ پیوسته و یکنوا باشند، با استفاده از تعریف $\tilde{x}_i^B(r)$ و $\tilde{x}_i^W(r)$ می‌توان اثبات کرد که $u_{x^B} \in E$ و $u_{x^W} \in E$. □

قضیه ۵.۳. فرض کنیم $A \in F^{m\times n}$، $b \in F^m$، $c \in F^n$ و $r_1, r_2, \ldots, r_s \in (\circ, 1)$ (به ازای یک مقدار مثبت s) با رابطه $r_\circ = \circ < r_1 < r_2 < \cdots < r_s < r_{s+1} = 1$ هستند. همچنین، $x^B(r_j) = (x_i^B(r_j))_{i=1}^n$ بهترین جواب بهینه r_j و $x^W(r_j) = \left(x_i^W(r_j)\right)_{i=1}^n$ بدترین جواب بهینه r_j برای $FNLPP(1)$ هستند.

اگر هر دنباله متناهی $\{x_i^B(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ و $\{x_i^W(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ اکیداً یکنوا فرض شود، آن‌گاه برای بهترین یا بدترین جواب بهینه تقریبی فازی داریم:

$$u_{\tilde{x}_i^B}(t) = \begin{cases} (\tilde{x}_i^B)^{-1}(t) & t \in \left[\underline{\tilde{x}_i^B}(\circ), \underline{\tilde{x}_i^B}(1)\right], \\ \circ & t \notin \left[\underline{\tilde{x}_i^B}(\circ), \underline{\tilde{x}_i^B}(1)\right], \end{cases} \quad \text{و} \quad u_{\tilde{x}_i^W}(t) = \begin{cases} (\tilde{x}_i^W)^{-1}(t) & t \in \left[\underline{\tilde{x}_i^W}(\circ), \underline{\tilde{x}_i^W}(1)\right], \\ \circ & t \notin \left[\underline{\tilde{x}_i^W}(\circ), \underline{\tilde{x}_i^W}(1)\right]. \end{cases}$$

اگر، به ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، هر دنباله متناهی $\{x_i^B(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ و $\{x_i^W(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ اکیداً صعودی فرض شود، آن‌گاه داریم:

$$u_{\tilde{x}_i^B}(t) = \begin{cases} (\tilde{x}_i^B)^{-1}(t) & t \in \left[\underline{\tilde{x}_i^B}(1), \underline{\tilde{x}_i^B}(\circ)\right], \\ \circ & t \notin \left[\underline{\tilde{x}_i^B}(1), \underline{\tilde{x}_i^B}(\circ)\right], \end{cases} \quad \text{و} \quad u_{\tilde{x}_i^W}(t) = \begin{cases} (\tilde{x}_i^W)^{-1}(t) & t \in \left[\underline{\tilde{x}_i^W}(1), \underline{\tilde{x}_i^W}(\circ)\right], \\ \circ & t \notin \left[\underline{\tilde{x}_i^W}(1), \underline{\tilde{x}_i^W}(\circ)\right]. \end{cases}$$

اگر به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, n$، هر دنباله متناهی $\{x_i^B(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ و $\{x_i^W(r_j)\}_{j=\circ}^{s+1}$ اکیداً صعودی فرض شود، آن‌گاه $(\tilde{x}_i^B)^{-1}(t)$ و $(\tilde{x}_i^W)^{-1}(t)$ توابع معکوس $\tilde{x}_i^B(r)$ و $\tilde{x}_i^W(r)$ هستند.

اثبات. بنابر اثبات قضیه ۴.۳ ثابت می‌شود. □

۴. نتایج اصلی

در این مقاله برای حل مسئله برنامه‌ریزی خطی اعداد فازی، مفهوم جواب‌های بهینه تقریبی به همراه تعاریف و قضایای مهم معرفی شد و در نهایت ساختار جواب FNLPP، بهترین و بدترین جواب تقریبی آن را مورد بحث قرار دادیم. تعاریف بهترین و بدترین مجموعه جواب‌های بهینه تقریبی FNLP را در ۲.۳ و ۳.۳ ارائه کردیم و نتایج آن را در قضایای ۴.۳ و ۵.۳ بررسی کردیم.

مراجع

1. J. J. Buckley and T. Feuring, *Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming*, Fuzzy Sets and Systems **109** (1) (2000) 35–53.
2. R. Ezzati, E. Khorram and R. Enayati, *A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem*, Appl. Math. Model. **39** (12) (2015) 3183–3193.
3. Y. Fan, G. Huang and A. Veawab, *A generalized fuzzy linear programming approach for environmental management problem under uncertainty*, J. Air Waste Manag. Assoc. **62** (1) (2012) 72–86.
4. Y. R. Fan, G. H. Huang and A. L. Yang, *Generalized fuzzy linear programming for decision making under uncertainty: Feasibility of fuzzy solutions and solving approach*, Inform. Sci. **241** (2013) 12–27.
5. F. Hosseinzadeh Lotfi, T. Allahviranloo, M. Alimardani Jondabeh and L. Alizadeh, *Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution*, Appl. Math. Model. **33** (7) (2009) 3151–3156.
6. T. Razzaghnia and E. Pasha. *A new mathematical programming approach in fuzzy linear regression models*, J. Sci. I. A. U. **18** (70/2) (2009) 50–59.
7. H. Tanaka and K. Asai, *Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **13** (1) (1984) 1–10.
8. G. Wang and and J. Li, *Approximations of fuzzy numbers by step type fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems **310** (2017) 47–59.
9. G. Wang and J. Peng, *Fuzzy optimal solution of fuzzy number linear programming problems*, Int. J. Fuzzy Syst. **21** (3) (2019) 865–881.

پست الکترونیکی: faeze.ti75@yahoo.com

ارائه‌های پوستری

تاریخ، آموزش و فلسفه ریاضی

خوارزمی؛ جبردانی که هندسه می‌دانست

علی اصغر رضائی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و مریم فتوحی راغب
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. در این مقاله ایده‌های هندسی خوارزمی را در حل معادلات جبری بررسی می‌کنیم و یک نمونه از آن‌ها را با همتای اقلیدسی‌اش در کتاب اصول، مقایسه می‌کنیم. همچنین بحث مختصری در مورد مهارت خوارزمی در تلفیق هندسه و جبر و نیز اصالت نگاه هندسی او به مسائل و استقلال آن، از کتاب اصول انجام می‌دهیم.
واژه‌های کلیدی: خوارزمی، کتاب دوم اصول، جبر هندسی، اقلیدس.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 01A30.

۱. پیش‌گفتار

از خوارزمی بیشتر به خاطر کارهای جبری‌اش و در رأس آن‌ها کتاب الجبر و المقابله یاد شده است. در این مقاله اما ذائقه هندسی خوارزمی را واکاوی خواهیم کرد. آن‌جا که برای توجیه درستی روابط جبری‌اش، هندسه را به کار می‌گیرد و جبر و هندسه را هنرمندانه در هم می‌آمیزد. گسترش روش‌های حل مسائل جبری شامل مجهولات با توان‌های آن‌ها، یکی از امور شایع در ریاضیات اسلامی بود. عبارت جبر اسلامی یا جبر عربی که در متون تاریخی دیده می‌شود، موید همین نکته است. خوارزمی کتاب معروف الجبر و المقابله را در اوایل قرن نهم میلادی به تشویق خلیفه وقت نوشت. او در این کتاب قواعدی را برای حل معادلات درجه دوم ارائه داد و سپس برهان‌هایی هندسی برای توجیه برخی از قواعد ارائه کرد. در این مقاله یکی از ایده‌های کتاب اصول اقلیدس را که در کارهای خوارزمی دیده می‌شود، بحث می‌کنیم. خاطر نشان می‌سازیم که این ایده‌ها در زمینه‌هایی ظاهر می‌شوند که تفاوت محسوسی با ایده اصلی اقلیدس دارند. باید در نظر داشت که انتقال کتاب اصول به زبان عربی شامل یک شبکه بسیار پیچیده از ترجمه‌ها، ویرایش‌ها و تفسیرها است که در حال حاضر دانش چندانی نسبت به آن نداریم [۱]. پژوهش‌های تاریخی فعلی به دو ترجمه اولیه عربی از اصول منجر شده است که یکی از آن‌ها قبل از ۸۰۵ میلادی به حجاج ابن یوسف ابن مطر منسوب است و دیگری توسط اسحاق ابن حنین در یک سوم پایانی قرن نهم میلادی انجام شده و بعداً به وسیله ثابت بن قره ویرایش گردیده است.

این موضوع که آیا خوارزمی از ترجمه‌های کتاب اصول آگاه بوده و یا خیر بر کسی معلوم نیست؛ اما حقیقت آن است که او نتایج کتاب دوم اقلیدس را در هیچ یک از آثار خود به صراحت بیان یا اثبات نکرده است [۳].

در این مقاله ابتدا اشاره مختصری به یکی از گزاره‌های اقلیدس می‌کنیم و در ادامه شرحی از روش خوارزمی برای توجیه درستی حل یک معادله درجه ۲ می‌آوریم. به این امید که این نوشتار مختصر خواننده را به یک جمع‌بندی منصفانه در این خصوص برساند.

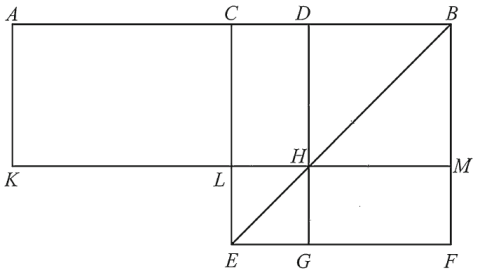
۲. یک گزاره از کتاب دوم اصول اقلیدس

کتاب اصول مشتمل بر ۱۳ باب یا کتاب است. باب دوم این کتاب شامل ۱۴ گزاره در خصوص برابر بودن مستطیل‌ها و مربع‌هاست که از آن با عنوان جبر هندسی نیز یاد می‌شود. ۱۰ گزاره نخست این کتاب ابزارهایی نسبتاً ساده و کاربردی هستند که بعدها به عنوان لم‌های کمکی برای اثبات قضایای پیچیده‌تر از جمله چهار قضیه

* ارائه‌دهنده

انتهایی کتاب دوم به کار رفته‌اند؛ همچنان که رد پای آن‌ها در دیگر متون ریاضی باستان از جمله مقاطع مخروطی آپولونیوس نیز یافت می‌شوند. در این مقاله مشخصاً از گزاره پنجم این کتاب یاد خواهیم کرد. بنابراین صورت آن را در این جا ذکر می‌کنیم [۴]:

گزاره پنجم کتاب دوم اقلیدس. اگر یک پاره‌خط را در دو نقطه برش دهیم به‌طوری که یکی از برش‌ها پاره‌خط را نصف کند و دیگری پاره‌خط را به دو قسمت نابرابر تقسیم کند، آن‌گاه مربع نصف پاره‌خط برابر است با حاصل‌ضرب قطعات نابرابر، به‌علاوه مربع پاره‌خط بین دو برش.



شکل ۱. تعبیر هندسی گزاره پنجم از کتاب دوم اصول.

شکل ۱ نمایش هندسی این گزاره است. پاره خط AB در نقطه C به دو قسمت مساوی و در نقطه D به دو قسمت نامساوی تقسیم شده است. چهارضلعی‌های $DBMH$ ، $CBFE$ و $LHGE$مربع و مابقی چهارضلعی‌ها مستطیل هستند. اگر نماد S را برای مساحت به کار ببریم، گزاره فوق می‌گوید

$$S_{CBEF} = S_{ADHK} + S_{LHGE}.$$

جهت آشنایی بیشتر با کتاب دوم اقلیدس، خوانندگان علاقمند را به [۲] ارجاع می‌دهیم.

۳. یک مسأله معروف از خوارزمی

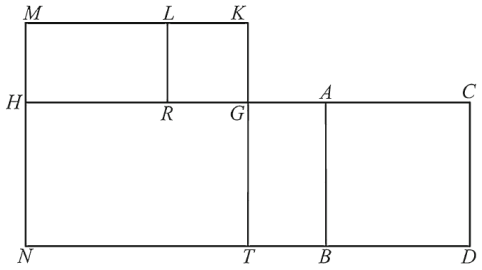
بسیاری از برهان‌های هندسی موجود در آثار خوارزمی، شباهت‌هایی با گزاره‌های اقلیدسی دارند. اما تقریباً همه آن‌ها بر خلاف سخت‌گیری‌های اقلیدسی با روش شهودی و یا تصویری بیان شده‌اند. یک مثال مشهور، استفاده خوارزمی از نتیجه‌ای مشابه گزاره پنجم اقلیدس است که در مسأله معروفی به کار رفته است که مضمون آن چنین است: مجموع مربع یک عدد، به‌علاوه ۲۱ واحد، برابر است با ۱۰ برابر همان عدد؛ به زبان امروزی، معادله مذکور به‌صورت $x^2 + 21 = 10x$ است. خوارزمی در شرح مسأله، عدد ۱۰ را ضریب ریشه می‌نامد.

شیوه کاری خوارزمی برای حل این مسأله چنین است [۵]: ضریب ریشه را نصف کنید؛ مقدار ۵ به دست می‌آید؛ این مقدار را در خودش ضرب کنید؛ حاصل ۲۵ است؛ ۲۱ را از این عدد کم کنید؛ باقیمانده ۴ است؛ ریشه آن را به دست آورید که ۲ است؛ حال ۲ را از نصف ضریب ریشه که ۵ است، کم کنید؛ باقیمانده ۳ است؛ ۳ ریشه معادله‌ای است که شما داشتید یا ممکن است ۲ را به نصف ضریب ریشه، اضافه کنید؛ این مجموع ۷ است که جواب دیگری برای معادله است.

نموداری که برای تایید درستی این روش به کار می‌رود، تداعی‌کننده گزاره ۵ از کتاب دوم اصول است اما با آن یکی نیست.

اگر بخواهیم استدلال هندسی خوارزمی را به زبان امروزی و با جزئیات، تشریح کنیم، می‌توان چنین گفت:

در شکل ۲ طول مستطیل $HCDN$، یعنی HC را برابر با ۱۰ و عرض آن یعنی CD را مجهول x در نظر می‌گیریم. مساحت این مستطیل $10x$ است که یک طرف معادله فوق می‌باشد. توجه کنید که اگر x جواب مسأله باشد، $10 - x$ هم جواب مسأله است؛ زیرا معادله فوق را می‌توان به‌صورت $10x - x^2 = 21$ نوشت که با



شکل ۲. توجیه هندسی روش خوارزمی برای حل معادله.

تجزیه کردن سمت چپ، به‌شکل $x(۱۰ - x) = ۲۱$ نیز نوشته می‌شود. از طرفی، می‌دانیم که عدد ۵، جواب معادله نیست و برای اعداد بزرگتر از ۱۰، سمت چپ معادله اخیر، یک عدد منفی است که تحت هیچ شرایطی با سمت راست آن، یعنی عدد ۲۱ برابر نخواهد بود. به دیگر سخن، یکی از ریشه‌ها که آن را نامیده‌ایم کمتر از ۵، و دیگری یعنی $۱۰ - x$ بزرگتر از ۵ و کمتر از ۱۰ خواهد بود. نقاط A و R را روی ضلع HC چنان می‌گیریم که $HR = AC = CD$. اگر نقطه وسط ضلع HC را G بنامیم، آنگاه هیچ یک از نقاط A و R بر G منطبق نخواهند بود؛ زیرا طول AC و HR کمتر از ۵ است، و نقطه G دقیقا جایی قرار دارد که فاصله آن از دو سر HC برابر با ۵ می‌باشد. یعنی G میان A و R قرار دارد. از A و G بر ضلع روبرویی مستطیل عمود کرده و پای عمود را به ترتیب B و T می‌نامیم. یک مربع $ACDB$ به‌دست می‌آید که مساحت آن $x^۲$ است. مستطیل $HABN$ نیز به‌دست می‌آید که مساحت آن برابر است با

$$S_{HABN} = S_{HCDN} - S_{ACBD} = ۱۰x - x^۲ = ۲۱.$$

روی نیم‌خط‌های $\overrightarrow{TG}$ و $\overrightarrow{NH}$ به ترتیب نقاط K و M را چنان می‌گیریم که یک مربع $MKTN$ به ضلع ۵ به‌دست آید. مساحت این مربع ۲۵ است. از R بر MK عمود کرده و پای عمود را L می‌نامیم. توجه کنید که پاره خط‌های GA، GR و GK قابل انطباق هستند؛ زیرا طول هر کدام $۵ - x$ است. بنابراین چهارضلعی $KGRL$ یک مربع است که مساحت آن $GA^۲$ است. حال پاره‌خط HC در نقطه G به دو قسمت مساوی و در دو نقطه A به دو قسمت نامساوی تقسیم شده است. طبق گزاره پنجم کتاب دوم اصول داریم $HG^۲ = HA.AC + GA^۲$. یا به عبارتی

$$S_{MKTN} = S_{HABN} + S_{KGRL}.$$

اما می‌دانیم که مساحت $MKTN$ و $HABN$ به ترتیب ۲۵ و ۲۱ است. بنابراین مساحت مربع $KGRL$ برابر با ۴ است. پس طول ضلع آن که با GA برابر است، ۲ می‌باشد. با کم کردن این عدد از طول نصف پاره خط، طول AC به دست می‌آید که برابر با ۳ است و ریشه دیگر آن، با اضافه کردن ۲ به طول نصف پاره خط به‌دست می‌آید که ۷ است.

همچنان که می‌بینیم ابزارهای هندسی، مورد استفاده قرار گرفته‌اند تا یک مسأله جبری با کمک مساحت چهارضلعی‌ها حل شود و این یکی از ترفندهای جبر هندسی است که خوارزمی به وفور از آن بهره جسته است.

۴. جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

حقیقتاً کسی نمی‌داند که آیا خوارزمی به ترجمه کتاب اصول دسترسی داشته یا نه. فراموش نکنیم که در عهد خوارزمی خبری از دستگاه چاپ نبوده که نسخه‌های فراوانی از اصول اقلیدس در دسترس و برای اهالی علم قابل استفاده باشد. ضمن آن‌که خوارزمی کتاب الجبر والمقابله را در اوایل قرن نهم میلادی نوشته و طبق آخرین پژوهش‌های تاریخی، اولین ترجمه عربی کتاب اصول هم در سال ۸۰۵ میلادی انجام شده است. بنابراین احتمال دسترسی خوارزمی به این ترجمه به دلیل بعد مسافت و نیز محدود بودن نسخه‌های دست‌نویس، بسیار ناچیز است. هدف

نگارندگان به هیچ عنوان بزرگ جلوه دادن کار خوارزمی نیست؛ از آن رو که دهانه خوارزمی نامی است که غربیان بر یکی از دره‌های ماه گذاشته‌اند و واژه الگوریتم شکل دیگری است از نام جاودانه این بزرگمرد پارسی که به دلیل عمق پژوهش‌هایش به هر فرآیند و راهکار علمی و کامپیوتری اطلاق می‌شود.

باری بگذارید نظر شخصی‌مان را بگویم: آن چه مشخص است خوارزمی برای اثبات یک رابطه جبری، از هندسه کمک گرفته است؛ در حالی که اقلیدس با هندسه شروع کرده و یک رابطه جبری را به دست آورده است. از این رو تا حدود زیادی به نظر می‌رسد کار خوارزمی مستقل از اقلیدس بوده است. ضمن آن‌که، تاریخ ریاضیات نمونه‌های فراوانی دارد از کشف یک موضوع توسط چند نفر آن هم بدون اطلاع از یکدیگر. محض نمونه نیوتون و لایب نیتس در مورد حسابان؛ بویویی و لباچفسکی در مورد هندسه هذلولوی.

اگر روزی پژوهش‌های تاریخی، بی‌خبر بودن خوارزمی از محتوای کتاب اصول را تایید کند، خوارزمی علاوه بر جبردان بودن، در زمره هندسه‌دانان عصر خود نیز قرار خواهد گرفت. اگر هم چنین چیزی تایید نشود، همچنان نبوغ خوارزمی در تلفیق جبر و هندسه؛ و اعتلای جبر هندسی، ستودنی است.

سپاس‌گزاری

نویسندگان مقاله مراتب قدردانی خود را از دانشگاه کاشان، به جهت حمایت از این اثر در قالب پژوهانه شماره ۹۸۵۹۸۷ ابراز می‌دارند.

مراجع

1. S. Brentjes, *Observations on Hermann of Carinthia's version of the elements and its relation to the Arabic transmission*, Science in Context **14** (1-2) (2001) 39–84.
2. L. Corry, *Geometry and arithmetic in the medieval traditions of Euclid's Elements: a view from Book II*, Archive for History of Exact Sciences **67** (6) (2013) 637–705.
3. A. Djebbar, *L'algèbre Arabe. Genèse D'un Art*, Vuibert, Paris, 2005.
4. T. Heath, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*,Dover Publications, Inc. New York, 1956.
5. F. A. Rosen, *The Algebra of Mohammed ben Musa*, Murray, London, 1831.

پست الکترونیکی: a_rezaei@kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: ma.fotuhi@gmail.com

بررسی تأثیر متقابل فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی در تاریخ ریاضی ایران بعد از اسلام

هادی وکیلی
دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
رضا فیاضی*
دانشکده ادبیات و علوم انسانی، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران
و اصغر فیاضی
دانشکده علوم(ریاضی)، دانشگاه گلستان، گرگان، ایران

چکیده. تاریخ ایران بعد از اسلام همواره مورد توجه و رغبت پژوهشگران بوده است. فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی تأثیرات متقابل فراوانی بر یکدیگر داشته‌اند. در این میان، تأثیرات متقابل علمی‌خصوصاً علم ریاضیات قابل توجه می‌باشد. با وجود نظام طبقاتی در دوره ساسانی بسیاری از ایرانیان از نعمت علم بی بهره بودند. بعد از فتح ایران توسط مسلمانان و با توجه به تعالیم اسلامی که علم را یک فضیلت برای همه می‌دانست ایرانیان توانستند در عرصه‌های مختلف علمی‌از جمله ریاضیات پیشرفت‌های فراوانی به دست آورند. از طرفی، مسلمانان که در علوم قرآن و حدیث صاحب نظر بودند، در علوم عقلی مانند ریاضیات از دانشمندان ایرانی بهره بردند. در این مقاله قصد داریم تا با برشمردن تأثیر متقابل فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی بر یکدیگر در علم ریاضیات و پیشرفت‌هایی که در اثر این تأثیرات در ریاضیات اسلامی و ایرانی و به طبع آن جهانی حاصل شد بپردازیم.
واژه‌های کلیدی: تاریخ، اسلام، ایران، ریاضیات، فرهنگ و تمدن.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

در طول تاریخ، کسب علم و دانش همواره مورد علاقه مردم ایران زمین بوده است. شاید بتوان اولین نشانه‌های این امر را در هزاره سوم پیش از میلاد جستجو کرد. اما شکوفایی علم و دانش خصوصاً در عرصه ریاضیات در ایران را در دوره اسلامی شاهد هستیم. دین اسلام که فضیلت را در کسب دانش می‌دانست موجبات رشد و تعالی ایرانیان را فراهم آورد. لذا بسیاری از مورخان اجبار را عامل مسلمان شدن ایرانیان نمی‌دانند، بلکه کنار زدن نظام ظلم در دوره ساسانی و تعالیم اسلامی را عامل اصلی این امر می‌شمارند. ادوارد براون خاورشناس انگلیسی در جای جای کتاب خودش اقرار و اعتراف می‌کند که ایرانیان اسلام را با رغبت پذیرفتند: "تحقیق درباره غلبه تدریجی آیین اسلام بر کیش زرتشت مشکل‌تر از تحقیق در استیلای عرضی عرب بر مستملکات ساسانیان است. چه بسا تصور کنند که جنگجویان اسلام اقوام و ممالک مفتوحه را در انتخاب یکی از دو راه مخیر می‌ساختند: اول قرآن و دوم شمشیر. ولی این تصور صحیح نیست زیرا گبر و ترسا و یهود اجازه داشتند آیین خود را نگاه دارند و فقط مجبور به دادن جزیه بودند و این ترتیب کاملا عادلانه بود زیرا اتباع غیر مسلم خلفا از شرکت در غزوات و دادن خمس و زکات که بر امت پیامبر فرض بود معافیت داشتند" [۷]. رشد و تعالی و پیشرفت علوم مختلف در سرزمین‌های اسلامی به طور کلی از اواسط قرن دوم هجری شروع شد و در قرن پنجم به اوج خود رسید. در این محدوده زمانی که حدود سه قرن و نیم طول کشید در عرصه‌های مختلف علمی از جمله ریاضیات، مسلمانان به پیشرفت‌های عظیمی دست یافتند. پس از آن دوران شکوفایی از قرن هفتم با همان سرعتی که پیش رفته بود رو به ضعف و انحطاط نهاد و این انحطاط تا سه قرن ادامه یافت تا این‌که در قرن نهم روح علمی یکسره ناپدید شد ولی نوشتن، شرح و حاشیه بر آثار گذشتگان همچنان ادامه داشت.

در مورد ریاضیات و نجوم باید گفت که پیشرفت در آن‌ها از جریان کلی پیشرفت علوم که در آن دوره وجود داشت مستثنی نبوده است. نخستین کتابی که در زمینه جبر از دوران اسلامی به دست ما رسیده الجبر و المقابله

* ارائه‌دهنده

نوشته محمد بن موسی خوارزمی است که در سده‌های میانه در اروپا بسیار معروف بود و واژه algebra در زبان‌های اروپایی از نام همین کتاب است [۵]. پیشرفت دیگری که به‌دست ریاضیدانان اسلامی در جبر حاصل شده، استعمال جبر در هندسه و بالعکس (یعنی به‌کار بردن هندسه در جبر)، بوده است و این کار در بسط هندسه تحلیلی تأثیر بسزایی داشته است [۲].

لذا در این مقاله برآنیم تا با بررسی تأثیرات متقابل فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی بر یکدیگر، به توسعه علوم مختلف خصوصاً علم ریاضیات در ایران بعد از ورود اسلام به این کشور بپردازیم. در نهایت تعدادی از ریاضیدانان مسلمان ایرانی و خدمات آن‌ها به دنیای ریاضیات به عنوان نمونه‌هایی از این تأثیرات می‌پردازیم.

۲. فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی

تعامل تمدن ایرانی با اسلام تعاملی دوطرفه و سازنده بوده است. اسلام موفق شد ایرانیان را از تعصبات و خرافات مذهبی و همچنین نظام طبقاتی ساسانیان رهایی بخشد و به ایرانیان حیاتی دوباره دهد و این تمدن در حال نابودی به واسطه اسلام شکل تازه‌ای به خود گرفت. می‌توان گفت که تاریخ علم دوره اسلامی با روی کار آمدن عباسیان آغاز می‌شود. در این زمان دربار بغداد پذیرای بسیاری از منجمان هندی بود و بعضی از آثار نجومی از زبان سانسکریت به عربی ترجمه گردید. با ورود دین اسلام به ایران، فضیلت و برتری که این دین الهی برای دانشمندان قائل شده بود، باعث حرکت سریع و پویای نهضت علمی ایرانیان شد. در این دوره توجه مسلمانان به علوم پیش از اسلام معطوف گشت. دلیل توجه جامعه اسلامی به این علوم چالشی بود که از سوی علما و فیلسوفان اقلیت‌های دینی به ویژه یهودی و مسیحی که میان مسلمانان می‌زیستند ایجاد شده بود. البته این نکته حایز اهمیت است که مسلمانان صرفاً بهره‌بردار نبوده، خود نیز بر این علوم افزودند و بر رشد و گسترش آن بسیار موثر بودند.

از طرف دیگر، مسلمانان نیز قسمت عمده علوم فلسفی و ریاضی و طب را به زبان عربی ترجمه کردند. مسلمانان علوم نقلی را که در درک قرآن و حدیث و استخراج احکام که به آن نیاز داشتند ابداع کردند ولی علوم عقلی را از سایر ملل مثل ایران گرفتند. یکی از امتیازات تمدن اسلامی این است که مسلمانان توانستند علوم موجود در یونان و هندوستان و ایران را به عربی ترجمه کرده و بر آن بیفزایند. صحنه علم و فرهنگ وسیع ترین و پرشورترین میدان‌های خدمات ایرانیان به اسلام است [۶].

۳. ریاضیدانان مسلمان ایرانی

با ورود اسلام به ایران، همان‌طور که پیش تر اشاره کردیم، توسعه علوم در جنبه‌های گوناگون سرعت زیادی گرفت. در ریاضیات، نجوم و فیزیک هم مسلمین کارهای قابل توجه داشته‌اند. رصدخانه‌ای که مامون ضمیمه بیت الحکمه کرد مرکزی شد برای مطالعه در نجوم و ریاضیات [۱]. دانشمندان ایرانی مسلمان با ترجمه و تألیف کتب مختلف در زمینه علم ریاضیات و نجوم تأثیر شگرفی بر توسعه این علم در جهان داشتند؛ به‌گونه‌ای که بعدها اروپاییان از ترجمه آثار ریاضیدانان مسلمان ایرانی بهره‌های فراوان بردند. سهم ایرانیان در ریاضیات اسلامی شگرف است [۴]. بی گمان ایران کانون انتقال بسیاری از دانش ریاضی هند بوده است. با آن که نمی‌توان بر میزان خدمت ایرانیان در ریاضی حکم کرد ولی کوشش آنان در این رشته فراوان بوده است [۳]. در ادامه به برخی از این ریاضیدانان مسلمان ایرانی اشاره می‌کنیم.

۱.۳. خوارزمی. ابوعبدالله محمد بن موسی خوارزمی (۲۳۳-۱۸۵ ق) یکی از بزرگترین دانشمندان و ریاضیدانان عصر خویش است. وی در بیت الحکمه که مامون خلیفه عباسی آن را تاسیس کرده بود کار می‌کرد. او نخستین دانشمند اسلامی بود که در زمینه حساب و جبر کتاب نوشت. کتاب جبر او مختصر من حساب الجبر و المقابله نام داشت. می‌توان گفت که این کتاب قدیمی‌ترین متن ریاضیات موجود از عصر اسلامی است؛ زیرا این کتاب در دوره‌ای تألیف شد که هنوز آثار ریاضیات یونانی به عربی ترجمه نشده بود. این کتاب بعدها در قرن ۱۲ میلادی دو بار به لاتین ترجمه شد و باعث مطالعه جبر در اروپا و به طبع آن جهان گردید.

در عصر حاضر، جشنواره‌ای علمی به جهت تجلیل از نوآوران و پژوهشگران ایرانی همه ساله برگزار می‌گردد که این جشنواره به پاس خدمات این ریاضیدان شهیر ''جشنواره خوارزمی'' نام‌گذاری شده است. همچنین یادنامه‌ای برای این ریاضیدان مسلمان ایرانی به زبان روسی در دویست و شصت صفحه در مسکو به چاپ رسیده که حاوی شانزده مقاله در باب خوارزمی‌می‌باشد. یادنامه دیگری نیز به زبان فارسی درباره خوارزمی منتشر شده که حاصل تلاش کمیسیون ملی یونسکو می‌باشد.

۲.۳. **ابوالوفا بوزجانی.** ابوالوفا محمد بن محمد بن یحیی (۳۸۸-۳۲۸ ق) از ریاضیدانان نامی اسلامی و ایرانی در قرن چهارم هجری می‌باشد. او در بوژگان از توابع ولایت جام، ربع نیشابور به دنیا آمد و پس از یادگیری ریاضیات نزد خانواده به نیشابور عزیمت کرد. سپس به بغداد رفت و در رصدخانه این شهر مشغول به رصد شد و تا آخر عمر در همین شهر زندگی کرد. وی یکی از بزرگترین اخترشناسان و هندسه دانان عصر خویش بوده است. از میان آثار این ریاضیدان مسلمان ایرانی می‌توانیم به شرح‌هایی که او بر کتاب الجبر و المقابله خوارزمی و جبر دیوفانتوس و جبر هیپارخوس نوشته است اشاره کنیم.

در عصر حاضر، برای پاسداشت خدمات ابوالوفا بوزجانی دهانه یکی از آتشفشان‌های ماه به نام وی نام‌گذاری شده است. همچنین، همایش‌هایی به جهت آشنایی بیشتر با این ریاضیدان مسلمان ایرانی هر چند سال یک بار در کشورمان برگزار می‌گردد.

۳.۳. **ابوریحان بیرونی.** ابوریحان محمد بن احمد بیرونی (۴۴۲-۳۶۲ ق) در خانواده‌ای شیعه مذهب در بیرون شهر خوارزم دیده به جهان گشود. وی در سفری که محمود غزنوی به هندوستان داشت همراه او شد و توانست با دانشمندان هندی تعامل برقرار کند. همچنین با آموختن زبان سانسکریت توانست بر علم خود بیفزاید. ابوریحان بیرونی در زمینه ریاضیات و نجوم و فیزیک و علوم طبیعی از بزرگترین دانشمندان عصر خویش محسوب می‌شد. وی دارای کتاب‌ها و رساله‌های فراوانی در زمینه علم ریاضیات می‌باشد که بسیاری از این آثار در اروپا به ترجمه رسید و مورد استفاده آنان قرار گرفت. از آن جمله می‌توانیم به کتاب القانون المسعودی فی الهییه و النجوم اشاره کنیم که کارل شوی بخش مثلثات آن را به زبان آلمانی ترجمه کرد. همچنین، دو کتاب استخراج الاوتار و فی تسطیح الصور و تبطیح الکور که کتاب دوم در باب نمایش مسطح اشکال کروی می‌باشد را فردی به نام سوتر به زبان آلمانی ترجمه کرده است. کتاب فی راشیکات الهند که در آن ابوریحان بیرونی به بحث نسبت و تناسب می‌پردازد هم توسط ویدمان به زبان آلمانی ترجمه گردید. همچنین، کتاب التفهیم لاوایل صناعه التنجیم توسط ابوریحان بیرونی به دو زبان فارسی و عربی تألیف شده که توسط فردی به نام رمزی رایت به زبان انگلیسی ترجمه شده است.

در عصر حاضر، کشورمان ایران ساختمان-مجسمه‌ای را به دفتر سازمان ملل متحد واقع در شهر وین اتریش اهدا نموده است. این اثر به شکل چهارتاقی ساخته شده است و در ساخت آن از المان‌های هخامنشی و اسلامی توأمان بهره گرفته شده است که خود نشانی از تأثیر متقابل فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی بر یکدیگر در تاریخ ایران بعد از اسلام می‌باشد.

۴.۳. **خیام.** امام غیاث الدین ابوالفتح عمر بن ابراهیم خیام نیشابوری (۵۱۷-۴۴۰ ق) یکی از ریاضیدانان و حکمای بزرگ مسلمان ایرانی در اواخر قرن پنجم و اوایل قرن ششم هجری می‌باشد. او در شهر نیشابور به دنیا آمد. رساله خیام در ''جبر و مقابله'' و رساله دیگر او که در آن به پاسخ گویی به مشکلات هندسه اقلیدسی پرداخته از جمله مشهورترین آثار ریاضی اوست. وی علاوه بر ریاضیات و نجوم، در فلسفه، زبان شناسی و تاریخ جهان نیز تبحر داشت. از آثار خیام در زمینه ریاضیات می‌توانیم به ''رساله فی البراهین علی المسایل الجبر و المقابله'' اشاره کرد. خود خیام در آغاز این رساله عنوان می‌کند: ''یکی از مباحث تعلیمی مورد نیاز در بخشی از حکمت موسوم به ریاضی، صنعت جبر و مقابله است''.

در عصر حاضر، یکی از حفره‌های ماه به نام پاس خدماتی ریاضیدان و فیلسوف ایرانی ''عمر خیام'' نام‌گذاری شده است. در کشور تونس نیز هتلی به نام خیام ساخته شده است. همچنین رستورانی در شهر آدیس آبابا در کشور اتیوپی به نام خیام نام‌گذاری شده و رباعیات خیام در کتابخانه دانشگاه اتیوپی به زبان امهری وجود دارد. در کشور

خودمان ایران هم خیابان‌های مختلفی در شهرهای مختلف از جمله پایتخت به پاس سال‌ها خدمات این ریاضیدان و فیلسوف مسلمان و ایرانی ''خیام'' نام‌گذاری شده‌اند.

۵.۳. **خواجه نصیر الدین طوسی.** نصیرالدین ابو جعفر محمد بن محمد بن حسن طوسی (۵۹۷-۵۷۹ ق) معروف به خواجه نصیر یکی از بزرگترین ریاضیدانان و منجمان ایرانی جهان اسلام می‌باشد. وی در طوس دیده به جهان گشود. وی با حمله مغول‌ها به خراسان، نیشابور را ترک کرده به قهستان نزد ناصرالدین عبدالرحیم بن ابی منصور در قلاع اسماعیلیه و از آن‌جا به الموت رفت و تا زمان فتح الموت توسط هلاکو خان در آن‌جا ماند. هلاکو نیز پس از فتح الموت خواجه نصیر را بسیار احترام کرد و او را یکی از نزدیکان خود قرار داد. خواجه نصیرالدین هم از موقعیتی که داشت در توسعه علم بهره برد و به ساخت رصدخانه مراغه همت گماشت و بسیاری از دانشمندان مسلمان آن دوره را در آن جا گرد هم آورد. خواجه تا اواخر عمر در شهر مراغه زندگی کرد و در نهایت در شهر بغداد دیده از جهان فرو بست. از جمله آثار خواجه نصیر الدین طوسی در زمینه ریاضیات می‌توانیم به کتاب‌های تحریر اصول اقلیدس و تحریر کتاب الکره و الاستوانه در باب هندسه و کشف القطاع عن اسرار شکل القطاع در باب مثلثات اشاره کرد. همچنین کتاب جوامع الحساب بالتخت و التراب که خواجه نصیرالدین در آن بسط دو جمله‌ای خیام را در حالتی‌که توان عدد صحیح باشد را حساب کرده، به زبان روسی هم ترجمه شده است.

در عصر حاضر، روز تولد خواجه نصیر الدین طوسی، به جهت پاسداشت خدمات علمی‌وی، در ایران روز مهندس نام‌گذاری شده است. همچنین، هر چند سال یک بار همایشی برای بزرگداشت این ریاضیدان برجسته در کشورمان ایران برگزار می‌گردد.

۶.۳. **غیاث الدین جمشید کاشانی.** غیاث الدین جمشید بن مسعود بن محمود طبیب کاشانی (۸۳۲-۷۹۰ ق) ریاضیدان و منجم برجسته مسلمان و ایرانی می‌باشد. وی در غرب به الکاشی (al-kashi) معروف است و برخی او را بهترین ریاضیدان عصر اسلامی می‌دانند. وی از بزرگترین مفاخر ایران اسلامی می‌باشد. یکی از آثار کاشانی در زمینه ریاضیات عبارت است از کتاب مفتاح الحساب که این کتاب به عنوان دایره المعارف ریاضیات پیشینیان محسوب می‌شده است. کتاب دیگر کاشانی در ریاضیات کتاب الرساله المحیطیه است که او در این کتاب به فن محاسبه پرداخته است. این کتاب به زبان‌های آلمانی و روسی نیز ترجمه شده است و مورد استفاده اروپاییان قرار گرفته است. غیاث الدین جمشید کاشانی کتاب دیگری هم در باب ریاضیات با نام رساله وتر و جیب دارد که اصل این کتاب که در زمینه مثلثات می‌باشد در حال حاضر مفقود می‌باشد.

در عصر حاضر، دانشمندان مختلفی از کشورهای مختلف جهان از جمله پاول لوکی آلمانی، ادوارد استوارت کندی آمریکایی و آدلف یوشکویچ روس درباره غیاث الدین جمشید کاشانی صحبت کرده و یا در کتاب‌های خود از وی یاد کرده‌اند. در این میان، پاول لوکی دانشمند برجسته آلمانی بیشتر از سایر تاریخ شناسان برای معرفی این ریاضیدان برجسته و آثارش به جهانیان تلاش و کوشش نموده است. وی درباره غیاث الدین جمشید کاشانی گفته است:''اگر رساله محیطیه او به دست ریاضیدانان غربی معاصر وی رسیده بود، از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل درباره اندازه‌گیری دایره بی‌نیاز می‌شدند''. در کشور خودمان هم یک سریال به نام ''نردبام آسمان'' به کارگردانی محمد حسین لطیفی و یک فیلم سینمایی به نام ''شهرآشوب'' به کارگردانی یدالله صمدی درباره این ریاضیدان شهیر مسلمان و ایرانی ساخته شده است.

۷.۳. **شیخ بهایی.** بهاء الدین محمد بن حسین عاملی (۹۵۳- ۱۰۳۱ق) کتاب معروف او در زمینه ریاضیات خلاصه الحساب شیخ بهایی نام دارد. بعد از غیاث الدین جمشید کاشانی، یعنی پس از سده نهم هجری مطالعه ریاضیات در ایران و به طور کلی در سراسر جهان اسلام عقب رفت و یکی از شواهد بارز آن همین کتاب خلاصه الحساب شیخ بهایی است، که البته کتاب مفید و خوبی است، ولی از روی متن‌های دیگر نوشته شده است و مدت دویست سال کتاب درسی مدرسه‌های ایران، ترکیه و هند بود [۵].

در عصر حاضر، جشنواره‌ای برای تجلیل از فن آورینان و کارآفرینان همه ساله به همت شهرک علمی و تحقیقاتی اصفهان برگزار می‌گردد که این جشنواره به پاس سال‌ها خدمات علمی این ریاضیدان و دانشمند شهیر مسلمان ''شیخ بهایی'' نام‌گذاری شده است.

نتیجه‌گیری

ایرانیان از دیرباز به دنبال کسب علم و دانش بوده‌اند. این را به‌راحتی می‌توان از اطلاعات به‌دست آمده از هزاره‌های سوم پیش از میلاد در بعضی از جوامع متمدن واقع در فلات ایران متوجه شد. اما به‌تدریج خصوصاً در دوره ساسانی نظام طبقاتی موجود اجازه کسب علم را به همه نمی‌داد. بعد از فتح ایران توسط اعراب مسلمان، ایرانیان بدون مقاومت و با رغبت دین اسلام را که قائل به این نظام ظالمانه نبود پذیرفتند. دین اسلام بر کسب علم و دانش تاکید داشت و این مهم را حق همه افراد جامعه می‌شمرد. همچنین کسب علم در تعالیم اسلامی یک فضیلت به شمار می‌آمد و دانشمندان در جامعه اسلامی مورد احترام بودند. لذا عالمان ایرانی بعد از ورود اسلام فرصتی یافتند تا به گسترش تحقیقات و تألیفات خود در عرصه‌های مختلف علمی مانند ریاضیات بپردازند. از طرفی، مسلمانان که در علم قرآن و حدیث بی نیاز از دیگر جوامع بودند، در علوم عقلی مانند ریاضیات و نجوم توانستند از دانشمندان ایرانی بهره ببرند. ترجمه آثار مختلف از زبان‌های هندی و سانسکریت به زبان عربی کمک شایانی به پیشرفت‌های علمی در زمینه ریاضیات کرد. ریاضیدانانی مانند خوارزمی، ابوالوفا بوزجانی، ابوریحان بیرونی و حکیم عمر خیام را می‌توان نمونه‌هایی از تأثیر متقابل فرهنگ و تمدن اسلامی و ایرانی بر یکدیگر در زمینه تاریخ ریاضیات بدانیم. به‌گونه‌ای که بسیاری از آثار این ریاضیدانان بعدها ترجمه شده و مورد استفاده اروپاییان قرار گرفت.

سپاس‌گزاری

بدین‌وسیله مراتب سپاس‌گزاری خود را تمامی‌اساتید و کسانی که یاری‌گر در امر پژوهش و نگارش این مقاله بودند، همچنین از داوران کنفرانس، بابت دقت نظر و وقتی که اختصاص می‌دهند اعلام می‌گردد.

مراجع

۱. ع. زرین کوب، کارنامه اسلام، تهران: انتشارات امیرکبیر، ۱۳۸۵.
۲. ع. ا. حلبی، تاریخ تمدن اسلامی، تهران: انتشارات اساطیر، ۱۳۷۲.
۳. ر. ن. فرای، عصر زرین فرهنگ ایران، ترجمه مسعود رجب نیا، تهران: انتشارات سروش، ۱۳۶۳.
۴. م. فرشاد، تاریخ علم در ایران، تهران: انتشارات امیرکبیر، ۱۳۶۵.
۵. ا. قربانی، ریاضی دانان ایرانی، از خوارزمی تا ابن سینا، تهران: انتشارات ابن سینا، ۱۳۵۰.
۶. م. مطهری، خدمات متقابل اسلام و ایران، تهران: انتشارات صدرا، ۱۳۸۱.
۷. ه. وکیلی، تعامل اسلام و ایران در گستره تاریخ، جلد دوم، قم: انتشارات نهاد نمایندگی مقام معظم رهبری در دانشگاه‌ها، معارف، ۱۳۸۶.

پست الکترونیکی: frsfrsfrs4@gmail.com

گودل و مسئله گزاره‌های زبانی در فضای مجازی

پریسا امیری‌فرد
دانشگاه پیام نور استان مرکزی، اراک، ایران
و علی‌محمد نظری*
گروه ریاضی، دانشگاه اراک، اراک، ایران

چکیده. در منطق ریاضی، قضایای ناتمامیت گودل، توسط کورت گودل در سال ۱۹۳۱ ثابت شدند. این قضایا در منطق ریاضی و فلسفهٔ ریاضی از اهمیت بسزایی برخوردارند و دلیل اصلی این اهمیت، رد برنامهٔ هیلبرت برای یافتن مجموعه‌ای کامل و سازگار از اصول موضوع برای کل ریاضیات است. در این مقاله، بیان می‌کنیم که اگر مسئله پیوستار کانتور و قضیه ناتمامیت گودل بر اساس تغییر نحو زبان در مقوله اثبات‌پذیری و تصدیق در سازگاری به تقارنی در فضا–زمان پیوستار در تناظر جهان اینترنت و واقعی منتهی شد، امروزه فراریاضیات گودل و پیوستار کانتور در رابطه شئ و عدد و گرفتاری‌های مجموعه اعداد قابلیت‌های جدید هوش انسانی در داده‌کاوی و آنالیز محاسباتی را ایجاد کرده است. فضای مجازی خود مولود چنین تفکری است که از گودل شروع و اضافه کردن تقارن به عنوان افزودن بعد ما را به خلق چنین فضایی رسانده است که دارای تابع پیچیدگی بسیار بالایی است.
واژه‌های کلیدی: قضایای ناتمامیت گودل، سازگاری، نظریه کانتور.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 03A05, 03A10.

۱. پیش‌گفتار

فلسفه ریاضیات در قرن بیستم مرهون اندیشه‌های ناب دانشمند اتریشی کورت گودل است. هنوز به‌درستی معلوم نیست که آیا گودل آن موقع که نظریاتش را مطرح می‌کرد، می‌دانست که این قضایای مهم و ناب در فلسفه ریاضی می‌تواند پایه‌گذار مفاهیم اساسی در علوم رایانه باشد، اما گودل به چشم خود دید که علوم رایانه سرعتی چشمگیر دارد و اگر شاید به اندازه راسل زنده می‌ماند احتمالاً تأثیر نظریات خود را در فضای مجازی نیز حس می‌کرد. قضیهٔ اول ناتمامیت گودل، شاید مشهورترین نتیجه در منطق ریاضیات باشد، که بیان می‌کند:

قضیه ۱.۱. فرض کنید K یک نظریه در حساب باشد که قضایای اصلی حساب در آن اثبات شوند. در این‌صورت، اگر K سازگار باشد، جمله‌ای مانند G وجود خواهد داشت به قسمی که:
الف) اگر K نظریه‌ای سازگار باشد G در K اثبات پذیر نیست.
ب) اگر K نظریه‌ای ω ـ سازگار باشد، نقیض G در Kاثبات پذیر نیست.

در منطق ریاضی، یک نظریه ω ـ سازگار است که نه تنها سازگار باشد(یعنی تضادی را اثبات نکند)، بلکه از اثبات ترکیبات نامتناهی جملات کاملاً متناقض خودداری می‌کند. بنابراین، اگرK نظریه‌ای ω ـ سازگار باشد G یک جمله تصمیم ناپذیر از K است [۷]. بدین معنا که نه اثبات‌پذیر است و نه می‌توان آن را رد کرد.
قضیه ناتمامیت دوم گودل می‌گوید:

قضیه ۲.۱. [۷] فرض کنید K یک نظریه در حساب باشد که قضایای اصلی حساب در آن اثبات شوند. در این‌صورت اگر K سازگار باشد، گزاره‌ای که بیانگر سازگاری K است یک جمله تصمیم ناپذیر خواهد بود. به‌عبارت دیگر، هیچ نظام سازگار به اندازه کافی قوی که بتواند توابع بازگشتی را نمایش دهد قادر نیست سازگاری خود را اثبات کند.

در این‌جا، «نظریه» به معنای تعدادی قواعد استنتاج، تعدادی علائم و مجموعه‌ای نامتناهی از گزاره‌ها است، که تعدادی متناهی از این گزاره‌ها بدون اثبات پذیرفته می‌شوند (که اصول موضوع خوانده می‌شوند)، و برخی دیگر

* ارائه‌دهنده

از گزاره‌ها از اصول موضوع به‌دست می‌آیند. به این گزاره‌ها که با کمک قواعد استنتاج از اصول موضوع به‌دست می‌آیند قضیه می‌گوییم. اثبات پذیر بودن در نظریه یعنی «اشتقاق‌پذیر بودن از اصول موضوع نظریه به کمک قواعد استنتاج نظریه». یک نظریه «سازگار» است، در صورتی‌که هیچ‌گاه یک تناقض را اثبات نکند. بنابر قضیه ناتمامیت اول گودل، هیچ نظریه اصل موضوعی که حداقل قضایای اساسی حساب را بتواند اثبات کند وجود ندارد که همه قضایا را اثبات یا رد کند. به‌عبارتی در هر نظام اصل موضوعی ریاضی جملاتی تصمیم ناپذیر وجود دارند. طبق منطق کلاسیک و منطق ارسطویی هر گزاره‌ای یا صادق است یا کاذب. قضیه ناتمامیت اول می‌گوید که نظام‌های اصل موضوعی که قابلیت نشان دادن توابع بازگشتی را داشته باشند نمی‌توانند چنین تصمیمی دربارهٔ گزاره‌های حساب بگیرند. یعنی جملاتی در این نظام‌ها وجود دارند که نه اثبات‌پذیرند و نه انکارپذیر. می‌توان نشان داد که اگر G را به K بیفزاییم و مجموعهٔ جدیدی تولید کنیم، باز هم می‌توانیم یک گزارهٔ جدید گودل برای مجموعهٔ فعلی ارائه کنیم که در نظریهٔ جدید نه اثبات پذیر باشد و نه انکارپذیری و جامع بودن آن را نقض کنیم.

در نظریهٔ مجموعه‌های مقدماتی، قضیه کانتور نتیجه بنیادینی است که بیان می‌دارد: برای هر مجموعه A، مجموعه تمام زیر مجموعه‌های A (به آن مجموعهٔ توانی A گفته می‌شود و با $\mathcal{P}(A)$ نمایش داده می‌شود) به‌طور اکید کاردینالی بزرگتر از خود A دارد. برای مجموعه‌های متناهی می‌توان با شمردن تعداد زیر مجموعه‌ها، درستی قضیه کانتور را مشاهده کرد. با در نظر گرفتن تهی به‌عنوان یک زیر مجموعه، کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی برابر ۲^n خواهد بود، بنابراین اگر $\operatorname{card}(A) = n$ ، آنگاه $\operatorname{card}(\mathcal{P}(A)) = ۲^n$، و قضیه برقرار است چون برای تمام اعداد صحیح نامنفی داریم $۲^n > n$.

کشف مهم کانتور این بود که گزاره اخیر برای هر مجموعه‌ای درست است، یعنی علاوه بر مجموعه‌های متناهی برای مجموعه‌های نامتناهی، چه شمارا یا ناشمارا نیز درست است. به‌طور خاص، یکی از پیامدهای مهم قضیه کانتور این است که اعداد طبیعی که یک مجموعه شمارا با کاردینال $\operatorname{card}(\mathbb{N}) = \aleph_۰$ است، برابر یک مجموعه ناشمارا می‌باشد که کاردینال آن با اعداد حقیقی برابر بوده و این کاردینال از کاردینال اعداد طبیعی بزرگتر است و به آن کاردینال پیوستار گویند: $\operatorname{card}(\mathbb{R}) = \operatorname{card}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ رابطه بین این کاردینال‌ها را به این صورت نمایش می دهند $\mathfrak{c} = ۲^{\aleph_۰} > \aleph_۰$.

این قضیه را به افتخار ریاضیدان آلمانی گئورگ کانتور نام‌گذاری کردند، او اولین کسی بود که این قضیه را در انتهای قرن نوزدهم میلادی بیان و اثبات کرد. قضیه کانتور پیامدهای فوری و مهمی در فلسفه ریاضیات داشت. به‌عنوان مثال، با تکرار عمل ساخت مجموعه توانی از یک مجموعه نامتناهی و اعمال قضیه کانتور، به سلسله مراتب نامتناهی از کاردینال‌های نامتناهی می‌رسیم که هر کدام از قبلی به طور اکید بزرگتر است. در نهایت، این قضیه دلالت بر این دارد که هیچ کاردینالی که از همه کاردینال‌ها بزرگتر باشد وجود ندارد (به زبان دیگر "بزرگترین بی‌نهایت وجود ندارد").

در این مقاله، می‌خواهیم بگوییم که اضافه کردن بعد به عنوان تقارن می‌تواند نقش اساسی در ایجاد فضای مجازی داشته باشد، اگرچه پیچیدگی محاسبات در حد فوق تصور ممکن است بالا رود (با توجه به دو به توان الف صفرهای متوالی که می‌تواند پیاپی ایجاد گردد)، اما اختراع کامپیوترهای کوانتومی که ده‌هزار سال محاسبه را در سه دقیقه و بیست ثانیه به انجام رساندند، این نکته را یادآوری می‌کند که نگران پیچیدگی محاسبات نباشیم، سرعت محاسبات ما نیز مافوق هر تصوری در حال گسترش است. پس ایجاد فضای مجازی با پایه ایجاد تقارن اگرچه دارای پیچیدگی محاسباتی بسیار بالایی است، اما سرعت کامپیوترهای کوانتومی خیال ما را از این بابت راحت کرده است.

۲. ایجاد فضای مجازی با اضافه کردن بعد

باتوجه به مشهورترین اثر ریاضی آریشمتیکا اینتگرا در سال ۱۵۵۴ و تقسیم اعداد در این کتاب به اعداد گویا-اعداد گنگ و جبر ایجاد شده در آن‌ها، مقدمه اختراع لگاریتم در قرن بعد را فراهم شد. رازگرایی عددی شتیفل (اعتقاد به خواص فوق طبیعی) اعداد در چندین سال بعد توسط نپر به لگاریتم اعداد منتهی شد [۲].

اولین بار اعتقاد به رازگرایی اعداد منجر به استفاده از نماد در تاریخ ریاضیات شد. رازگرایی در اعداد در نظریه گودل و پیوستار کانتور با یک مشکل ترجمه مواجه است. این مشکل ترجمه آن‌ها تحت پیشوند فرا- ترا-

متعالی – نامتناهی و از بنیاد ناتمامیت مسئله‌ای را به‌وجود آورده است که به‌طور مستقیم ارتباط با این رازگرایی دارد. در پیوستار کانتور و در حمله موفق کانتور به مسئله بی‌نهایت، معروف‌ترین مجموعه‌های نامتناهی عبارت‌اند از" مجموعه اعداد صحیح–مجموعه اعداد کسری و مجموعه اعداد حقیقی. به‌دست آوردن تعداد شئ‌ها در چنین مجموعه‌هایی از طریق شمارش غیر ممکن است زیرا روند شمارش نهایتی ندارد. از سوی دیگر این‌که آن‌ها را نامحدود (بی‌نهایت) بنامیم چندان روشن کننده ابهام نیست" [۳].

کانتور بر اساس این مشکل به رابطه تناظری برای معرف کمیت چیزها با (الف صفر) یک عدد ترامتناهی – ترانسیفیت– را تعریف کرد. پس رازگرایی اعداد در بی‌نهایت–تصمیم ناپذیر– نامحدود– متعالی– ترامتناهی– فرامتناهی– از بنیاد ناتمام بر اساس تعریف یک نماد (ترانسیفیت) در اصل تناظر پاسخ جدیدی یافت. این الف صفر همان قدر اطلاعات در خود دارد که عدد یک بیلیون بیلیون. می‌توان یک بیلیون چیزی را در مجموعه‌ای که وجود دارد شمرد اما نمی‌توان الف صفر چیز را شمرد. عدد قبلی معنایی برای او دارد اما عدد اخیر در ذهن قابلیت شمارش ندارد [۳، ۴۴۵–۴۴۶]).

تناقضی که کانتور می‌یافت بین منطق و تفکر سنتی بود. در رابطه تناظر یک به یک بر اساس اصل استقرا مجموعه عدد صحیح مثبت دربردارنده یک عدد حقیقی–طبیعی است درصورتی‌که آن عدد به هر مجموعه استقرایی تعلق داشته باشد [۶، ۴–۳]). اما کانتور دریافت "بین مجموعه تمام اعداد بین ۰ و ۱ که شامل اعداد کسری و گنگ می‌شود نمی‌توان تناظر یک به یک با اعداد صحیح مثبت برقرار کرد. چون می‌توان نشان داد که هر تناظر یک به یک مفروضی بین مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت و مجموعهٔ تمام عددهای بین ۰ و ۱ به تناقض می‌انجامد. از مسئله رازگرایی اعداد که منجر به استفاده از نماد و سپس ابداع لگاریتم شد دو نتیجه می‌گیریم:

(۱) رابطه شئ و عدد در ترانسیفیت به هیچ راه حلی منتهی نمی‌شود.
(۲) رابطه تناظری یک به یک بین مجموعه اعداد صحیح مثبت و مجموعه تمام عددهای بین ۰ و ۱ به تناقض می‌انجامد.

گودل از دو نتیجه برای کدنویسی در یک فضای جدید که امکان محاسبات پیچیده در خارج از ذهن را داشته باشد استفاده کرد. به عبارت دیگر همچنان رازگرایی بی نهایت – تصمیم ناپذیر –نامتناهی– نامحدود– فرا متناهی– ترامتناهی – از بنیاد ناتمام در ترانسیفیت کانتور در نزد متفکران باقی ماند اما گودل در ۱۹۳۰ از ترانسیفیت و تناقض تناظر مجموعه اعداد صحیح و اعداد بین ۰ و ۱ برای کدنویسی استفاده کرد و نیاز به فضایی داشت که مانند ذهن قابلیت محاسباتی داشته باشد اما دیگر شمارش یک بیلیون بیلیون بین عدد و شئ به کدنویسی در فضای کامپیوتر و محاسبات پیچیده منتهی شد.

اما ابداع دیگر گودل تغییر نحو زبان در رابطه اصل– سازگاری– قضیه و صدق‌پذیری بود. در منطق ریاضی گذشته مجموعه اصول یک قضیه در سازگاری با سایر اصول به اثبات منتهی می‌شدند. اثبات‌پذیری یک قضیه ریاضی از سازگاری اصول در قضیه تبعیت می‌کرد و تصدیق می‌شد. با توجه به این‌که " کشف بسیاری از قوانین ریاضی به‌وسیله حدس و گمان است و این حدس و گمان باید اثبات شود فرموله کردن ریاضی با استفاده از استقرای ریاضی به سرانجام نرسید. چرا که " هیچ وقت حدس جانشین استدلال نخواهد شد" [۶].

به این ترتیب رازگرایی اعداد در رابطه اعداد طبیعی و حقیقی که بر اساس استقرای منطق ارسطویی تا قرون وسطی ادامه یافته بود برای اولین بار در دستگاه‌های جبری از نماد به جای رازگرایی در رابطه (حقیقی– طبیعی) استفاده شد. سپس کانتور هم (ترانسیفیت) را به‌کار برد آن‌چه یک تعریف است که مسئله جهان ریاضیات را پیش برد و کارکرد داشت اما به گفته کلاین فاقد معنی در ذهن بود و تحت عنوان یک نماد در اجماع ریاضیدانان پذیرفته شد و البته مخالفانی را نیز داشت. گودل این نماد را به کد تبدیل کرد و رابطه شئ و عدد را که تحت عنوان این ترانسیفیت در ذهن بی معنی بود به یک زبان کدنویسی در جهانی که ذهن نیست اما قابلیت محاسبات پیچیده بدون در نظر گرفتن رابطه شئ و عدد را دارد وارد ساخت.

بنابراین استدلال فوق در تاریخ ریاضیات دو تأثیر مهم بر جای گذاشت:

(۱) تغییر نحو سازگاری و اصل در اثبات و تصدیق یک قضیه ریاضی
(۲) خلاقیت ایجاد فضای مجازی و کدنویسی براساس ترانسیفیت و تبدیل آن به یک زبان برنامه

گودل از پیشگامان ورود زندگی انسان به عصر کامپیوتر و بالطبع آن فضای مجازی است. گودل جایزه را از انیشتین دریافت کرد زیرا توانست بعد را در خلاقیت ریاضی خود ضمیمه کند و از پیشگامان جهان محاسباتی چون کامپیوتر

باشد. اما استدلال ریاضی او در تغییر نحو زبان در دریافت مقوله اثبات پذیری تاریخ ریاضیات را با مسئله‌ای مهم مواجه ساخت. آن‌چه اصل عدم قطعیت هایزنبرگ و نظریه شرودینگر را در رابطه با آن‌چه حقیقی است- آن‌چه واقعی است- آن‌چه طبیعی است، موجب شد. این سه جمله حقیقی- طبیعی- واقعی در دهه ۳۰ میلادی به اصل عدم قطعیت منتهی شد: با توجه به چالش شکاکیت – استقراگرایی- فرااستقراگرایی – ابطال گرایی – قیاس ناپذیری و انقلاب علمی و نظریه پارادایم‌ها باتوجه به این‌که واسطه فضا- بعد- میدان در رابطه آن‌چه حقیقی است با آن‌چه طبیعی است و آن‌چه واقعی است تغییر کرده و پیچیدگی محیط و حیات انسانی را موجب شده است ایده این نوشتار تقارن فراکتال در توضیح رابطه فوق می‌باشد. ''ملاحظات معرفت شناختی ما را ترغیب می‌کند که واقع گرا باشیم: نسبت به چه چیزی واقع گرا باشیم؟ رویکرد نیوتنی هستی‌شناسی ذرات نقطه‌ای و نیروهای کنش‌گر را از راه دور مطرح می‌کرد. رویکرد نظریهٔ میدانی هستی شناسی کنش از طریق تماس که منطبق با اصل علیت موضعی است را پیشنهاد می‌کند اما هویت جدیدی یعنی میدان را مفروض می‌گیرد. رویکرد فضا-زمان خمیده تصویر دیگری را ارائه می‌کند که در آن فضا-زمان خود جزئی از هستی شناسی بنیادین نظریه است و تأثیر علمی خاص خود را داراست. این مکانیک تحلیلی نوعی غایت شناسی برای رفتار ذره نیاز دارد'' [۴، ۱۳۹۳: ۳۱۶]. به این ترتیب رازگرایی اعداد با توجه به خلاقیت گودل در فضا-زمان در اصل بازگشتی به غایت شناسی پیوند می‌یابد اما همچنان تصمیم ناپذیر- نامحدود- بی‌نهایت- متعالی- ترامتناهی- نامتناهی و از بنیاد ناتمام است. اما اصل بازگشتی و وارون خود نیازمند مقاله دیگر است. بر اساس معرفت شناسی مزبور تقارن فرکتال جهان را پیچیده‌تر می‌یابد. محاسبات پیچیده و جهان پیچیده بر اساس اصل بازگشتی غایت شناسی ذره در فضا-زمان اما استقرای ارسطویی و رازگرایی اعداد این بار مرجعش در پیچیدگی و داده کاوی های ناشماراست. به‌عبارتی تاریخ ۲هزارسالهٔ ریاضیات از دهه ۱۹۳۰ با مسئله تصمیم ناپذیر دوباره روبرو گشته و در فاصله ۱۰۰ سال پیش رو یعنی سال ۲۰۲۰ کنونی همچنان مسئله غایت شناسی و رازگرایی در پیچیدگی‌اش مسئله مهم کنونی است. اصل عدم قطعیت چگونه با غایت شناسی پیوند می‌خورد؟ در تغییر نحو زبان در رابطه اصل – سازگاری- اثبات و مسئله تصدیق.

تغییر نحو زبان در خصوص ''اثبات پذیری'' در محمول اثبات پذیری، توسط گودل صورت گرفت[۵]. استفاده از نماد به‌جای عدد، اثبات‌ناپذیری سازگاری در نظریه اعداد عبارت ۱-۰ تحت عنوان یک کد مطرح شد. به‌عبارتی با معرفی توابع بازگشتی اولیه قضیه ناتمامیت گودل که منجر به ساخت رایانه‌های امروزی گردید دستاوردهای شگرفی در نظریه کدگذاری و معرف الف- صفر در محاسبات ترامتناهی در بازه (۰, ۱) و آنالیز حدی حاصل شد. اگر مسئله پیوستار کانتور و قضیه ناتمامیت گودل بر اساس تغییر نحو زبان در مقوله اثبات پذیری و تصدیق در سازگاری به تقارنی در فضا- زمان پیوستار در تناظر جهان اینترنت و واقعی منتهی شد، امروزه فرار ریاضیات گودل و پیوستار کانتور در رابطه شئ و عدد و گرفتاری‌های مجموعه اعداد قابلیت‌های جدید هوش انسانی در داده کاوی و آنالیز محاسباتی را ایجاد کرده است. در واقع آن‌چه تصمیم‌ناپذیر در ریاضیات بود به‌واسطه ''تقارن '' در فضا- بعد – زمان – ترانامتناهی به ایجاد جهان ممکن دیگری برای حیات انسانی منتهی شد. بنابراین تصمیم‌ناپذیر خود یک جهان ممکن دیگری شد که البته به واسطه ویژگی تصمیم ناپذیر هنوز مسئله‌برانگیز است. ایده فوق پاسخ خود را در تقارن فراکتال می‌یابد.

ایده :

تقارن چیست؟ اگر سیستم دارای خاصیتی باشد که تحت تبدیل خاصی تغییر نکند بدان معنی است که سیستم دارای تقارنی متناظر با آن ویژگی است. در محاسبه رویداد با توجه به شکل گروهی آن و مولفه های ثابت ساختاری، قواعد جابه‌جایی ثابت‌های ساختاری، این رویدادها با رویداد دیگر در سیستم ''تقارن'' رویدادها را ایجاد می‌کند [۱]. در فیزیک و ریاضیات ویژگی سیستم را که تحت یک تبدیل تغییر نکند ناوردا یا تغییرناپذیر می‌نامیم. به طور کلی ایده تقارن در تغییر نحو بیان اصل سازگاری می‌تواند نشان دهد که در قضیه و به‌کارگیری اصل کدام خاصیت مهم شئ ثابت می‌ماند و قضیه را دارای سازگاری نشان می‌دهد.

اصل قضیه:

در دسته بندی تقارن‌ها به آشکار و ضمنی با توجه به ساختار قضیه و کلیت مسئله که معطوف به حل مساله است می‌تواند آن خاصیتی را که این قضیه را در ساختار و کلیتش با موضوع دارای ساخت می‌کند در وجه سازگاری به عنوان نوعی اثبات به‌کار برد. متقارن است زیرا با تعویض متغیرها تغییر نمی‌کند پس اگر در ناتمامیت گودل با تعویض متغیر دستگاه دارای سازگاری خود را نشان دهد نسبت به آن متغیر دارای وجه اثبات است. این ویژگی

که چگونه گزاره نه اثبات‌پذیر است نه اثبات‌ناپذیر و نمی‌تواند خود را در سازگاری اثبات کند می‌تواند به واسطه این گزاره توضیح داده شود که اگر در تغییر اصل و تعویض آن بدون تغییر بماند این خود نوعی اثبات خود در قضیه است و از تسلسل اثبات خود در خود راهی به ارائه راه حل باز می‌کند. کافیست در جانشینی متغیر مسئله تبدیل و یا تغییر را بگذاریم اگر جای آن گزاره تغییر اتفاق نیفتد می‌تواند راهی برای تصدیق خود باشد.

به‌عنوان مثال:

در تقارن فراکتالی که می‌توان به کانتور و فراکتال مندلبرت (۲۰۱۰-۱۹۲۴- پدر هندسه فراکتال) اشاره داشت [۸]، کلیت قضیه در سیاق برهان و استنتاجات آن نسبت به موضوع در عدم تغییر و تعویض اصل به قوت خود باقی باشد و خاصیت خود را حفظ کرده است. منظور از خاصیت اصل در قضیه چیست؟ در تبدیل A به B و در تبدیل B به A تغییر حاصله در قضیه نه اثبات که بدون تغییر باشد. این خاصیت وارد کردن فضا و بعد در ناتمامیت قضیه گودل است. اما در مجموعه گروه‌های نامتناهی یک خاصیت وجود دارد. مجموعه توابع وارون آن در روی هر مجموعه می‌توانیم نگاه کنیم. تابع (صفر و ۱) مجموعه توابع وارون روی (۱-۰) است.

به‌عبارتی معروف‌ترین میدان میدان اعداد حقیقی است حال اگر در عمل ضرب و جمع در هر مجموعه‌ای از اشیاء همان خواص این مجموعه را مشابه داشته باشد در تغییر و یا در عدم تغییر جابه‌جایی صورت نگیرد ما را به بحث میدان می‌رساند. میدان مجموعه‌هایی از اعداد حقیقی – اعداد گویا و اعداد مختلط نمونه‌هایی از میدان هستند. نمادها به‌عنوان مثال آن‌چه گودل آن‌را صفر الف می‌نامید در خاصیت شرکت‌پذیری در تغییر چندجمله‌ای مشارکت دارد اما جابه‌جا نمی‌شود و حداقل خاصیت تشابه خود را حفظ می‌کند. اگر مجموعهٔ تغییرات در طول پاره خط بی‌نهایت جابه‌جایی داشته باشد بدون تغییر در تقارن فراکتالی مسئله اثبات را با فضای جدید تشابهات (این همان نیست و البته خاصیت تشابه را دارد) پس متقارن می‌کند.

در نظریه گروه در کلی‌ترین تعریف از معنای تقارن گفته می‌شود بعضی خواص یک دستگاه تحت اثر مجموعه معینی از اعمال تغییر نکند. در نظر نگرفتن خاصیت شئ و استفاده از خود شئ به جای خاصیت اصل در قضیه می‌تواند در سازگاری مادامی که جایگشت‌ها تغییر ایجاد نکند قضیه را تصدیق‌پذیر نماید. اگر در نظریه مجموعه‌های نامتناهی هر عضو مجموعه خاصیت در زیرمجموعه‌ها را در کلیت نامتناهی دارای تشابه نشان دهد آن‌گاه در علوم کامپیوتر الف صفر فضای کلیت ساز ساخت فضای مجازی است. در واقع اگر بی‌نهایت نقطه روی یک پاره خط را جابه‌جا کنیم تغییر در بی‌نهایت اتفاق نمی‌افتد و این بدون تغییر است. جابه‌جایی نقطه‌های بی‌نهایت یک پاره خط در کلیت آن بدون تغییر است پس می‌توان در ترامتناهی کلیت را تصدیق کرد چون با تغییر بی‌نهایت عضو مجموعه تغییر در ترامتناهی اتفاق نمی‌افتد و در این خصوصیت در گروه تغییرات حادث شده ترامتناهی مداماً متناهی می‌شود. تقارن فراکتالی و نظریه گره در هم‌ارزی دو مجموعه اعداد با خاصیت ناتمامیت تقارن را در نحو سازگاری می‌شاند و جهان ممکن دیگری برای حیات انسانی ایجاد می‌کند. در عدم تغییر نظریه گره به ما کمک می‌کند: در شرکت پذیری عدم تغییر با بدون از هم پاشیدگی و در هم‌ارزی دو گره اتفاق می‌افتد. یعنی اگر اصل در قضیه اثبات پذیر نبود و نقیض آن هم اثبات پذیر نبود آن‌گاه این دو گره هم ارز یکدیگر نبودند می‌توان گفت عدم اثبات‌پذیری و نقیض دو گره هم‌ارز نیستند. این خصوصیت جایگشتی در ترامتناهی وجود دارد که ترامتناهی نسبت به عضوهای متناهی اعداد صحیح هم از خاصیت گروه سازی و متناهی کردن مجموعه‌ها بدون واقع شدن گره‌های هم‌ارزی برخوردار است. هنگامی‌که برای نقطه بعد را در نظر گرفتیم وقتی بعد خطی پاره خط دو برابر شود طول خط دو برابر می‌شود اما اگر بی‌نهایت نقطه را در پاره خط جابه جا کنیم طول پاره خط بدون تغییر است. این تقارن می‌تواند مبنای بحث‌های علوم رایانه قرار گیرد. نتیجه : به‌عبارتی بعد فراکتال بررسی میزان پیچیدگی بین داده‌هاست برخلاف بعد اقلیدسی که یک عدد طبیعی است و تغییرات مجموعه‌های ترامتناهی صرفا پیچیدگی بین داده‌هاست که کلیت آن‌ها را تحت عنوان ناتمامیت آن‌ها مطرح می‌کند. به‌عبارتی جابه‌جایی نقاط در پاره خط و یا داده کاوی و آنالیزهای حدی ترامتناهی‌ها می‌تواند پیچیده تر شود اما آیا این عدم تغییر در جابه‌جایی خود نوعی تغییر است. به نظر می‌رسد تقارن فضا- زمان – بعد در ناتمامیت گودل با خاصیت ترامتناهی ها منجر به شکل‌گیری جهان ممکن مجازی گردید اما آیا سرعت این جابه‌جایی قابل قیاس با سرعت جابه‌جایی در نظام دانش قرن نوزده و قرن بیست خواهد بود. تقارن‌ها صرفاً در مسئله پارادایم به گره‌های هم ارز گروه‌های مرجع بستگی دارد و امکان فهم تبدیل‌ها و پاسخ‌های ایشان به مسئله در تقارن بدون پاره کردن گره و حل مسئله خود

نظام بعدی را پیش می‌برد و ممکن است بتوانیم بگوییم که جابه‌جایی‌های بدون تغییر که پیچیده شدن ذهن و زمانه زندگی است همچنان ما را در زمان و مکان با مسائل جدیدی مواجه می‌کند. این دریافت از مکان و زمان در قالب پیکرمندی یک دوران تلقی دیگری از زمان را ایجاد می‌کند. این نتیجه که زمان یک تداوم و دیرند نیست. اما اگر تغییرناپذیری زمان را در جابه‌جایی بی‌نهایت نقطه در پاره خط با طول معین در نظر بگیریم آن‌گاه زمان انعکاس و دوران تقارن‌ها و چرخش‌های بدون بازتاب در دیرند خود است. این همان سیاق و static و سبک یک Style از زندگی در فراکتال‌های مختلف است. نتیجه: فضای مجازی به مثابه یک سبک و Style برگرفته از تصمیم‌ناپذیری ترامتناهی با تغییر نحو اصل سازگاری با تقارن فراکتال در یک قضیه می‌تواند دریچه‌ای به سوی یک جهان پیچیده متقارن با داده کاوی‌های بزرگ باشد. آیا در این‌جا تصمیم ناپذیری پاسخ گرفته است؟

مراجع

۱. ج. آرفکن، ه. جی. وبر، روش‌های ریاضی در فیریک، ترجمه اعظم پورقاضی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ هفتم ۱۳۹۸.

۲. ه. د. ایوز، آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمه دکتر قاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی جلد اول ویرایش دوم، چاپ هشتم ۱۳۸۵.

۳. م. کلاین، نقش ریاضیات در فرهنگ غرب، ترجمه محمد دانش، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران ۱۳۸۸.

۴. ج. لیدیمن، فلسفه علم، ترجمه حسین کرمی، نشر حکمت، ۱۳۹۰.

۵. ن. ا. نیومن، برهان گودل و حقیقت برهان، ترجمه دکتر محمد اردشیر، انتشارات مولی، چاپ اول ۱۳۶۴.

۶. ب. نشواذیان بخش، نظریه مقدماتی اعداد، انتشارات دانشگاه اراک، ۱۳۹۶.

7. E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, 6nd ed., CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.

8. L. Seuront, *OBITUARY Benoît B. Mandelbrot (1924-2010)*, J. Plankton Res. **33** (6) (2011) 983–988.

پست الکترونیکی: amirifard.parisa@gmail.com

پست الکترونیکی: a-nazari@araku.ac.ir

ارائه‌های پوستری

جبر

تشخیص‌پذیری گروه‌های ساده $O_8^-(5)$ و $O_8^-(8)$ توسط بزرگ‌ترین مرتبه عضوهایشان

معصومه بی باک
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران
و پردیس رمضانی*
گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

چکیده. فرض کنید G یک گروه متناهی و $k(G)$ بزرگترین مرتبه عضوهای G باشد. در این مقاله نشان می‌دهیم که اگر M یکی از گروه‌های $O_8^-(5)$ یا $O_8^-(8)$ باشد به‌طوری که $|G| = |M|$ و $k(G) = k(M)$، آنگاه $G \cong M$.

واژه‌های کلیدی: گروه ساده، تشخیص‌پذیری، بزرگترین مرتبه عناصر گروه.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید G یک گروه متناهی و $\pi_e(G)$ که طیف گروه نیز نامیده می‌شود مجموعه مرتبه‌های عناصر G باشد. در سال ۱۹۸۷ شی حدسی مبنی بر تشخیص‌پذیری گروه متناهی G با استفاده از مرتبه گروه و طیفش را به‌صورت زیر مطرح کرد:

حدس شی: فرض کنید G یک گروه متناهی و M یک گروه ساده متناهی باشد، در این‌صورت $G \cong M$ اگر و تنها اگر $|G| = |M|$ و $\pi_e(G) = \pi_e(M)$.

این حدس در مجموعه‌ای از مقالات و توسط ریاضی‌دانانی با ملیت‌های گوناگون به اثبات رسید. آخرین این مقالات توسط واسیلیف، گرچکوسیوا و مازوروف در سال ۲۰۰۹ [۸] به چاپ رسید که در آن نویسندگان اتمام مساله را گزارش کردند. در سال ۲۰۰۹، هی و چن تلاش کردند که با جایگزین کردن بزرگترین مرتبه عناصر گروه G به جای طیف آن، نوع دیگری از تشخیص‌پذیری را معرفی کنند. گروه متناهی G توسط $k(G)$ و مرتبه‌اش تشخیص‌پذیر است، هرگاه به ازای هر گروه متناهی H که $|G| = |H|$ و $k(G) = k(H)$ نتیجه شود $G \cong H$. آن‌ها در [۴، ۵، ۶، ۷] نشان دادند که K_3-گروه‌های ساده، برخی از K_4-گروه‌های ساده، گروه‌های ساده پراکنده و تعدادی از گروه‌های خطی تصویری خاص از بعد ۲ توسط مرتبه گروه و بزرگترین مرتبه عضوهایشان تشخیص‌پذیر هستند. در این مقاله نشان می‌دهیم که گروه‌های ساده $O_8^-(5)$ و $O_8^-(8)$ تشخیص‌پذیر هستند.

۲. لم‌های مقدماتی

هدف این بخش ارائه نتایجی است که با استفاده از آن‌ها به اثبات نتیجه اصلی این مقاله می‌پردازیم.

لم ۱.۲. [۱] فرض کنید $n \geq 4$ و q توانی از عدد اول فرد p باشد. همچنین فرض کنید $d = (4, q^n + 1)$، $c = \frac{d}{2}$ و $O = O_8^-(q)$. در این‌صورت $\pi_e(O)$ شامل اعداد زیر است:

۱) $\frac{(q^n+1)}{d}$؛

۲) $\frac{[q^{n_1}-\delta, q^{n_2}+\delta]}{e}$ به‌طوری‌که $\delta \in \{+,-\}$، $n_1, n_2 > 0$ و $n_1 + n_2 = n$. همچنین $e = 2$، اگر $(q^{n_1} - \delta)_2 = (q^{n_2}\delta)_2$ و در غیر این‌صورت $e = 1$؛

۳) $[q^{n_1}-\delta_1, q^{n_2}-\delta_2, \ldots, q^{n_s}-\delta_s]$ به‌طوری‌که $s \geq 3$، $\delta \in \{+,-\}$، $n_i > 0$ و برای هر $1 \leq i \leq s$، $n_1 + \cdots + n_s = n$ و $\delta_1\delta_2 \ldots \delta_s = e$؛

۴) $[q \pm 1, \frac{(q^{n-2}+1)}{2}]p$؛

۵) $[q \pm 1, q^{n_1} - \delta_1, q^{n_2} - \delta_2, \ldots, q^{n_s} - \delta_s]p$ به‌طوری‌که $s \geq 2$، $\delta \in \{+,-\}$، $n_i > 0$ و برای هر

* ارائه‌دهنده

$\delta_1\delta_2\dots\delta_s = e$ و $n_1+\cdots+n_s = n-2$، $1 \le i \le s$؛
۶) $p^l \frac{(q^{n_1}\pm 1)}{3}$ به‌طوری‌که $l>0$، $p^{l-1}+3+2n_1 = 2n$؛
۷) $p^L[q^{n_1}\pm 1,\dots,q^{n_s}\pm 1]$ به‌طوری‌که $l>0$، $s\ge 2$، $n_i>0$ و برای هر $1\le i\le s$ و

$$p^{l-1}+3+2(n_1+n_2+\cdots+n_s) = 2n.$$

۸) p^l اگر $2n = p^{l-1}+3$ برای $l>0$.

لم ۲.۲. [۱] فرض کنید $O = O^{\epsilon}_{2n}(q)$ که q یک عدد زوج، $n\ge 4$ و $\epsilon\in\{+,-\}$. در این‌صورت $\pi_e(O)$ شامل اعداد زیر است:
۱) $[q^{n_1}\pm\tau_1, q^{n_2}\pm\tau_2,\dots,q^{n_s}\pm\tau_s]$ به‌طوری‌که $s>1$، $\tau_i\in\{+,-\}$، $n_i>0$ برای هر $1\le i\le s$، $n_1+\cdots+n_s = n$ و $\tau_1\tau_2\dots\tau_s = \epsilon$؛
۲) $p[q\pm 1, \frac{q^{n-2}+1}{2}]$؛
۳) $p[q\pm 1, q^{n_1}-\delta_1, q^{n_2}-\delta_2,\dots,q^{n_s}-\delta_s]$ به‌طوری‌که $s\ge 2$، $\delta\in\{+,-\}$، $n_i>0$ و برای هر $1\le i\le s$، $n_1+\cdots+n_s = n$ و $\delta_1\delta_2\dots\delta_s = e$؛
۴) $p^l \frac{(q^{n_1}\pm 1)}{3}$ به‌طوری‌که $l>0$، $p^{l-1}+3+2n_1 = 2n$؛
۵) $p^L[q^{n_1}\pm 1,\dots,q^{n_s}\pm 1]$ به‌طوری‌که $l>0$، $s\ge 2$، $n_i>0$ و برای هر $1\le i\le s$ و

$$p^{l-1}+3+2(n_1+n_2+\cdots+n_s) = 2n.$$

۶) p^l اگر $2n = p^{l-1}+3$ برای $l>0$.

لم ۳.۲. [۲] فرض کنید G یک گروه فروبنیوس با هسته K و متمم H باشد. در این‌صورت
۱) $\Gamma(G) = \{\pi(H),\pi(K)\}$ و $t(G)=2$؛
۲) $|H||K|-1$ به‌ویژه $(|G:K|,|K|) = 1$؛
۳) K پوچ‌توان است.

تعریف ۴.۲. گروه G را یک ۲-فروبنیوس گروه گوییم، هرگاه G سری نرمال $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ را داشته باشد به‌طوری‌که K و $\frac{G}{H}$ گروه‌های فروبنیوس با هسته H و $\frac{K}{H}$ باشند.

لم ۵.۲. [۱] فرض کنید G یک ۲-فروبنیوس گروه با شرایط موجود در تعریف بالا باشد، در این‌صورت
۱) $t(G)=2$، $\pi(H)\cup\pi(\frac{K}{H}) = \pi_1(G)$ و $\pi(\frac{K}{H}) = \pi_2(G)$؛
۲) H یک π_1 گروه پوچ‌توان، $\frac{G}{K}$ و $\frac{K}{H}$ گروه‌های دوری هستند و $|\frac{G}{K}||\mathrm{Aut}(\frac{K}{H})|$؛
۳) G حل‌پذیر است.

لم ۶.۲. [۹] فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $t(G)>1$، در این‌صورت یکی از شرایط زیر برقرار است:
۱) G یک گروه فروبنیوس یا ۲-فروبنیوس گروه است.
۲) G سری نرمال $1\trianglelefteq H\trianglelefteq K\trianglelefteq G$ را دارد به‌طوری‌که H یک π_1- گروه پوچ‌توان، $\frac{K}{H}$ یک گروه ساده ناآبلی و $\frac{G}{K}$ یک π_1-گروه است که $|\frac{G}{K}||\mathrm{Out}(\frac{K}{H})|$. همچنین هر مؤلفه فرد G یک مؤلفه فرد $\frac{K}{H}$ نیز است.

لم ۷.۲. [۳] فرض کنید G یک گروه متناهی، $r\in\pi(G)$ و N یک زیرگروه نرمال G از مرتبه p^n به ازای $n\ge 1$ باشد به‌طوری‌که $(r,|\mathrm{Aut}(N)|) = 1$، در این‌صورت G عضوی از مرتبه $p\cdot r$ دارد.

۳. احکام اصلی

در این بخش به اثبات نتیجه اصلی این مقاله که در چکیده به آن اشاره شد، می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد به‌طوری‌که $|G| = |M|$ و $k(G) = k(M)$ که M یکی از گروه‌های ساده $O_8^-(5)$ یا $O_8^-(8)$ باشد، در این‌صورت $G\cong M$.

اثبات. الف) فرض کنید $M = O_8^-(5)$. در این‌صورت از لم ۱.۱ نتیجه می‌شود که $k(O_8^-(5)) = 390$. چون

$$|G| = |O_8^-(5)| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^{12} \cdot 7 \cdot 13.31.313$$

و $k(G) = k(O_8^-(5)) = 390$. لذا ۳۱۳ یک نقطه تنها در گراف $\Gamma(G)$ است و در نتیجه $t(G) \geq 2$.
اکنون نشان می‌دهیم که G نه یک گروه فروبنیوس و نه یک ۲- فروبنیوس گروه است.
ابتدا فرض کنید G یک گروه فروبنیوس با هسته K و مکمل H باشد، در این‌صورت بنابر لم ۱.۳ نتیجه می‌شود که $t(G) = 2$ و $\Gamma(G) = \{\pi(H), \pi(K)\}$. چون $|H||K| - 1$ لذا $|K| < |H|$ و در نتیجه $|K| = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^{12} \cdot 7.13.31$ و $|H| = 313$. حال فرض کنید $K_{13} \in Syl_{13}(K)$ در این‌صورت از پوچ‌توانی K نتیجه می‌شود که $K_{13} \trianglelefteq G$. چون G عضوی از مرتبه $313 \cdot 13$ ندارد نتیجه می‌گیریم H روی K_{13} بدون نقطه ثابت عمل می‌کند و لذا HK_{13} یک گروه فروبنیوس با هسته‌ی K_{13} است. لذا بنابر لم ۲.۳، $|H||K_{13}| - 1$ یعنی $313|13 - 1$ که تناقض است.
فرض کنید G یک ۲-فروبنیوس گروه باشد. در این‌صورت بنابر لم ۲.۵ نتیجه می‌شود که G سری نرمال $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ را دارد به‌طوری‌که $\pi(H) \cup \pi(\frac{G}{K}) = \pi_1(G)$ و $\pi(\frac{K}{H}) = \pi_2(G)$ و $|\frac{G}{K}|||\mathrm{Aut}(\frac{K}{H})|$. چون ۳۱۳ یک نقطه تنها در $\Gamma(G)$ است لذا $|\frac{K}{H}| = 313$. حال با توجه به این‌که $|\frac{G}{K}|||\mathrm{Aut}(\frac{K}{H})|$ نتیجه می‌گیریم که $|\frac{G}{K}||312 = 2^3.3.13$ و لذا $31 \in \pi(H)$. فرض کنید $H_{31} \in Syl_{31}(H)$ در این‌صورت از پوچ‌توانی H نتیجه می‌شود که $H_{31} \trianglelefteq G$. چون $(313, |\mathrm{Aut}(H_{31})|) = 1$ لذا بنابر لم ۲.۶ نتیجه می‌شود که $313.13 \in \pi_e(G)$ که تناقض است، پس G نه فروبینیوس گروه و نه ۲-فروبنیوس گروه است.
لذا طبق لم ۲.۶، نتیجه می‌شود که G سری نرمال $1 \trianglelefteq H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ را دارد به‌طوری‌که H یک π_1- گروه پوچ توان، $\frac{K}{H}$ یک گروه ساده ناآبلی و $\frac{G}{K}$ یک π_1 گروه است به‌طوری‌که $|\frac{G}{K}|||\mathrm{Out}(\frac{K}{H})|$. همچنین هر مؤلفه فرد G یک مؤلفه فرد $\frac{K}{H}$ نیز هست . بنابراین $313 \in \pi(\frac{K}{H})$. اکنون با استفاده از جدول ۱ نتیجه می‌شود که $\frac{K}{H}$ با گروه $L_2(5^4)$ یا $O_8^-(5)$ یکریخت است.
اگر $\frac{K}{H}$ با گروه $L_2(5^4)$ یکریخت باشد، آن‌گاه چون $|\frac{G}{K}|||\mathrm{Out}(\frac{K}{H})|$ و $\pi(\mathrm{Out}(\frac{K}{H})) \subseteq \{2, 3\}$ نتیجه می‌شود که $13||H|$. چون $(313, |\mathrm{Aut}(H_{31})|) = 1$ لذا بنابر لم ۲.۶، G عضوی از مرتبه 13.313 دارد که تناقض است.
بنابراین $\frac{K}{H}$ با $O_8^-(5)$ یکریخت است. چون $|O_8^-(5)| = |G|$، لذا $H = 1$ و در نتیجه $G \cong O_8^-(5)$.
ب) فرض کنید $M = O_8^-(8)$. در این‌صورت از لم ۱.۱ نتیجه می‌شود که $k(O_8^-(8)) = 4599$. چون

$$|G| = |O_8^-(8)| = 2^{36} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7^3 \cdot 13.17.19.73.241$$

و $k(G) = k(O_8^-(8)) = 4599$، لذا $73 \cdot 241 \notin \pi_e(G)$.
فرض کنید K بزرگترین زیرگروه نرمال حل‌پذیر G باشد، در این‌صورت K یک $\{73, 241\}'$- گروه است. قراردهید $\bar{G} = \frac{G}{K}$ و $S := Soc(\bar{G})$، لذا $S = P_1 \times \cdots \times P_m$ به‌طوری‌که P_iها گروه‌های ساده ناآبلی هستند. از آن جایی‌که

$$\pi(P_i) \subseteq \pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 73, 241\}$$

لذا از جدول ۱ در مرجع [۱۰] نتیجه می‌شود که P_i با یکی از گروه‌های ساده زیر یکریخت است:

$$\mathbb{A}_n, 5 \leq n \leq 9, U_4(2), L_2(7), L_2(8), U_3(2), L_3(4), U_4(3), S_6(2), L_3(3), L_4(3), L_2(13),$$
$$L_2(27), G_2(3), Sz(2^3), L_2(2^6), L_3(9), L_2(19), U_3(8), L_2(17), L_2(16), O_8^-(2), J_3, U_4(8),$$
$$L_3(8), O_8^-(8), L_4(8), S_8(8), U_4(4), L_2(2^9), L_2(3^6), L_2(64), L_2(2^{12}),$$

حال با توجه به این که $S \leq \bar{G} \leq \mathrm{Aut}(S)$، K یک $\{73, 241\}'$- گروه است. نتیجه می‌شود که

$$\{73, 241\} \subseteq \pi(\bar{G}) \subseteq \pi(\mathrm{Aut}(S)).$$

اینک ادعا می‌کنیم که $\{p,r\} = \{۷۳, ۲۴۱\} \subseteq \pi(S)$. فرض کنیم چنین نباشد و $r \notin \pi(S)$. در این‌صورت $r \in \pi(\mathrm{Out}(S))$. اما $\mathrm{Out}(S) = \mathrm{Out}(S_۱) \times \mathrm{Out}(S_۲) \times \cdots \times \mathrm{Out}(S_k)$ به‌طوری‌که S_j ها حاصل‌ضرب مستقیم P_iهای یکریخت هستند. لذا برای یک j که $۱ \leq j \leq k$، باید $r \mid |\mathrm{Out(S_j)}|$. اگر S_j حاصل‌ضرب مستقیم t گروه ساده یکریخت با P_i باشد، آنگاه $|\mathrm{Out(S_j)}| = |\mathrm{Out(P_i)}|^t \cdot t!$. لذا $t \geq r \geq ۷۳$ و در نتیجه $۲^{۱۴۶}$ باید شمارنده $|G|$ باشد که تناقض است. بنابراین $\{۷۳, ۲۴۱\} \subseteq \pi(S)$ و چون $|G| = ۲^{۳۶} \cdot ۳^{۷} \cdot ۵. \cdot ۷^{۳} \cdot ۱۳.۱۷.۱۹.۷۳.۲۴۱$ لذا با استفاده از جدول ۱ مرجع [۱۰] داریم $S \cong O_۸^+(۸)$. در نتیجه $O_۸^-(۸) \leq \bar{G} \leq \mathrm{Aut}(O_۸^-(۸))$. اما طبق فرض $|G| = |O_۸^-(۸)|$ لذا $K = ۱$ و در نتیجه $G \cong O_۸^-(۸)$. □

جدول ۱. مرتبه برخی از گروه‌های ساده S به‌طوری‌که $۳۱۳ \in \pi(S)$.

S	$\lvert S\rvert$	$\lvert Out(S)\rvert$
$L_۴(۲۵)$	$۲^۹ \cdot ۳^۴ \cdot ۵^{۱۲}.۷.۱۳^۲.۳۱.۳۱۳$	۸
$L_۳(۳۱۳)$	$۲^۷ \cdot ۳^۴ \cdot ۱۳^۲ \cdot ۱۵۷.۱۸۱^۲.۳۱۳^۳$	۶
$L_۴(۳۱۳)$	$۲^{۱۳} \cdot ۳^۴ \cdot ۵ \cdot ۱۳^۳.۹۷.۱۰۱.۱۵۷^۲.۱۸۱^۲.۳۱۳^۶$	۴
$L_۲(۵^۴)$	$۲^۶ \cdot ۳ \cdot ۵^۴.۱۳.۳۱۳$	۶۴
$L_۲(۳۱۳^۲)$	$۲^۶ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot ۱۳.۹۷.۱۰۱.۱۵۷.۳۱۳^۲$	۸
$O_۹(۵)$	$۲^۲ \cdot ۵^{۸۸} \cdot ۷.۱۳.۱۷.۴۱^۲.۷۳.۱۹۳$	۲
$O_{۱۰}^+(۵)$	$۲^{۱۹} \cdot ۳^۶ \cdot ۵^{۹۰}.۷ \cdot ۱۱.۱۳^۲.۳۱.۷۱.۳۱۳.۵۲۱$	۲
${}^۳D_۴(۲۹)$	$۲^۶ \cdot ۳^۴ \cdot ۵^۲ \cdot ۷^۲.۱۳^۲.۲۹^{۱۲}.۳۷.۶۱.۶۷^۲.۲۷۱^۲.۳۱۳$	۱
$S_۴(۲۵)$	$۲^۹ \cdot ۳^۲ \cdot ۵^۸ \cdot ۱۳^۲ \cdot ۳۱۳$	۴
$S_۴(۳۱۳)$	$۲^۹ \cdot ۳^۲.۵ \cdot ۱۳ \cdot ۹۷.۱۰۱.۱۵۷^۲.۳۱۳^۴$	۲
$S_۸(۵)$	$۲^{۱۵} \cdot ۳۵ \cdot ۵^۴.۷ \cdot ۱۳^۲.۳۱.۳۱۳$	۲

مراجع

1. A. A. Buturlakin, *Spectra of finite symplectic and orthogonal groups*, Siborian Adr. Math. **21** (3) (2011) 176.
2. G. Y. Chen, *On structure of Frobenius groups and 2-Frobenius groups* (in Chinese), J. Southwest China Norm. Univ. (Nat. Sci.) **20** (5) (1995) 485–487.
3. Y. Chen, G. Chem and J. Li, *Recognizing simple K_4-groups by few special conjugacy class sizes*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. **38** (1) (2015) 51–72.
4. L. G. He and G. Y. Chen, *A new characterization of $L_2(q)$ where $q = p^n < 125$*, Ital. J. Pure Appl. Math. **28** (2011) 127–136.
5. L. G. He and G. Y. Chen, *A new characterization of simple K_3-group*, Comm. Algebra **40** (10) (2012) 3903–3911.
6. L. G. He and G. Y. Chen, *A new characterization of some simple groups*, Ital. J. Pure Appl. Math. **30** (2013) 373–392.
7. L. G. He and G. Y. Chen, *A new characterization of simple K_4-groups with type $L_2(p)$*, Adv. Math. (China) **43** (5) (2014) 667–670.
8. A. V. Vaselev, M. A. Grechkoseeva and V. D. Mazurov, *Characterization of the finite simple groups by spectrum and order*, Algebra Logic **48** (2009) 385–409.
9. J. S. Williams, *Prime graph componeents of finite groups*, J. Algebra **69** (1981) 487–513.
10. A. Zavarnitsin, *Finite groups with narrow prime spectrum*, Sib. Èlektron. Math. Izv. **6** (2009) 1–12.

پست الکترونیکی: m.bibak@pnu.ac.ir
پست الکترونیکی: pardisramezani14@yahoo.com

مطالبی درباره گروه‌های تمام

مریم سقالرزاده*
دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، دزفول، ایران
و امیر عصاری
دانشکده علوم پایه، دانشگاه صنعتی جندی شاپور دزفول، دزفول، ایران

چکیده. گروه‌های تمام ابتدا توسط دای در سال ۱۹۵۹ در [۴] تعریف شده و مورد مطالعه قرار گرفتند. در این مقاله مروری مختصر بر گروه‌های تمام از رابطه هم‌ارزی حافظ اندازه احتمال داریم. توپولوژی تعریف شده روی گروه‌های تمام را بیان کرده و قضیه‌هایی در ارتباط با خصوصیات توپولوژیکی گروه‌های تمام بیان می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: گروه‌تمام، رابطه هم‌ارزی مداری، رتبه توپولوژی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

فرض کنید X یک فضای بورل استاندارد و μ اندازه احتمال بورل غیراتمی روی X باشد، $Aut(X,\mu)$ گروه همه خودریختی‌های حافظ اندازه از (X,μ) را نشان می‌دهد. فضای بورل استاندارد را فضای احتمال استاندارد گویند اگر به اندازه احتمال غیر اتمی مجهز باشد.
هرگاه Γ، به‌عنوان گروهی شمارا، روی فضای احتمال استاندارد (X,μ) عمل کند، در این‌صورت رابطه هم‌ارزی مداری متناظر با آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R := \{(x,y) \in X : \exists \quad \gamma \in \Gamma \quad s.t \quad \gamma x = y\}.$$

به هر عمل از یک گروه Γ روی فضای احتمال استاندارد (X,μ) یک گروه متناظر می‌کنیم و آن را گروه تمام از رابطه هم‌ارزی حافظ اندازه احتمال می‌نامیم، که با $[R]$ نشان داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[R] := \{T \in Aut(X,\mu) : (x,T(x)) \in R \quad \forall \quad x \in X\}.$$

دو عمل $\Gamma \curvearrowright X$ و $G \curvearrowright Y$ را هم‌ارزی مداری گویند اگر $S \in Aut(X,\mu)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که تقریبا به‌ازای همه‌ی $x \in X$ داشته باشیم: $S(\Gamma.x) = G.S(x)$.

۲. قضایا و نتایج اصلی

فلدمن و مور در [۶] قضیه زیر را بیان و اثبات کرده‌اند:

قضیه ۱.۲. هر رابطه هم‌ارزی حافظ اندازه احتمال R از عمل حافظ اندازه $\Gamma \curvearrowright X$ که Γ گروهی شمارا است، رابطه هم‌ارزی مداری است.

دو عمل $\Gamma \curvearrowright X$ و $G \curvearrowright Y$ از گروه‌های شمارای حافظ اندازه، هم‌ارزی مداری است اگر رابطه‌های هم‌ارزی مداری آن‌ها یکریخت باشند.
دای با استفاده از گروه‌های تمام تعریف دیگری از هم‌ارزی مداری که به قضیه بازسازی دای معروف است ارائه می‌دهد و در آن بیان می‌کند دو عمل هم‌ارزی مداری هستند اگر و تنها اگر گروه‌های تمام آن‌ها در $Aut(X,\mu)$ مزدوج باشند:

* ارائه‌دهنده

قضیه ۲.۲. [۵] فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه تمام ارگودیک روی یک فضای احتمال استاندارد (X,μ) باشند، در این‌صورت برای هر یکریختی گروه $\Psi : G_1 \to G_2$، $S \in Aut(X,\mu)$ وجود دارد به‌طوری‌که به ازای همه $T \in G_1$ داریم: $\Psi(T) = STS^{-1}$.

یکی از مسائل اصلی در نظریه ارگودیک درک عمل‌های حافظ اندازه از یک گروه شمارا Γ روی فضای احتمال استاندارد (X,μ) است.
زیرگروه G از $Aut(X,\mu)$ ارگودیک است اگر و تنها اگر به ازای هر $A \subset X$ و $g \in G$ اگر $\mu(A\triangle gA) = 0$ آنگاه $\mu(A) = 0$ یا $\mu(A) = 1$.

قضیه ۳.۲. [۱] یک گروه تمام، ارگودیک است اگر و تنها اگر ساده باشد.

گزاره ۴.۲. [۸] یک گروه تمام به‌طور ضعیف در $Aut(X,\mu)$ چگال است اگر و تنها اگر ارگودیک باشد.

کیترل و سانکف در [۹] انگیزه‌ی اصلی از مطالعه‌ی گروه‌های تمام را بیان قضیه زیر عنوان کرده‌اند:

قضیه ۵.۲. فرض کنید R_1 و R_2 دو رابطه هم‌ارزی ارگودیک حافظ اندازه شمارا روی فضای احتمال استاندارد (X,μ) باشند، در این‌صورت موارد زیر معادل هستند:
(۱) R_1 و R_2 یکریخت هستند؛
(۲) $[R_1]$ و $[R_2]$ یکریخت هستند؛
(۳) $T \in Aut(X,\mu)$ وجود دارد به‌طوری‌که: $T[R_1]T^{-1} = [R_2]$.

قضیه ۵.۲ بیان می‌کند که ساختار جبری گروه‌های تمام، خصوصیات توپولوژیکی را یادآوری می‌کند. با توجه به مورد ۳ هر خودریختی جبری از گروه تمام ارگودیک یک همسان‌ریختی است. گروه‌های تمام به‌دلیل خصوصیات توپولوژیکی که دارند، مورد توجه قرار گرفتند.
کیترل و سانکف در ادامه [۹] قضیه زیر را بیان و اثبات کردند:

قضیه ۶.۲. فرض کنید R رابطه هم‌ارزی شمارای حافظ اندازه ارگودیک، روی فضای احتمال استاندارد (X,μ) باشد، در این‌صورت هر همریختی از $[R]$ به یک گروه تفکیک‌پذیر پیوسته است.

قضیه زیر توسط جوردانو و پستو در [۷] بیان شده است:

قضیه ۷.۲. فرض کنید R یک رابطه هم‌ارزی ارگودیک حافظ اندازه شمارا باشد، در این‌صورت $[R]$ ابرمتناهی است اگر و تنها اگر $[R]$ بی‌نهایت میانگین‌پذیر باشد.

یادآوری می‌کنیم یک گروه توپولوژی بی‌نهایت میانگین‌پذیر است اگر هر گاه به‌طور پیوسته روی یک فضای فشرده عمل کند، عمل یک نقطه ثابت داشته باشد.
از قضیه ۶.۲ و قضیه ۷.۲ نتیجه زیر به‌دست می‌آید:

نتیجه ۸.۲. فرض کنید R ارگودیک و ابرمتناهی باشد، در این‌صورت هر عمل از $[R]$ توسط همسان‌ریختی روی فضای مترپذیر فشرده یک نقطه ثابت دارد.

توپولوژی ضعیف و توپولوژی یکنواخت، دو توپولوژی معرفی شده توسط هالموس روی گروه $Aut(X,\mu)$ می‌باشند.
در توپولوژی ضعیف دنباله $(T_n)_n$ به T همگرا است اگر برای هر زیر مجموعه اندازه‌پذیر $A \subset X$ داشته باشیم:

$$\mu(T_n(A)\triangle T(A)) \to 0.$$

متریک یکنواخت d_u که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، توپولوژی یکنواخت را القا می‌کند:

$$d_u(T,S) := \mu(x \in X : Tx \neq Sx).$$

گروه‌تمام از رابطه هم‌ارزی حافظ اندازه احتمال، گروه تمامی است که در آن توپولوژی یکنواخت، لهستانی است:

گزاره ۹.۲. [۱] یک زیرگروه تمام $G \leq Aut(X,\mu)$ نسبت به توپولوژی یکنواخت لهستانی است اگر و تنها اگر G، گروه تمام از یک رابطه هم‌ارزی حافظ اندازه احتمال شمارا باشد.

$Aut(X,\mu)$، گروه تمام ارگودیک یکتا، مثالی دیگر از گروه‌های تمام است که در آن توپولوژی ضعیف، لهستانی است:

قضیه ۱۰.۲. [۱] گروه $Aut(X,\mu)$ گروه تمام ارگودیک یکتا است که در آن توپولوژی ضعیف، لهستانی است.

مایتر و کاردری در [۱] توپولوژی یکسانی برای همه‌ی گروه‌های تمام لهستانی بیان کرده‌اند و آن توپولوژی همگرایی در اندازه است که از توپولوژی ضعیف، ظریف‌تر و از توپولوژی یکنواخت، ضعیف‌تر است:

قضیه ۱۱.۲. فرض کنید G گروهی لهستانی باشد که به‌صورت بورل روی فضای احتمال استاندارد (X,μ) عمل می‌کند، در این‌صورت گروه تمام متناظر با آن برابر است با:

$$[R] := \{T \in Aut(X,\mu) : \forall \quad x \in X \quad , T(x) \in G.x\}.$$

گروه لهستانی برای توپولوژی همگرایی در اندازه است. به‌علاوه اگر G عمل، آزاد و حافظ اندازه باشد، در این‌صورت G در $[R]$ قرار دارد.

ویژگی دیگری از گروه‌های تمام محاسبه رتبه توپولوژی است. تعداد عضوهایی که نیاز است تا یک زیرگروه چگال $[R]$ را تولید کنند، رتبه توپولوژی گویند و با $t([R])$ نمایش داده می‌شود. چون گروه $[R]$ تفکیک‌پذیر است همواره داریم $t([R]) \leq \infty$ و اگر R غیربدیهی باشد داریم $t([R]) \geq ۲$.
اگر $\Gamma \leq [R]$ شمارا و چگال باشد در این‌صورت Γ باید R را تولید کند. (زیرا $[\Gamma]$ بسته است و با توجه به خاصیت چگال بودن $[\Gamma] = [R]$).

قضیه ۱۲.۲. [۹] فرض کنید R ابرمتناهی و ارگودیک باشد در این‌صورت: $t([R]) \leq ۳$.

قضیه ۱۲.۲ کران بالایی برای $t[R]$ به‌دست می‌دهد. (برای رابطه‌های هم‌ارزی ابر متناهی و ارگودیک)
مایتر و کاردری در [۲] قضیه زیر را به‌عنوان ابزار مهمی برای محاسبه رتبه توپولوژی از یک گروه تمام بیان می‌کنند:

قضیه ۱۳.۲. برای هر عمل حافظ اندازه از گروه لهستانی فشرده موضعی G، روی فضای احتمال (X,μ) و برای هر زیرگروه چگال $H \subset G$، گروه تمام $[R_H]$ در $[R_G]$ چگال است.

قضیه ۱۳.۲ برای عمل‌های کلی از گروه‌های لهستانی صحیح نیست. مثالی از کولموگرف در [۴] عملی حافظ اندازه از گروهی دو سویی از اعداد صحیح S را نشان می‌دهد به‌طوری‌که هرگاه $H \leq S$ یک گروه شمارای چگال باشد، گروه تمام $[R_H]$ در $[R_S]$ چگال نیست.
با استفاده از قضیه ۱۳.۲ می‌توانیم نشان دهیم که گروه‌های تمام مرتبط با عمل‌هایی از گروه‌های لهستانی ناگسسته و فشرده موضعی شامل یک زیرگروه ۲-مولد چگال است.

مراجع

1. A. Carderi and F. Le Maître, *More Polish full groups*, Topology Appl. **202** (2016) 80–105.
2. A. Carderi and F. Le Maître, *Orbit full groups for locally compact groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (4) (2018) 2321–2349.
3. A. I. Danilenko, *Point realization of Boolean actions of countable inductive limits of locally compact groups*, Mat. Fiz. Anal. Geom. **7** (1) (2000) 35–48.
4. H. A. Dye, *On groups of measure preserving transformations. I*, Amer. J. Math. **81** (1959) 119–159.
5. H. A. Dye, *On groups of measure preserving transformations. II*, Amer. J. Math. **85** (1963) 551–576.
6. J. Feldman and C. C. Moore, *Ergodic equivalence relations and von Neumann algebras .I*, Trans. Amer. Math. Soc. **234** (1977) 289–324.
7. T. Giordano and V. Pestov, *Some Extremely Amenable Groups Related to Operator Algebras and Ergodic Theory*, J. Inst. Math. Jussieu. **6** (2) (2007) 279–315.

8. A. S. Kechris, *Global aspects of ergodic group actions*,Vol. 160, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2010.
9. J. Kittrell and T. Tsankov, *Topological properties of full groups*, Ergodic Theory Dynam. Systems **30** (2) (2010) 525–545.

پست الکترونیکی: msagha424@gmail.com
پست الکترونیکی: amirassari@jsu.ac.ir

مهتری و ماتریس‌های خودمعکوس

یامین سیاری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران
و احمد محمدحسنی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

چکیده. در این مقاله ما مفهوم مهتری چپ و مهتری راست را برای مجموعه ماتریس‌های خودمعکوس مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌ایم همچنین برخی خواص ای نوع از مهتری را بیان کرده‌ایم. در ادامه ساختار نگهدارنده‌های خطی را مشخص کرده‌ایم که به‌وسیله گروه ماتریس‌های خودمعکوس ایجاد می شوند.
واژه‌های کلیدی: مهتری، ماتریس خودمعکوس، تبدیل نگهدارنده خطی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 15A04,15A21.

۱. مقدمه

فرض کنیم G یک گروه (نیم گروه) و X یک مجموعه باشد. گوییم G روی X یک عمل از چپ است اگر یک نگاشت مانند $\theta : G \times X \longrightarrow X$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) اگر e عضو همانی G باشد، آنگاه برای هر $x \in X$، $\theta(e, x) = x$.

(۲) اگر $g_1, g_2 \in G$، آنگاه برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x).$$

گروه G یک رابطه هم‌ارزی روی X به‌صورت زیر القا می‌کند:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = gy,\ \exists g \in G.$$

مدار نقطه $x \in X$ برابر با مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$O_G(x) = \{y \in X : y = gx, \exists g \in G\}.$$

سه تایی (θ, G, X) یک سیستم دینامیکی نامیده می‌شود، X را فضای حالت و G را مجموعه زمان گوییم.

به‌طور مشابه گوییم G روی X یک عمل از راست است اگر نگاشتی مانند $\theta : X \times G \longrightarrow X$ وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند:

(۱) اگر e عضو همانی G باشد، آنگاه $\theta(x, e) = x$ برای همه $x \in X$.

(۲) اگر $g_1, g_2 \in G$، آنگاه

$$\theta(\theta(x, g_1), g_2) = \theta(x, g_1 g_2),$$

برای همه $x \in X$.

گروه G یک رابطه هم‌ارزی روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x = yg,\ \exists g \in G.$$

مدار نقطه $x \in X$ برابر با مجموعه زیر تعریف می‌شود:

$$O_G(x) = \{y \in X : y = xg, \exists g \in G\}.$$

اگر مجموعه X یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی باشد آنگاه هر عمل از چپ G یک رابطه مهتری چپ $\prec_{lG}$ روی X و هر عمل از راست G یک رابطه مهتری از راست $\prec_{rG}$ روی X ایجاد می‌کند [۱، ۲، ۳]. اگر

* ارائه‌دهنده

X یک فضای برداری باشد، برای هر زیرمجموعه W از X غلاف محدب W را با $\text{conv}(W)$ نمایش می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:

$$\text{conv}(W) = \{\sum_{i=0}^{n} r_i v_i : n \in \mathbb{N}, v_i \in W, 0 \leq r_i \leq 1, i = 0, 1, ... \text{ و } \sum_{i=0}^{n} r_i = 1\}.$$

گوییم y یک G-مهتر x می‌باشد هرگاه $x \in \text{conv}(O_G(y))$ [۳]. در سراسر این مقاله نماد M_n برای نمایش فضای برداری همه ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ استفاده شده است، فضای برداری همه بردارهای حقیقی $n \times 1$ $(\mathbb{R}^n)$ با نماد $\mathbb{R}_n$ نمایش داده شده است. مجموعه $\{e_1, ..., e_n\}$ پایه‌ای استاندارد برای فضای برداری $\mathbb{R}_n$ و مجموعه $\{e_1^t, ..., e_n^t\}$ پایه‌ای استاندارد برای فضای برداری $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. فرض کنیم $\sim$ یک رابطه روی $\mathbb{R}^n$ باشد، تبدیل خطی $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را نگهدارنده خطی T گوییم هرگاه $x \sim y$ نتیجه دهد $T(x) \sim T(y)$، در جبرخطی پیدا کردن نگهدارنده‌های خطی رابطه‌های مهتری اهمیت ویژه‌ای دارد [۴، ۵].

۲. نتایج اصلی

در این بخش فرض می‌کنیم که P_n یک ماتریس مربعی و خودمعکوس باشد یعنی $P_n^2 = I_n$. ماتریس‌های خودمعکوس دسته بزرگ و مهمی از ماتریس ها در جبرخطی می‌باشند. به‌عنوان مثال اگر P یک ماتریس خودمعکوس باشد و A یک ماتریس وارون‌پذیر، آنگاه به‌راحتی می‌توان دید که ماتریس‌های P^t، $-P$ و $A^{-1}PA$ نیز خودمعکوس می‌باشند. اگر P یک ماتریس خودمعکوس باشد و $p(x)$ چندجمله‌ای مینیمال P، آنگاه $p(x)$ بر $x^2 - 1$ تقسیم‌پذیر است.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $G = \{I_n, P_n\}$ و $x, y \in R^n$. آنگاه گزاره‌های زیر هم‌ارزند:

(۱) $x \prec_{lG} y$،
(۲) $x \prec_{lG} P_n y$،
(۳) $P_n x \prec_{lG} y$،
(۴) $P_n x \prec_{lG} P_n y$.

اثبات. فرض کنید $x, y \in R^n$. چون $P_n^2 = I_n$، حکم از هم‌ارزی زیر نتیجه می‌شود

$$x = ty + (1-t)P_n y \iff P_n x = tP_n y + (1-t)y.$$

□

قضیه ۲.۲. فرض کنید $G = \{I_n, P_n\}$ و $x, y \in R_n$. آنگاه گزاره‌های زیر هم ارزند:

(۱) $x \prec_{rG} y$،
(۲) $x \prec_{rG} yP_n$،
(۳) $xP_n \prec_{rG} y$،
(۴) $xP_n \prec_{rG} yP_n$.

اثبات. فرض کنید $x, y \in R_n$. چون $P_n^2 = I_n$، حکم از هم‌ارزی زیر نتیجه می‌شود:

$$x = ty + (1-t)yP_n \iff xP_n = tyP_n + (1-t)y.$$

□

قضیه ۳.۲. فرض کنید $G = \{I_n, P_n\}$ و $A = [a_{ij}]$ ماتریس نمایشگر تبدیل خطی T نسبت به پایه استاندارد باشد. آنگاه T نگهدارنده خطی رابطه $\prec_{lG}$ است اگر و تنها اگر A در یکی از گزاره‌های زیر صدق کند

(۱) $AP_n = A$.
(۲) $AP_n = P_n A$.

اثبات. اگر داشته باشیم $AP_n = A$ آنگاه داریم

$$T(ty + (۱ - t)P_n y) = Ay,$$

و در نتیجه T رابطه $\prec_{lG}$ را حفظ می‌کند و در صورتی‌که رابطه $AP_n = P_n A$ برقرار باشد داریم

$$T(ty + (۱ - t)P_n y) = tAy + (۱ - t)P_n Ay,$$

و در نتیجه T رابطه $\prec_{lG}$ را حفظ می‌کند.
برعکس فرض کنیم T نگهدارنده خطی رابطه $\prec_{lG}$ باشد و

$$[T] = A = \begin{bmatrix} A_۱ \\ A_۲ \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix},$$

ماتریس نمایشگر تبدیل خطی T باشد. فرض کنیم α و β دو عدد حقیقی باشند و $۱ \leq i, j \leq n$ پس

$$\alpha e_i + \beta e_j \sim_l \alpha P_n e_i + \beta P_n e_j.$$

لذا

$$\alpha A_i + \beta A_j \sim_l \alpha A P_n e_i + \beta A P_n e_j, \quad (۱)$$

بنابراین

$$\alpha (AP_n)_i + \beta (AP_n)_j = \alpha A_i + \beta A_j, \quad (۲)$$

یا

$$\alpha (AP_n)_i + \beta (AP_n)_j = \alpha (P_n A)_i + \beta (P_n A)_j. \quad (۳)$$

برای هر دو عدد حقیقی α و β، که در آن $(BC)_i$ سطر i-ام ماتریس BC می‌باشد. اگر در رابطه (۱) قرار دهیم $\alpha = ۱$ و $\beta = ۰$ پس از روابط (۲) و (۳) نتیجه می‌شود

$$(AP_n)_i = A_i \text{ یا } (AP_n)_i = (P_n A)_i,$$

برای همه $۱ \leq i \leq n$. اکنون ثابت می‌کنیم که $(AP_n)_i = A_i$ برای همه $۱ \leq i \leq n$ یا $(AP_n)_i = (P_n A)_i$ برای همه $۱ \leq i \leq n$. برای این منظور فرض کنیم $(AP_n)_i = A_i$ برای بعضی $۱ \leq i \leq n$ و $(AP_n)_j = (P_n A)_j$ برای بعضی $۱ \leq j \leq n$. بنابراین اگر در رابطه (۱) قرار دهیم $\alpha = ۱$ و $\beta = ۱$ از روابط (۲) و (۳) به‌دست می آوریم

$$(AP_n)_i + (AP_n)_j = A_i + A_j,$$

یا

$$(AP_n)_i + (AP_n)_j = (P_n A)_i + (P_n A)_j,$$

از تساوی‌های $(AP_n)_i + (AP_n)_j = A_i + A_j$ و $(AP_n)_i = A_i$ نتیجه می‌شود که $(AP_n)_j = A_j$، و از دو تساوی $(AP_n)_i + (AP_n)_j = (P_n A)_i + (P_n A)_j$ و $(AP_n)_i = (P_n A)_i$ نتیجه می‌شود $(AP_n)_j = (P_n A)_j$. پس $(AP_n)_i = A_i$ برای همه $۱ \leq i \leq n$ یا $(AP_n)_i = (P_n A)_i$ برای همه $۱ \leq i \leq n$، یعنی $AP_n = A$ یا $AP_n = P_n A$. □

مثال ۴.۲. فرض کنید که P_n ماتریس $n \times n$ باشد که درایه‌های قطر فرعی آن یک و بقیه درایه‌ها صفر باشند، $G = \{I_n, P_n\}$ و $A = [a_{ij}]$ ماتریس نمایشگر تبدیل خطی T نسبت به یک پایه باشد. آنگاه T نگهدارنده خطی رابطه $\prec_{lG}$ است اگر و تنها اگر A در یکی از گزاره‌های زیر صدق کند

(۱) $a_{ij} = a_{in+۱-j}$، برای همه $۱ \leq i, j \leq n$.
(۲) $a_{in+۱-j} = a_{n+۱-ij}$، برای همه $۱ \leq i, j \leq n$.

به‌طور مشابه قضیه زیر را برای مهتری‌های راست داریم.

قضیه ۵.۲. فرض کنید $G = \{I_n, P_n\}$ و $A = [a_{ij}]$ ماتریس نمایشگر تبدیل خطی T نسبت به یک پایه باشد. آن‌گاه T نگهدارنده خطی رابطه $\prec_{rG}$ است اگر و تنها اگر A در یکی از گزاره‌های زیر صدق کند

(۱) $P_nA = A$.

(۲) $AP_n = P_nA$.

۳. نتیجه‌گیری

در این مقاله ماتریس مربعی و خودمعکوس را در نظر گرفتیم و رابطه مهتری چپ و رابطه مهتری راست روی گروه تولید شده توسط این ماتریس‌ها بررسی شد و تبدیلات نگهدارنده خطی برای چنین رابطه‌هایی مورد مطالعه قرار گرفت.

مراجع

1. T. Ando, *Majorization, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues*, Linear Algebra and its Appl. **118** (1989) 163–248.
2. H. Chiang and C. K. Li, *Generalized doubly stochastic matrices and linear preservers,* Linear and Multilinear Algebra **53** (2005) 1–11.
3. G. Dahl, *Matrix majorization*, Linear Algebra and its Appl. **288** (1999) 53–73.
4. A. M. Hasani and M. Radjabalipour, *On linear preservers of (right) matrix majorization,* Linear Algebra and its Appl. **423** (2007) 255–261.
5. F. Khalooei and A. Salemi, *The Structure of linear preservers of left matrix majorization on* $\mathbb{R}^p$, Electron. J. Linear Algebra **18** (2009) 88–97.

پست الکترونیکی: y.sayyari@gmail.com

پست الکترونیکی: a.mohammadhasani53@gmail.com

به‌کارگیری نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار در تحلیل کلینیکوپاتولوژی ضایعات ستون مهره‌ای و استخراج قوانین تصمیم‌گیری

فاطمه دهقانی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
و منصور قدیری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. هدف از این تحقیق، تحلیل نتایج کلینیکوپاتوژیکال ضایعات ستون مهره‌ای بیماران به کمک نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار است. در تحلیل سعی شد به کمک ابزار قدرتمند این نظریه، قوانین حاکم بین ویژگی‌ها استنتاج شود. مطالعه‌ی این جامعه‌ی آماری نشان داد که مهم‌ترین ویژگی شرط، نوع ضایعه است. با محاسبات درجه‌ی وابستگی ویژگی تصمیم (نوع پاتولوژی) به زیرمجموعه‌های ویژگی‌های شرط (سن، جنس، منشاء ضایعه و نوع ضایعه) نتایج این بود که مجموعه‌ی {جنس، مکان آناتومیک و نوع ضایعه} در تصمیم‌گیری نوع پاتولوژی قدرت بالاتری دارد.

واژه‌های کلیدی: استنتاج قوانین، کلینیکوپاتولوژی، مجموعه‌های ناهموار، وابستگی.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05E20, 05E75.

۱. پیش‌گفتار

نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار توسط محققی لهستانی به‌نام پاولاک در سال ۱۹۸۲ معرفی گردید [۵، ۶]. مهم‌ترین ویژگی‌های این نظریه عبارتند از: الگوریتم بهینه برای پیدا کردن الگوهای پنهان در داده‌ها، پیدا کردن روابطی که توسط روش‌های آماری کشف نمی‌شوند، امکان استفاده کمی وکیفی از اطلاعات، پیدا کردن مجموعه مینیمال از داده‌ها که برای کلاس‌بندی مفید است [۷]، ارزیابی اهمیت داده‌ها، استخراج الگوریتم کنترل از مشاهدات، ساده‌سازی جداول تصمیم و استخراج قوانین تصمیم از مشاهدات.

در این مطالعه ما بر آن شدیم تا به کمک نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار وضعیت کلینیکوپاتولوژی ضایعات ستون مهره (خوش‌خیم و بدخیم) در طی سال‌های ۱۳۸۷ لغایت ۱۳۹۷ در بیمارستان شهید صدوقی یزد را تحلیل کنیم. برنامه‌های کاربردی نظریه مجموعه‌های ناهموار را می‌توان به کارهای تحقیقاتی در زمینه‌های مختلف، از جمله پزشکی [۳]، تجارت [۴] و اینترنت [۲] اشاره کرد.

۲. نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار

نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار به‌عنوان ابزاری قدرتمند برای استنتاج از داده‌ها و تحلیل و پیش‌بینی تصمیمات، داده‌کاوی، ساخت سیستم‌های خبره و سیستم‌های پشتیبان تصمیم‌گیری کاربرد دارد. فرض کنید یک مجموعه‌ی متناهی (جهان) $U \neq \emptyset$ از اشیای مدنظر خود در اختیار داریم. هر زیرمجموعه $X \subseteq U$ از جهان یک مفهوم یا رسته در U نامیم و هر خانواده مفاهیم در U به‌عنوان دانش انتزاعی (یا مختصراً دانش) درباره U در نظر گرفته می‌شود.

اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی U باشد، آن‌گاه U/R خانواده‌ی همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی R (یا دسته‌بندی U) است که به آن به‌عنوان رسته‌ها و یا مفاهیم R اشاره می‌کنیم و $[x]_R$ به رسته‌ای در R اشاره دارد که حاوی عنصر $x \in U$ است.

با استفاده از یک پایگاه دانش، می‌توانیم مفهوم یک سیستم رابطه‌ای $K = (U, \mathbf{R})$ را درک کنیم، که مجموعه‌ی غیرتهی و متناهی U جهان و $\mathbf{R}$ خانواده‌ای از روابط هم‌ارزی روی U است.

* ارائه‌دهنده

اگر $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{R}$ و $\mathbf{P} \neq \emptyset$ آنگاه $\bigcap \mathbf{P}$ (مقطع همه‌ی روابط هم‌ارزی متعلق به $\mathbf{P}$) نیز یک رابطه‌ی هم‌ارزی است که با $IND(\mathbf{P})$ نشان داده و رابطه غیرقابل تشخیص روی $\mathbf{P}$ نام دارد. علاوه براین

$$[x]_{IND(\mathbf{P})} = \bigcap_{R \in \mathbf{P}} [x]_R \,. \tag{۱}$$

فرض کنید که پایگاه دانش $K = (U, \mathbf{R})$ به ما داده شده است. به هر زیرمجموعه $X \subseteq U$ و یک رابطه‌ی هم‌ارزی $R \in IND(K)$ دو زیر مجموعه‌ی زیر را مربوط می‌کنیم:

$$\underline{R}X = \bigcup \{Y \in U/R : \; Y \subseteq X\}, \tag{۲}$$

$$\overline{R}X = \bigcup \{Y \in U/R : \; Y \cap X \neq \emptyset\}, \tag{۳}$$

که به‌ترتیب تقریب‌های R-پایین و R-بالا از X نامیده می‌شوند. مجموعه $BN_R(X) = \overline{R}X - \underline{R}X$ را R-مرز از X می‌نامیم. مجموعه‌ی $\underline{R}X$ مجموعه‌ای از عناصر U است که می‌توان به‌طور قطعی آن‌ها را با عناصر X در دانش R دسته‌بندی کرد؛ $\overline{R}X$ مجموعه‌ای از عناصر U است که می‌توان آن‌ها را احتمالا با عناصر X و با استفاده از دانش R دسته‌بندی کرد؛ مجموعه‌ی $BN_R(X)$ مجموعه عناصری است که دارای دانش R هستند و نمی‌توان آن‌ها را به X یا X – دسته‌بندی کرد [۶]. هم‌چنین نمادهای زیر را به‌کار می‌بریم:

$$POS_R(X) = \underline{R}X \,, \qquad X \text{ ناحیه } R\text{-مثبت از}$$
$$NEG_R(X) = U - \overline{R}X \,, \qquad X \text{ ناحیه } R\text{-منفی از}$$

ناحیه‌ی منفی $NEG_R(X)$ گردآوری از اشیایی است که می‌توان با استفاده از دانش R بدون هر ابهامی تعیین کرد که به مجموعه‌ی X متعلق نیستند، به این ترتیب آن‌ها به متمم X تعلق دارند.

نادقیق بودن یک مجموعه (رسته) به‌دلیل وجود ناحیه‌ی مرزی است. هر چقدر ناحیه‌ی مرزی یک مجموعه بزرگتر باشد، دقت مجموعه کمتر است. به‌منظور بیان دقیق‌تر این ایده، معیار دقت را تعریف می‌کنیم

$$\alpha_R(X) = \frac{card\underline{R}(X)}{card\overline{R}(X)} \,, \quad X \neq \emptyset. \tag{۴}$$

معیار دقت $\alpha_R(X)$ نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی کامل بودن دانش ما در مورد مجموعه‌ی X است. واضح است که برای هر R و $X \subseteq U$ داریم $0 \leq \alpha_R(X) \leq 1$؛ اگر $\alpha(X) = 1$، ناحیه‌ی مرزی مجموعه‌ی X متناظر با R خالی بوده و مجموعه‌ی X ،یک مجموعه‌ی R-تعریف‌پذیر است؛ اگر $\alpha < 1$، مجموعه‌ی X دارای نواحی غیرتهی مرزی متناظر با R است و در نتیجه مجموعه‌ی X، R-تعریف‌ناپذیر است.

در روند تقلیل دانش [۶]، دو مفهوم اساسی بی‌زائده و هسته نقش اساسی ایفا می‌کنند. می‌توان گفت، بی‌زائده‌ی دانش یک قسمت ضروری است و برای تعریف تمام مفاهیم اساسی در دانش کفایت می‌کند در حالی‌که از یک نظر معین، هسته مهم‌ترین قسمت می‌باشد. فرض کنید $\mathbf{R}$ خانواده‌ای از روابط هم‌ارزی است و $R \in \mathbf{R}$. R را در $\mathbf{R}$ غیرضروری نامیم اگر $IND(\mathbf{R}) = IND(\mathbf{R} - R)$؛ در غیر این‌صورت R در $\mathbf{R}$ ضروری نامیده می‌شود. خانواده‌ی $\mathbf{R}$ مستقل است اگر هر R در $\mathbf{R}$ ضروری باشد؛ در غیر این‌صورت $\mathbf{R}$ وابسته است.

$\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{P}$ را یک بی‌زائده از $\mathbf{P}$ نامیم اگر $\mathbf{Q}$ مستقل و رابطه‌ی $IND(\mathbf{Q}) = IND(\mathbf{P})$ برقرار باشد. واضح است که $\mathbf{P}$ ممکن است بی‌زائده‌های مختلفی داشته باشد. مجموعه‌ی همه‌ی روابط ضروری در $\mathbf{P}$، هسته‌ی $\mathbf{P}$ نامیده و با $CORE(\mathbf{P})$ نشان می‌دهیم.

$$CORE(\mathbf{P}) = \bigcap RED(\mathbf{P}), \tag{۵}$$

که در آن $RED(\mathbf{P})$ خانواده‌ی همه‌ی بی‌زائده‌های $\mathbf{P}$ است.

فرض کنیم $K = (U, \mathbf{R})$ یک پایگاه دانش باشد و $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. در این‌صورت دانش $\mathbf{Q}$ با درجه‌ی k به دانش $\mathbf{P}$ بستگی دارد ($0 \leq k \leq 1$) و آن را با نماد $\mathbf{P} \Rightarrow_k \mathbf{Q}$ نشان می‌دهیم، اگر و تنها اگر

$$k = \gamma\mathbf{P}(\mathbf{Q}) = \frac{card\ POS_{\mathbf{P}}(\mathbf{Q})}{card\ U}. \qquad (۶)$$

اگر $k = 1$، گوییم $\mathbf{Q}$ به‌طور کلی به $\mathbf{P}$ وابسته است؛ اگر $0 < k < 1$، گوییم $\mathbf{Q}$ تقریباً (به‌طور جزئی) به $\mathbf{P}$ وابسته است و اگر $k = 0$ گوییم به‌طور کلی مستقل از $\mathbf{P}$ است.

مسئله‌ی نمایش دانش در تحلیل و نتیجه‌گیری به‌وسیله‌ی نظریه مجموعه‌های ناهموار، اهمیت بسیار زیادی دارد و رویکردهای بسیاری در این حوزه دیده می‌شوند به دلایل محاسباتی، به نمایش معنایی دانش نیاز داریم. برای این منظور، باید از روش نمایش جدولی دانش استفاده کنیم و می‌توان آن را نوعی خاص از «زبان رسمی» دانست که برای بیان روابط هم‌ارزی (یا بخش‌ها) در فرم نمادین مناسب برای پردازش کامپیوتر استفاده می‌شوند. چنین جدول داده سیستم نمایش دانش (KR-سیستم یا KRS) نامیده خواهد شد. گاهی اوقات سیستم‌های اطلاعات یا سیستم‌های ویژگی-ارزش نامیده می‌شوند.

جداول تصمیم از نظر KR-سیستم‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند. فرض کنید $K = \{U, A\}$ یک سیستم نمایش دانش $D, C \subset A$ دو مجموعه از ویژگی‌ها به‌ترتیب به نام ویژگی شرط و تصمیم باشند. KR-سیستم با شرایط مجزا و ویژگی‌های تصمیم جدول تصمیم نامیده می‌شود و آن را به‌صورت $T = (U, A, C, D)$ یا به‌طور خلاصه جدول CD-تصمیم می‌نامیم. کلاس‌های هم‌ارزی روابط $IND(C)$ و $IND(D)$ به‌ترتیب کلاس‌های شرط و تصمیم نامیده می‌شوند. برای هر $x \in U$، تابع $d_x : A \to V$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $a \in C \cup D$، $d_x(a) = a(x)$؛ تابع d_x قاعده تصمیم (در T) نامیده می‌شود و x برچسب قاعده تصمیم d_x است. عناصر مجموعه‌ی U در جدول تصمیم هر شئ حقیقی را نشان نمی‌دهند، اما شناسه‌های ساده‌ی قوانین تصمیم هستند.

اگر d_x یک قاعده تصمیم باشد، آن‌گاه محدود کردن d_x به C که با $d_x|C$ و محدود کردن d_x به D که با $d_x|D$ نشان داده می‌شوند به‌ترتیب شرط و تصمیم d_x می‌نامیم. قاعده تصمیم d_x سازگار است اگر برای هر $y \neq x$ (در T)، $d_x|C = d_y|C$ نتیجه دهد که $d_x|D = d_y|D$؛ در غیر این‌صورت قاعده تصمیم ناسازگار است. یک جدول تصمیم سازگار نامیده می‌شود اگر همه‌ی قوانین تصمیم سازگار باشند و در غیر این‌صورت جدول تصمیم ناسازگار است.

۳. سیستم تصمیم

جامعه آماری در این مطالعه، تعداد ۴۰۰ بیمار مبتلا به انواع ضایعات ستون مهره (خوش خیم و بدخیم) مراجعه کننده به بیمارستان شهید صدوقی یزد طی سال‌های ۱۳۸۷ لغایت ۱۳۹۷ بود. روش نمونه‌گیری سرشماری بود و کلیه بیماران مبتلا به انواع ضایعات ستون مهره (خوش‌خیم و بدخیم) مراجعه کننده به بیمارستان شهید صدوقی یزد طی زمان مذکور وارد مطالعه شدند و بیمارانی که اطلاعات پرونده‌ی آن‌ها ناقص بوده و دسترسی به آن‌ها وجود نداشت، از مطالعه خارج شدند. پس از مطالعه دقیق، ویژگی‌های شرط و تصمیم مورد نیاز این تحقیق شناسایی شد که مشاهدات در این تحقیق (U) ۱۱۵ بیمار هستند. ارزش‌های مربوط به ویژگی‌ها (V) در جدول ۱ نشان داده شده است.

جدول ۱. سیستم ویژگی-ارزش.

ویژگی	عنوان	ارزش
a	سن بیمار	۱. ۳۵-۰ سال ۲. ۶۰-۳۶ سال ۳. بالای ۶۰ سال
b	جنسیت	۱. مرد ۲. زن
c	منشاء ضایعه	۱. مهره سرویکال ۲. مهره توراسیک ۳. مهره لومبار ۴. ساکرال
d	نوع ضایعه	۱. خوش‌خیم ۲. بدخیم
e	نوع پاتولوژی	۱. ضایعات التهابی ۲. ضایعات تومورال خوش‌خیم ۳. سرطان‌ها ۴. سارکوما ۵. لنفوما ۶. سایر

سپس وضعیت کلینیکوپاتوژی ضایعات ستون مهره‌ای ۱۱۵ بیمار با ویژگی‌های شرط $P = \{a, b, c, d\}$ و ویژگی تصمیم $Q = \{e\}$ و ارزش‌های آن‌ها مورد تحلیل قرار گرفت. پس از تشکیل کلاس‌های همسان به ۳۹ قاعده‌ی تصمیم تبدیل شدند و مجموعه‌ی همه‌ی تصمیمات ممکن در جدولی به‌نام جدول تصمیم فهرست شدند.

۴. ساده‌سازی جدول تصمیم

رویکرد ساده‌سازی شامل از بین بردن ویژگی‌های شرط زائد (ستون‌ها)، ردیف‌های تکراری و ارزش‌های غیرضروری ویژگی‌های شرط است [۱]. با حذف هر ویژگی شرط، ناسازگارها با عمق‌های متفاوت مشاهده گردید. پس هیچ یک از ویژگی‌های شرط را نمی‌توان حذف کرد. از این رو، از تحلیل‌ها مشاهده می‌شود مجموعه ویژگی‌های شرط، $e-$مستقل هستند.

بنا به دلایلی ممکن است در هنگام تصمیم‌گیری برخی ویژگی‌ها در دسترس نباشد. مسئله‌ای که پیش می‌آید این است که فقدان اطلاعات چگونه روی توانایی تصمیم‌گیری تاثیر می‌گذارد. نبود ویژگی a در جدول باعث می‌شود که هفت قانون تصمیم ناسازگار شوند و بقیه قوانین تصمیم تاثیر نپذیرند به‌عبارتی قوانین تصمیم درست باقی مانده و ناحیه مثبت الگوریتم تصمیم را تشکیل‌دهند. از این‌رو درجه‌ی وابستگی (وابستگی ویژگی تصمیم e به ویژگی‌های شرط $\{b, c, d\}$ که آن را با نماد $\{b, c, d\} \Rightarrow \{e\}$ نشان می‌دهیم)، $\frac{۱۸}{۲۵}$ است (۶). ویژگی b از ویژگی a اهمیت بیشتری دارد، با حذف آن ده قانون ناسازگار می‌شوند؛ بنابراین درجه وابستگی $\{a, c, d\} \Rightarrow \{e\}$، برابر $\frac{۱۵}{۲۵}$ است. حذف ویژگی c باعث می شود دوازده قانون، ناسازگار شوند و در نتیجه وابستگی $\{a, b, d\} \Rightarrow \{e\}$، با درجه‌ی $\frac{۱۳}{۲۵}$ است. ویژگی d هنگامی که حذف شود، باعث می‌شود شانزده قانون ناسازگار شوند و درجه وابستگی $\{a, b, c\} \Rightarrow \{e\}$، مساوی $\frac{۹}{۲۵}$ است. بنابراین ویژگی d مهم‌ترین مشخصه است، چون بدون این ویژگی تنها نه قانون از بیست و پنج قانون تصمیم درست باقی می‌مانند، در حالی‌که بدون ویژگی a نوزده مورد از بیست و پنج مورد قانون تصمیم سازگار هستند.

طبق قسمت قبل که حذف شرایط اضافی ویژگی‌های شرط بود، می‌توان دید که با حذف هر ویژگی به جفت‌هایی از قوانین تصمیم ناسازگار دست می‌یابیم که با توجه به همان قوانین تصمیم ناسازگار می‌توانیم $e-$ هسته‌ی هر ویژگی شرط را مشخص کنیم (۵).

با برگشتن به مسئله‌ی اولیه‌ی ساده‌سازی جدول تصمیم، بررسی می‌کنیم که آیا برخی ارزش‌های ویژگی‌های شرط در جدول را می‌توان حذف کرد یعنی هسته‌ی ارزش‌های هر قانون تصمیم را محاسبه می‌کنیم. به‌منظور یافتن $e-$ هسته‌ی هر ویژگی باید دید که با حذف هر ویژگی به چه قوانین تصمیم ناسازگاری دست می‌یابیم. براساس آن قوانین تصمیم ناسازگار می‌توانیم هسته‌ی ارزش‌های هر ویژگی را پیدا کنیم.

۵. بی‌زائده‌های قوانین تصمیم و الگوریتم تصمیم

برای پیدا کردن بی‌زائده‌ی قوانین تصمیم باید هسته‌ی ارزش‌های هر قانون تصمیم‌گیری را منظور کرد، به‌طوری‌که ارزش‌های ویژگی شرط قانون، در مؤلفه‌ی مقدم قانون، مستقل و کل قانون درست باشد. با استخراج قوانین تصمیم برای کلاس‌های $e_۱$، $e_۲$، $e_۳$، $e_۵$ و $e_۶$ و ترکیب همه‌ی قوانین تصمیم برای هر کلاس به الگوریتم تصمیم زیر می‌رسیم:

$$(a_۱ \vee c_۴ \vee a_۳ \vee c_۲)b_۱d_۱ \vee (c_۴ \vee b_۲)a_۲d_۱ \vee (c_۳ \vee a_۱c_۲)d_۱ \vee (a_۲b_۱c_۳) \longrightarrow e_۱,$$
$$(c_۱ \vee a_۳c_۲ \vee b_۲c_۲ \vee a_۳b_۲)d_۱ \longrightarrow e_۲,$$
$$(a_۱c_۲ \vee b_۱c_۲ \vee a_۱b_۲ \vee b_۲c_۴ \vee a_۳b_۱ \vee b_۱c_۳ \vee c_۱ \vee a_۱ \vee a_۲c_۳)d_۲ \vee (c_۴ \vee b_۱c_۲)a_۳ \vee (c_۱ \vee c_۳)a_۲b_۲ \longrightarrow e_۳,$$
$$(a_۲ \vee d_۲)b_۲c_۲ \vee (c_۳ \vee d_۲)a_۳b_۲ \vee a_۲b_۱c_۴d_۲ \longrightarrow e_۵,$$
$$a_۱b_۲c_۴d_۱ \longrightarrow e_۶.$$

۶. نتیجه‌گیری

هدف از این تحقیق، تحلیل نتایج کلینیکوپاتوژیکال ضایعات ستون مهره‌ای بیماران به کمک نظریه‌ی مجموعه‌های ناهموار بود. این نظریه، قوانین حاکم بین ویژگی‌های شرطی بیماران و نوع پاتولوژی آن‌ها را استنتاج کرد که می‌تواند در کلاس‌بندی داده‌های جدید مورد استفاده قرار گیرد. مطالعه‌ی ما در این جامعه‌ی آماری ۹ قانون برای تشخیص ضایعات التهابی (e_1)، ۴ قانون برای تشخیص ضایعه‌ی تومورال خوش‌خیم (e_2)، ۱۴ قانون برای تشخیص سرطان‌ها (e_3) و ۵ قانون برای تشخیص ضایعه‌ی ستون مهره‌ی لنفوماها (e_5) ایجاد کرده است. برای تشخیص سارکوماها (e_4) قانون تصمیمی استخراج نشد زیرا در این جدول تصمیم، فقط یک قانون برای این تشخیص وجود داشت و این یک قانون نیز با یکی از قوانین تشخیص لنفوماها ناسازگار بود. تعبیر پزشکی تعدادی از قوانین الگوریتم تصمیم بالا به‌شرح زیر است:

(۱) تشخیص ضایعه‌ی ستون مهره‌ی لنفوماها، در گروه خانم‌های بالای ۳۶ سال در مقایسه با گروه آقایان بیشتر بوده است،

(۲) تشخیص سرطان‌ها در گروه آقایان در مقایسه با گروه خانم‌ها، در گروه سنی ۶۰-۳۶ سال در مقایسه با دو گروه سنی دیگر و هم‌چنین در مهره‌ی توراسیک و لومبار نسبت به سایر مهره‌ها بیشتر بوده است،

(۳) تشخیص ضایعات التهابی، در گروه آقایان در مقایسه با گروه خانم‌ها و هم‌چنین در گروه سنی ۳۵-۰ سال و ۶۰-۳۶ سال در مقایسه با گروه سنی بالای ۶۰ سال بیشتر بوده است،

(۴) خانم‌های میانسال (۶۰-۳۶) با مکان آناتومیک ضایعه‌ی مهره‌ی توراسیک، خانم‌های بالای ۶۰ سال با مکان آناتومیک ضایعه‌ی مهره‌ی لومبار، خانم‌های بالای ۶۰ سال با نوع ضایعه بدخیم، خانم‌های با مکان آناتومیک ضایعه‌ی مهره‌ی توراسیک از نوع بدخیم و آقایان میانسال با مکان آناتومیک ضایعه‌ی مهره‌ی ساکروم از نوع بدخیم درگیر ضایعه‌ی ستون مهره‌ی لنفوماها می‌شوند.

سپاس‌گزاری

از کمیته برگزاری کنفرانس سپاس‌گزاریم که فرصتی ایجاد کردند تا بتوانیم نتایج فعالیت علمی خود را ارائه دهیم.

مراجع

1. J. G. Bazan, *A Comparison of Dynamic and Non-dynamic Rough Set Methods for Extracting Laws from Decision Tables*, in: L. Polkowski and A. Skowron, Eds. Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.
2. A. Formica, *Semantic Web search based on rough sets and Fuzzy Formal Concept Analysis*, Knowl. Base. Syst. **26** (2012) 40–47.
3. A. E. Hassanien, A. Abraham, J. F. Peters, G. Schaefer and C. Henry, *Rough Sets and Near Sets in Medical Imaging: A Review*, IEEE Trans. Inf. Technol. Biomed. **13** (6) (2009) 955–968.
4. J. J. H. Liou and G. H. Tzeng, *A Dominance-based Rough Set Approach to customer behavior in the airline market*, Inform. Sci. **180** (11) (2010) 2230–2238.
5. Z. Pawlak, *Rough sets*, Int. J. Parallel Program.**11** (5) (1982) 341–356.
6. Z. Pawlak, *Rough Sets-Theoretical Aspects of Reasoning about Data*, Kluwer, Dordrecht, 1991.
7. J. Y. Shyng, F. K. Wang, G. H. Tzeng and K. S. Wu, *Rough set theory in analyzing the attributes of combination values for the insurance market*, Expert Syst. Appl. **32** (1) (2007) 56–64.

پست الکترونیکی: mghadiri@yazd.ac.ir
پست الکترونیکی: dehghani.f13@gmail.com

ساخت دسته‌های جدیدی از گروه‌های چرخشی

سهیلا مهدوی زفرقندی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. دراین مقاله چند دسته جدید از گروه‌های چرخشی معرفی و ساختار زیرگروه‌های چرخشی و زیرگروه‌های چرخشی نرمال آن‌ها مورد بررسی قرار خواهند گرفت. ما در برخی موارد مشبکه زیرگروه‌های چرخشی و مشبکه زیرگروه‌های چرخشی نرمال آن‌ها را به‌دست خواهیم آورد.
واژه‌های کلیدی: گروه چرخشی، زیرگروه چرخشی، زیرگروه چرخشی نرمال.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 20D99, 20F99.

۱. پیش‌گفتار

فرض می‌کنیم H یک گروه، A مجموعه‌ای ناتهی و دلخواه به‌طوری‌که $|H| = |A|$، A و H مجزا و $\varphi : H \longrightarrow A$ یک نگاشت دوسویی است. قرار می‌دهیم $G = H \cup A$. به ازای هر دو عضو a و b از G تعریف می‌کنیم:

$$a \otimes b = \begin{cases} ab & a, b \in H, \\ \varphi(\varphi^{-1}(a)b) & a \in A, b \in H, \\ \varphi(a\varphi^{-1}(b)) & a \in H, b \in A, \\ \varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b) & a, b \in A. \end{cases}$$

به‌سادگی می‌توان دید که G با ضرب بالا یك گروه است. ما در ادامه تلاش می‌کنیم از این الگو بهره گرفته و با شروع از یك گروه چرخشی، گروه چرخشی دیگری با مرتبه دو برابر گروه چرخشی اولیه بسازیم.

فرض می‌کنیم $(H^+, \oplus)$ گروه چرخشی، H^- مجموعه‌ای مجزا از H^+ و $\varphi : H^+ \longrightarrow H^-$ یک نگاشت دوسویی باشد. یک عضو دلخواه از H^+ را با نماد x^+ معرفی کرده، $x^- = \varphi(x^+)$، $G = H^+ \cup H^-$ و به ازای هر دو عضو a^ϵ و b^δ از G ،

$$a^\epsilon \otimes b^\delta = \begin{cases} a^+ \oplus b^+ & (\epsilon, \delta) = (+,+) \; or (-,-), \\ (a^+ \oplus b^+)^- & (\epsilon, \delta) = (-,+) \; or (+,-), \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم [۱].

تعریف ۱.۱. [۲] فرض می‌کنیم $(G, \oplus)$ یک گروه چرخشی باشد، دراین‌صورت اگر عملگر دوتایی $\oplus$ به ازای هر $a, b \in G$، در قانون جابجایی چرخشی $a \oplus b = gyr[a, b](b \oplus a)$ صدق کند آن‌گاه به این گروه چرخشی، گروه چرخشی جابجایی گوییم.

گروه چرخشی جدید بعدی را به‌شکل زیر معرفی می‌کنیم. ما با شروع از گروه دوری Z_{2^n}، $n \geq 3$، گروه چرخشی از مرتبه‌ی 2^{n+1} می‌سازیم.

$$Z_{2^n} = \{0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1} - 1, 2^{n-1}, 2^{n-1} + 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

* ارائه‌دهنده

تعریف ۲.۱. فرض می‌کنیم $P = \{۰, ۱, ۲, \dots, ۲^{n-۱} - ۱\}$، $H = \{۲^{n-۱}, ۲^{n-۱} + ۱, \dots, ۲^n - ۱\}$ و $G = P \cup H$ است. واضح است که $P \simeq Z_{۲^{n-۱}}$ و $H = P + m$ به‌طوری‌که $m = ۲^{n-۱}$. بنابراین $G = P \cup P + m$. عمل دوتایی $\oplus$ روی G را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$i \oplus j = \begin{cases} t & (i,j) \in P \times P, \\ t+m & (i,j) \in P \times H, \\ s+m & (i,j) \in H \times P, \\ k & (i,j) \in H \times H, \end{cases}$$

در حالی‌که $t, s, k \in P$ و

$$\begin{cases} t \equiv i + j & (mod\ m), \\ s \equiv i + (\frac{m}{۲} - ۱)j & (mod\ m), \\ k \equiv (\frac{m}{۲} + ۱)i + (\frac{m}{۲} - ۱)j & (mod\ m). \end{cases}$$

لم ۳.۱. فرض می‌کنیم تعریف ۲.۱ برقرار و $A(i)$ یک نگاشتی روی G به‌شکل

$$A(i) = \begin{cases} i, & i \in P, \\ r + m, & i \in H. \end{cases}$$

باشد که $r \in P$ و $r \equiv i + \frac{m}{۲}$ در این‌صورت $A(i) \in Aut(G, \oplus)$.

تعریف ۴.۱. فرض می‌کنیم تعریف ۲.۱ برقرار باشد.
$O_P = \{i \in P \mid i$ فرد است.$\}$،
$O_H = \{i \in H \mid i$ فرد است.$\}$،
$E_H = \{i \in H \mid i$ زوج است.$\}$
و
$M = [O_P \times (O_H \cup E_H)] \cup [O_H \times (O_P \cup E_H)] \cup [E_H \times (O_P \cup O_H)]$
نگاشت $gyr : G \times G \longrightarrow Aut(G, \oplus)$ را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم.

$$gyr[a,b] = \begin{cases} A, & (a,b) \in M, \\ I, & \text{درغیر این‌صورت}, \end{cases}$$

که $A, I \in Aut(G, \oplus)$. I یکریختی همانی است و A یک یکریختی است که در لم ۳.۱ معرفی شده است.

۲. نتایج اصلی

در این بخش ابتدا دسته‌ی اول گروه‌های چرخشی جدید را معرفی می‌کنیم. سپس بخشی از ویژگی‌های آن را ذکر کرده وساختار زیرگروه‌های چرخشی و زیرگروه‌های چرخشی نرمال آن‌را بیان می‌کنیم. در ادامه دسته دوم گروه‌های چرخشی را معرفی و با زیرگروه‌های چرخشی آن آشنا می‌شویم.

قضیه ۱.۲. [۱] فرض می‌کنیم عملگر چرخشی $gyr_G : G \times G \to Aut(G)$ به ازای هر a^ϵ و b^δ و t^γ متعلق به G به‌شکل زیر تعریف شود.

$$gyr_G[a^\epsilon, b^\delta](t^\gamma) = \begin{cases} gyr_{H^+}[a^+, b^+](t^+), & \gamma = +, \\ (gyr_{H^+}[a^+, b^+](t^+))^-, & \gamma = -, \end{cases}$$

در این‌صورت $(G, \otimes)$ یک گروه چرخشی است.

نتیجه ۲.۲. [۱] اگر $(H^+, \oplus)$ گروه چرخشی جابجایی باشد آن‌گاه $(G, \otimes)$ گروه چرخشی جابجایی است.

با محاسباتی که با نرم افزار گپ انجام شده است، ۵ گروه چرخشی از مرتبه ۸ به‌دست آمده است. ما در جدول ؟؟، جدول‌ضرب این گروه‌های چرخشی را ارائه کرده‌ایم. فرض کنید $(K(۱), \oplus_K)$، $(L(۱), \oplus_L)$، $(M(۱), \oplus_M)$، $(N(۱), \oplus_N)$ و $(O(۱), \oplus_O)$ گروه‌های چرخشی مذکور باشند. ما مجموعه زمینه تمام این گروه‌های چرخشی را با $G = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷\}$ نشان می‌دهیم. $A = (۴, ۵)(۶, ۷)$، $B = (۲, ۳)(۴, ۵)$، $C = (۴, ۵)$، $D = (۲, ۳)(۶, ۷)$ و $E = (۴, ۵)(۶, ۷)$ یکریختی‌های چرخشی به‌ترتیب متعلق به $K(۱)$، $L(۱)$، $M(۱)$، $N(۱)$، $O(۱)$ است.

فرض می‌کنیم $(H^+, \oplus)$ گروه چرخشی ساخته شده از گروه چرخشی دیگر G باشد که الگوریتم ساخت آن در بخش اول ارائه شده، در این‌صورت بنابر قضیه ۲.۱۴ در [۲] عملگر $\boxplus$ ، هم عملگر $\oplus$ و هم‌چنین عملگر $\circledast$ را هم عملگر $\otimes$ معرفی می‌کنیم؛ به‌طوری‌که $(H^+, \boxplus)$، هم گروه چرخشی $(H^+, \oplus)$ و نیز $(G, \circledast)$هم گروه چرخشی $(G, \otimes)$ است، نیز به ازای هر عضو a متعلق به H^+، $\boxminus a$ وارون منحصر بفرد $(H^+, \boxplus)$ می‌باشد و به‌طور مشابه برای گروه چرخشی G هم عملگر تفاضل $\circledcirc$ را مشابه هم عملگر تفاضل $\boxminus$ در H^+ معرفی می‌کنیم. به ازای هر دو عضو a^ϵ و b^δ متعلق به گروه چرخشی G داریم:

$$a^\epsilon \circledcirc b^\delta = \begin{cases} a^+ \boxminus b^+, & (\epsilon, \delta) = (+,+) or (-,-), \\ (a^+ \boxminus b^+)^-, & (\epsilon, \delta) = (+,-) or (-,+). \end{cases}$$

قضیه ۳.۲. [۱] فرض می‌کنیم $(H^+, \oplus)$ گروه چرخشی ساخته شده از گروه چرخشی دیگر G باشد که الگوریتم ساخت آن در بخش اول بیان شد، دراین‌صورت $|conj_G(G)| = ۲|conj_{H^+}(H^+)|$.

حال با ساختار زیرگروه چرخشی معرفی شده در قضیه زیر آشنا می‌شویم.

قضیه ۴.۲. [۱] فرض می‌کنیم $(H^+, \oplus)$ گروه چرخشی ساخته شده از گروه چرخشی دیگر G باشد که الگوریتم ساخت آن در بخش اول آمده، دراین‌صورت زیر مجموعه ناتهی B، زیرگروه چرخشی G است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) $B \leq H^+$،

(۲) $A^+ \leq H^+$ و $L^- \subseteq H^-$ وجود دارند به‌طوری‌که $B = A^+ \cup L^-$ و به ازای هر $a^\epsilon, b^\delta \in L^-$ داریم $a^\epsilon \otimes b^\delta \in A^+$. به‌علاوه $A^+ \cap L^+ = \phi$ و $A^+ \cup L^+ \leq H^+$ درحالی‌که $L^+ = \varphi^{-۱}(L^-)$،

(۳) $B = A^+ \cup A^-$ به‌طوری‌که $A^+ \leq H^+$ و $A^- = \varphi(A^+)$.

در مرحله بعد به معرفی زیرگروه‌های چرخشی نرمال این گروه‌های چرخشی می‌پردازیم.

لم ۵.۲. [۱] فرض می‌کنیم $(H^+, \oplus)$ یک گروه چرخشی باشد که $(G, \otimes)$ گروه چرخشی حاصل از آن است، در این‌صورت $H^+ \trianglelefteq G$ است.

قضیه ۶.۲. فرض می‌کنیم $(H^+, \oplus)$ گروه چرخشی ساخته شده از گروه چرخشی دیگر G باشد که الگوریتم ساخت آن در بخش اول ارائه گردید، دراین‌صورت $M \trianglelefteq G$ است اگر و تنها اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

(۱) $M \trianglelefteq H^+$،

(۲) $N^+ \trianglelefteq H^+$ و $L^- \subseteq H^-$ وجود دارند به‌طوری‌که $M = N^+ \cup L^-$، با توجه به این خاصیت که به ازای هر $x, y \in L^-$، $x \otimes y \in N^+$. هم‌چنین $N^+ \cap L^+ = \emptyset$ و $N^+ \cup L^+ \trianglelefteq H^+$ به‌طوری‌که $L^+ = \varphi^{-۱}(L^-)$،

(۳) $M = N^+ \cup N^-$ به‌طوری‌که $N^+ \trianglelefteq H^+$و $N^- = \varphi(N^+)$.

حال با دومین دسته گروه چرخشی جدید آشنا می‌شویم.

در این بخش به بررسی ویژگی‌های از گروه چرخشی از مرتبه ۲^n که توسط گروه دوری $Z_{۲^n}$ برای $n \geq ۳$ به‌دست می‌آید، می‌پردازیم.

قضیه ۷.۲. فرض می‌کنیم تعاریف ۲.۱ و ۴.۱ برقرار باشند، در این‌صورت $(G, \oplus)$ یک گروه چرخشی است.

قضیه ۸.۲. فرض می‌کنیم تعاریف ۲.۱ و ۴.۱ برقرار باشند، دراین‌صورت گروه چرخشی $(G, \oplus)$ یک گروه چرخشی غیر جابجایی است.

در پایان به معرفی زیرگروه‌های چرخشی گروه چرخشی معرفی شده اخیر می‌پردازیم.

قضیه ۹.۲. فرض می‌کنیم $G(n)$ یک ۲-گروه چرخشی دووجهی از مرتبه ۲^n باشد، در این‌صورت $B(n)$ یک زیرگروه چرخشی $G(n)$ است اگر و تنها اگر دارای یکی از شرایط زیر باشد:

۱. $B(n) = G(n)$؛
۲. $B(n)$ یک زیرگروه $P(n)$ است؛
۳. $B(n) = \{۰, i\}$ درحالی‌که $i \in H(n)$؛
۴. $r, s \in \mathbb{Z}$ وجود دارند به‌طوری‌که $۲ \leq r \leq n-۱$، $۰ \leq s \leq ۲^r - ۱$ و $B(n) = \langle ۲^r \rangle \cup (۲^{n-۱} + s) + \langle ۲^r \rangle$.

جدول ۱. جدول‌ضرب و یکریختی چرخشی وابسته به گروه‌های چرخشی $K(۱)$، $L(۱)$، $M(۱)$.

$\oplus_K$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	gyr_K	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۰	I	I	I	I	I	I	I	I
۱	۱	۰	۳	۲	۵	۴	۷	۶	۱	I	I	I	I	I	I	I	I
۲	۲	۳	۰	۱	۶	۷	۴	۵	۲	I	I	I	I	A	A	A	A
۳	۳	۲	۱	۰	۷	۶	۵	۴	۳	I	I	I	I	A	A	A	A
۴	۴	۵	۶	۷	۰	۱	۲	۳	۴	I	I	A	A	I	I	A	A
۵	۵	۴	۷	۶	۱	۰	۳	۲	۵	I	I	A	A	I	I	A	A
۶	۶	۷	۴	۵	۳	۲	۱	۰	۶	I	I	A	A	A	A	I	I
۷	۷	۶	۵	۴	۲	۳	۰	۱	۷	I	I	A	A	A	A	I	I
$\oplus_L$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	gyr_L	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۰	I	I	I	I	I	I	I	I
۱	۱	۰	۳	۲	۵	۴	۷	۶	۱	I	I	I	I	I	I	I	I
۲	۲	۳	۰	۱	۶	۷	۴	۵	۲	I	I	I	I	B	B	B	B
۳	۳	۲	۱	۰	۷	۶	۵	۴	۳	I	I	I	I	B	B	B	B
۴	۴	۵	۶	۷	۰	۱	۲	۳	۴	I	I	B	B	I	I	B	B
۵	۵	۴	۷	۶	۱	۰	۳	۲	۵	I	I	B	B	I	I	B	B
۶	۶	۷	۵	۴	۳	۲	۰	۱	۶	I	I	B	B	B	B	I	I
۷	۷	۶	۴	۵	۲	۳	۱	۰	۷	I	I	B	B	B	B	I	I
$\oplus_M$	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	gyr_M	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۰	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۰	I	I	I	I	I	I	I	I
۱	۱	۰	۳	۲	۵	۴	۷	۶	۱	I	I	I	I	I	I	I	I
۲	۲	۳	۰	۱	۶	۷	۴	۵	۲	I	I	I	I	C	C	C	C
۳	۳	۲	۱	۰	۷	۶	۵	۴	۳	I	I	I	I	C	C	C	C
۴	۴	۵	۶	۷	۱	۰	۳	۲	۴	I	I	C	C	I	I	C	C
۵	۵	۴	۷	۶	۰	۱	۲	۳	۵	I	I	C	C	I	I	C	C
۶	۶	۷	۵	۴	۲	۳	۱	۰	۶	I	I	C	C	C	C	I	I
۷	۷	۶	۴	۵	۳	۲	۰	۱	۷	I	I	C	C	C	C	I	I

سپاس‌گزاری

این مقاله بخشی از رساله دکتری اینجانب در دانشگاه کاشان است که تحت راهنمایی آقای دکتر سید علی‌رضا اشرفی و مشاوره آقای دکتر محمد علی سلحشور در حال انجام است.

مراجع

1. S. Mahdavi, A. R. Ashrafi and M. A. Salahshour, *Construction of new gyrogroups and the structure of their subgyrogroups*, to appear in *Algebraic Structures and their Applications*.
2. A. A. Ungar ,*Analytic Hyperbolic Geometry and Albert Einstein's Special Theory of Relativity*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack, NJ, 2008.

پست الکترونیکی: s.mahdavi@grad.kashanu.ac.ir

ارائه پوستری

رمزنگاری

رمزنگاری شناسه کاربری با استفاده از ژاکوبین تعمیم یافته خم‌های بیضوی

الهام حاجی‌رضائی*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و مجتبی بهرامیان
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. رمزنگاری شناسه کاربری یک سیستم رمزنگاری کلید عمومی است که از اطلاعات شخصی گیرنده مثل آدرس ایمیل، اسم و ... جهت محاسبه کلید خصوصی و عمومی در یک سیستم رمز استفاده می‌کند. گیرنده پیام کلید خصوصی متناظر با اطلاعات شخصی خود را از طرف سوم مورد اعتماد که PKG نامیده می‌شود، دریافت کرده و می‌تواند متن رمزشده را رمزگشایی کند. در این مقاله یک طرح شناسه کاربری بر اساس ژاکوبین تعمیم یافته خم‌های بیضوی معرفی می‌کنیم که امنیت آن بر سختی مسئله لگاریتم گسسته روی ژاکوبین تعمیم یافته بنا شده است.

واژه‌های کلیدی: خم‌های بیضوی، ژاکوبین تعمیم یافته، رمزنگاری شناسه کاربری.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 14H52, 11T71.

۱. پیش‌گفتار

در این بخش ابتدا به اختصار خم‌های بیضوی را معرفی کرده و پس از آن با ژاکوبین تعمیم یافته یک خم بیضوی آشنا می‌شویم.

۱.۱. **خم‌های بیضوی.** فرض کنید $\mathbb{F}_q$ میدان متناهی از مرتبه $q = p^n$ باشد، که در آن n عددی طبیعی و $p > ۳$ عددی اول است. یک خم بیضوی روی میدان $\mathbb{F}_q$، خمی با معادله وایرشتراس کوتاه به‌صورت $y^۲ = x^۳ + Ax + B$ است که در آن $A, B \in \overline{\mathbb{F}}_q$ و مبین آن $\Delta = ۴A^۳ + ۲۷B^۲$ مخالف صفر است. گوییم خم E روی $\mathbb{F}_q$ تعریف شده است هرگاه $A, B \in \mathbb{F}_q$. اگر E روی $\mathbb{F}_q$ تعریف شده باشد نقاط $\mathbb{F}_q$-گویای آن عبارت است از:

$$E(\mathbb{F}_q) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_q \mid y^۲ = x^۳ + Ax + B\} \cup \{\mathcal{O}\},$$

که در آن $\mathcal{O} = [۰ : ۱ : ۰]$ نقطه در بی‌نهایت خم است.

فرض کنید E خم بیضوی با معادله $y^۲ = x^۳ + Ax + B$، P و Q دو نقطه روی E و $\mathcal{O}$ نقطه در بی‌نهایت باشد. خط L را خط گذرنده از نقاط P و Q در نظر می‌گیریم (درصورتی‌که $P = Q$، L خط مماس بر منحنی E در نقطه P است). در این‌صورت، خط L خم E را در نقطه سومی به نام R قطع می‌کند که آن را با $P * Q$ نشان می‌دهیم. قرینه $P * Q$ نسبت به محور x را جمع P و Q نامیده و آن‌را با $P + Q$ نشان می‌دهیم. در واقع $P + Q = (x_۳, y_۳)$ که در آن $x_۳ = m^۲ - x_۱ - x_۲$ و $y_۳ = m(x_۱ - x_۳) - y_۱$ و m از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$m = \begin{cases} \dfrac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}, & P \neq Q, \\ \dfrac{۳{x_۱}^۲ + A}{۲y_۱}, & P = Q. \end{cases}$$

ویژگی‌های زیر در مورد عمل تعریف شده برقرار است:

* ارائه‌دهنده

(۱) اگر خط L خم E را در سه نقطه P، Q و R قطع کند (این نقاط لزوماً متمایز نیستند)، آنگاه
$$P+Q+R=\mathcal{O}.$$
(۲) اگر $P,Q,R\in E$ آنگاه $(P+Q)+R=P+(Q+R)$.
(۳) برای هر $P\in E$، $P+\mathcal{O}=P$.
(۴) اگر $P\in E$ آنگاه نقطه‌ای مانند Q روی خم E وجود دارد به‌طوری که
$$P+Q=\mathcal{O}.$$
نقطه Q را با $-P$ نشان داده و آن را قرینه P می‌نامیم. اگر $P=(x,y)$ آنگاه $-P=(x,-y)$.
(۵) برای هر $P,Q\in E$، $P+Q=Q+P$.

بر اساس قانون جمع تعریف شده در بالا نتیجه می‌شود خم E یک گروه آبلی با عنصر همانی $\mathcal{O}$ است. برای مطالعه بیشتر در زمینه خم‌های بیضوی می‌توانید به [۵، ۶] مراجعه کنید.

۲.۱. **گروه بخش‌یاب‌های یک خم بیضوی.** فرض کنید E یک خم بیضوی و $Div(E)$ مجموعه متشکل از مجموع‌های صوری به‌صورت $\sum_{P\in E}n_P(P)$ باشد که در آن برای هر P، n_P عددی صحیح و تنها تعدادی متناهی از آن‌ها غیرصفر است. $\sum_{P\in E}n_P(P)$ را یک بخش‌یاب روی E می‌نامیم. برای هر دو بخش‌یاب $\sum_{P\in E}n_P(P)$ و $\sum_{P\in E}m_P(P)$ با عمل جمع زیر
$$\sum_{P\in E}n_P(P)+\sum_{P\in E}m_P(P)=\sum_{P\in E}(n_P+m_P)(P),$$
$Div(E)$ یک گروه آبلی با عنصر همانی $\mathbf{o}=\sum_{P\in E}0(P)$ است که آن‌را گروه بخش‌یاب‌های روی E می‌نامیم. در واقع، $Div(E)$ یک گروه آبلی آزاد روی نقاط E است. درجه بخش‌یاب $D=\sum_{P\in E}n_P(P)$ را به‌صورت $\deg(D)=\sum_{P\in E}n_P$ تعریف می‌کنیم به‌علاوه مجموعه $Supp(D)=\{P\in E|n_P\neq 0\}$ را محمل D می‌نامیم.

مجموعه $Div(E)$ شامل همه بخش‌یاب‌های از درجه صفر که با نماد $Div^{0}(E)$ نشان داده می‌شود زیرگروهی از $Div(E)$ است. بخش‌یاب $\sum_{P\in E}n_P(P)$ را مثبت یا موثر می‌نامیم هرگاه برای هر $P\in Suup(D)$، $n_P>0$. دو بخش‌یاب D و D' را متباین گوییم هرگاه دارای محمل‌های جدا از هم باشند.

فرض کنید $\overline{\mathbb{F}}_q(E)$ میدان تابعی E روی $\mathbb{F}_q$ باشد. بخش‌یاب تابع $f\in\overline{\mathbb{F}}_q(E)$ را به‌صورت $div(f)=\sum_{P\in E}ord_P(f)(P)$ تعریف می‌کنیم که در آن $ord_P(f)$ مرتبه f در نقطه P است. بخش‌یاب D را اصلی گوییم هرگاه تابع $f\in\overline{\mathbb{F}}_q(E)$ موجود باشد به‌طوری که $div(f)=D$. مجموعه همه بخش‌یاب‌های اصلی را با نماد $Princ(E)$ نمایش می‌دهیم. $Princ(E)$ زیرگروهی از $Div^{0}(E)$ است. گروه خارج قسمتی $Pic^{0}(D)=\dfrac{Div^{0}(E)}{Princ(E)}$ را گروه پیکارد نامیده و قسمت درجه صفر آن یعنی $Pic(D)=\dfrac{Div(E)}{Princ(E)}$ را ژاکوبین معمولی خم E می‌نامیم و آن را با $J(E)$ نشان می‌دهیم. دو بخش‌یاب D و D' را هم‌ارز خطی گوییم هرگاه به ازای یک $f\in\overline{\mathbb{F}}_q(E)^{*}$ داشته باشیم $D-D'=div(f)$ و می‌نویسیم $D\sim D'$.

۳.۱. **ژاکوبین تعمیم یافته یک خم بیضوی.** فرض کنید $\mathfrak{m}=\sum_{i=0}^{r}m_i(P_i)$ یک بخش‌یاب مثبت و D و D' دو بخش‌یاب متباین با $\mathfrak{m}$ باشند. گوئیم D و D'، $\mathfrak{m}$-ارزاند و می‌نویسیم $D\sim_{\mathfrak{m}}D'$ هرگاه $f\in\overline{\mathbb{F}}_q(E)^{*}$ موجود باشد به‌طوری که $div(f)=D-D'$ و برای هر i، $ord_{P_i}(1-f)\geq m_i$. این رابطه یک رابطه هم‌ارزی است. کلاس $\mathfrak{m}$-هم‌ارزی بخش‌یاب D را با $[D]_{\mathfrak{m}}$ نشان می‌دهیم. $Div_{\mathfrak{m}}(E)$ را مجموعه بخش‌یاب‌های E می‌گیریم که با $\mathfrak{m}$ متباین هستند. همچنین قسمت درجه صفر آن‌را با $Div^{0}_{\mathfrak{m}}(E)$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم:
$$Princ_{\mathfrak{m}}(E)=\{div(f)|f\in\overline{\mathbb{F}}_q(E)^{*},ord_P(1-f)\geq m_i\}.$$

$Princ_{\mathfrak{m}}(E)$ زیرگروهی از $Div^{*}_{\mathfrak{m}}(E)$ است. گروه خارج قسمتی $\frac{Div^{\circ}_{\mathfrak{m}}(E)}{Princ_{\mathfrak{m}}(E)}$ را با نماد $Pic^{\circ}_{\mathfrak{m}}(E)$ یا با $J_{\mathfrak{m}}$ نمایش داده و آن‌را ژاکوبین تعمیم یافته خم E نسبت به پیمانه $\mathfrak{m}$ می‌نامیم [۴].

قضیه ۱.۱. فرض کنید $\mathfrak{m} = (M) + (N)$ که در آن M و N دو نقطه متمایز از E هستند. در این‌صورت هر عنصر از $J_{\mathfrak{m}}$ قابل نمایش به‌صورت دوتایی (k, P) است که در آن $k \in \mathbb{F}_q^*$ و $P \in E(\mathbb{F}_q)$. حال فرض کنید $(k_1, P_1), (k_2, P_2) \in J_{\mathfrak{m}}$ و $P_1, P_2, \pm(P_1 + P_2) \notin \{M, N\}$، عمل زیر را روی $J_{\mathfrak{m}}$ تعریف می‌کنیم:

$$(k_1, P_1) + (k_2, P_2) = (k_1 k_2 \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_1, P_2), P_1 + P_2),$$

که در آن

$$\mathbf{c}_{\mathfrak{m}} : E \times E \longrightarrow \mathbb{F}_q^*$$
$$\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_1, P_2) = \frac{l_{P_1,P_2}(M)}{l_{P_1+P_2,\mathcal{O}}(M)} \frac{l_{P_1+P_2,\mathcal{O}}(N)}{l_{P_1,P_2}(N)},$$

و l_{P_1,P_2} معادله خط گذرنده از P_1 و P_2 است. توجه کنید که اگر $P_1 = P_2$، l_{P_1,P_1} خط مماس بر خم در نقطه P_1 است. در این‌صورت $J_{\mathfrak{m}}$ با عمل تعریف شده یک گروه است. به‌علاوه داریم:

(۱) $(1, \mathcal{O})$ عنصر همانی $J_{\mathfrak{m}}$ است.
(۲) $J_{\mathfrak{m}}$ آبلی است، زیرا $\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_1, P_2) = \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P_2, P_1)$.
(۳) قرینه عنصر $(k, P) \in J_{\mathfrak{m}}$ عبارت است از $-(k, P) = (\frac{1}{k} \frac{l_{P,\mathcal{O}}(N)}{l_{P,\mathcal{O}}(M)}, -P)$.

اینک به ازای عدد صحیح و مثبت n فرض کنید $\alpha_n(P)$ مؤلفه اول $n(1, P)$ باشد. به‌راحتی می‌توان دید

$$\alpha_n(P) = \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P, P)\mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P, 2P) \dots \mathbf{c}_{\mathfrak{m}}(P, (n-1)P).$$

به‌علاوه برای هر $(k.P) \in J_{\mathfrak{m}}$، داریم $n(k, P) = (k^n \alpha_n(P), nP)$.

قضیه ۲.۱. برای هر دو عدد صحیح و مثبت m و n،

الف) $\alpha_{m+n}(P) = \alpha_m(P)\alpha_n(P)\mathbf{c}_m(mP, nP)$.
ب) $\alpha_{mn}(P) = \alpha_n(P)^m \alpha_m(nP) = \alpha_m(P)^n \alpha_n(mP)$.

برای مشاهده اثبات قضیه و اطلاعات بیشتر در مورد ژاکوبین تعمیم یافته می‌توانید به [۲، ۳] مراجعه کنید.

۲. رمزنگاری بر مبنای شناسه کاربری

رمزنگاری شناسه کاربری (IBE)، روشی در رمزنگاری کلید عمومی است که در آن از اطلاعات شخصی فرد از قبیل آدرس ایمیل، آدرس IP، اسم و... برای ساختن کلید عمومی در رمزگذاری استفاده می‌شود. در این روش نیاز به یک طرف سوم مورد اعتماد به نام است، که کلید عمومی اصلی و کلید خصوصی اصلی را تولید می‌کند. این ایده اولین بار توسط شامیر در سال ۱۹۸۴ مطرح شد و تا مدت‌ها به عنوان یک مسأله‌ی حل نشده باقی ماند تا این‌که در سال ۲۰۰۱ توسط بونه و فرانکلین [۱] حل شد. هم اکنون این موضوع به‌طور ویژه مورد توجه محققان رمزنگاری قرار گرفته و تاکنون طرح‌های رمزنگاری زیادی بر اساس آن مطرح شده است.

در طرح شناسه کاربری، یک فرستنده (آلیس) برای رمزگذاری از مشخصات فردی گیرنده (باب) که می تواند آدرس ایمیل، IP یا حتی عکس دیجیتالی او باشد استفاده می‌کند. در مقابل، باب می تواند کلید خصوصی متناظر با اطلاعات شخصی خود را از PKG دریافت کرده و با استفاده از آن عمل رمزگشایی را انجام دهد. مراحل طرح IBE به‌صورت زیر است:

(۱) مرحله آماده سازی: ابتدا PKG کلید عمومی اصلی pk_{PKG} و کلید خصوصی اصلی sk_{PKG} را ایجاد کرده و pk_{PKG} را منتشر می‌کند.
(۲) مرحله تولید کلید: باب خود را به PKG معرفی کرده و کلید خصوصی متناظر با اطلاعات شخصی خود sk_{Bob} را دریافت می‌کند.

(۳) مرحله رمزگذاری: آلیس با استفاده از اطلاعات شخصی باب یعنی ID_{Bob} و کلید عمومی pk_{PKG} منتشر شده در مرحله اول، پیام M را رمزگذاری کرده و متن رمز شده‌ی C را برای باب ارسال می‌کند.

(۴) مرحله رمزگشایی: باب با استفاده از کلید عمومی pk_{PKG} و کلید خصوصی خود (sk_{Bob})، متن رمز شده C را رمزگشایی کرده و پیام M را بازیابی می‌کند.

۳. نتایج اصلی

در این بخش یک سیستم شناسه کاربری بر اساس ژاکوبین تعمیم یافته‌ی یک خم بیضوی معرفی می‌کنیم. فرض کنید $E : y^2 = x^3 + Ax + B$ یک خم بیضوی روی میدان $\mathbb{F}_q$ و $\mathfrak{m} = (M) + (N)$ یک بخش‌یاب روی E باشد به‌طوری‌که M و N دو نقطه متمایز از خم هستند. فرض کنید آلیس و باب روی خم E و بخش‌یاب $\mathfrak{m}$ توافق کرده‌اند. آن‌ها همچنین اطلاعات شخصی باب (ID_{Bob}) را به نقطه‌ای مانند P روی خم E به گونه‌ای نظیر می‌کنند که $M, N \notin \langle P \rangle$. فرض کنید $\alpha_n(P)$ مؤلفه اول $n(۱, P)$ باشد. آلیس و باب مراحل پروتکل شناسه کاربری را به‌صورت زیر انجام می‌دهند.

(۱) **مرحله آماده سازی:** PKG عدد صحیح و مثبت n را انتخاب کرده و با استفاده از آن و ID_{Bob}، یعنی نقطه P، مقادیر nP و $\alpha_n(P)$ را محاسبه کرده و $pk_{PKG} = (nP, \alpha_n(P))$ را به‌عنوان کلید عمومی منتشر می‌کند.

(۲) **مرحله تولید کلید:** در این مرحله PKG، n را به‌عنوان کلید خصوصی باب برای او ارسال می‌کند.

(۳) **مرحله رمزگذاری:** آلیس متن پیام $T \in \mathbb{F}_q$ را با اطلاعات شخصی باب (یعنی P) و کلید عمومی PKG یعنی pk_{PKG} رمز می کند. برای این منظور او عدد صحیح و مثبت m را انتخاب کرده و محاسبات زیر را انجام می‌دهد.

$$\begin{aligned} u &= mP, \\ v &= (\alpha_n(P))^m \alpha_m(nP) + T, \\ w &= \alpha_m(P). \end{aligned}$$

سپس (u, v, w) را برای باب ارسال می‌کند.

(۴) **مرحله رمزگشایی:** باب با استفاده از اطلاعاتی که در اختیار دارد پیام T را به‌صورت زیر رمزگشایی می‌کند

$$v - (\alpha_m(P))^n \alpha_n(mP) = T.$$

مراجع

1. D. Boneh and M. Franklin, *Identity-Based encryption from the Weil Pairing*, Advances in cryptology—CRYPTO, Lecture Notes in Comput. Sci. 2139, Springer, Berlin, (2001) 213–229.
2. I. Dechene, *Generalized Jacobians in Cryptography*, Ph.D. Thesis, McGill University, 2005.
3. I. Dechen, *Arithmetic of generalized jacobians*, Lecture Notes in Comput. Sci. 4076, Springer, Berlin, (2006) 421–435.
4. M. Rosenlicht, *Generalized jacobian varieties*, Ann. of Math. **59** (1954) 505–530.
5. J. H. Silverman, *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1992.
6. C. Washington, *The Elliptic Curves Number Theory and Cryptography*, Chapman and Hall/CRC, London, 2008.

پست الکترونیکی: elhamhajrezaei021@gmail.com
پست الکترونیکی: bahramianh@kashanu.ac.ir

ارائه پوستری

نظریه گراف و ترکیبیات

اثبات دو حدس روی اندازه‌های بی‌نظمی در گراف‌ها

علی قلاوند*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و علی‌رضا اشرفی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

چکیده. ما در این نوشتار اثباتی ساده برای یک قضیه روی بی‌نظمی کلی گراف‌ها که ابتدا به‌صورت حدس بیان شده بود را ارائه خواهیم داد. همچنین اثباتی از یک حدس روی انحراف درجه گراف را که توسط نویسندگان انجام یافته است در این‌جا گزارش خواهیم کرد.
واژه‌های کلیدی: بی‌نظمی، بی‌نظمی کلی، انحراف درجه، دنباله درجه، گراف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 05C07, 05C76.

۱. مقدمه

در این نوشتار گراف‌ها را ساده، متناهی و غیر بدیهی در نظر می‌گیریم. فرض کنید G گرافی با مجموعه رأس $V(G)$ و مجموعه یال $E(G)$ باشد. تعداد اعضای $V(G)$ و $E(G)$ را به‌ترتیب مرتبه و اندازه G نامیم. دو رأس از گراف G، که با یک یال به هم متصل باشند را مجاور گوییم. مجموعه رأس‌های مجاور به یک رأس مانند $v \in V(G)$ را با $N[G, v]$ نمایش می‌دهیم. تعداد رأس‌های مجاور به $v \in V(G)$، را درجه آن رأس نامیم و با $deg_G(v)$ نمایش می‌دهیم، پس $deg_G(v) = |N[G, v]|$. از نمادهای δ و Δ به‌ترتیب برای نمایش کوچکترین و بزرگترین درجه در گراف G استفاده می‌کنیم. تعداد رأس‌ها از درجه i، $1 \leq i \leq n-1$، در گراف G را با n_i نشان می‌دهیم. بنابراین $\sum_{i=1}^{n-1} n_i = |V(G)|$. مجموعه $D(G) = \{deg_G(v) : v \in V(G)\}$ را مجموعه درجه G گوییم. گراف G را منظم، r-منظم و (r, s)-دو منظم گوییم هرگاه به‌ترتیب $D(G)$ تک عضوی، $D(G) = \{r\}$، و $D(G) = \{r, s\}$ باشد.

گرافی همبند که بتوان مجموعه رأس‌های آن را به دو زیر مجموعه k و $n-k$ عضوی طوری افراز کرد که مجموعه‌های k و $n-k$ عضوی به‌ترتیب مجموعه مستقل و خوشه باشند را یک گراف شکافنده گوییم و با $S(n, k)$ نمایش می‌دهیم. اگر در گراف شکافنده بیان شده، هر رأس مجموعه مستقل با همه رأس‌های خوشه مجاور باشد آن‌گاه آن را یک گراف شکافنده کامل گوییم و با $CS(n, k)$ نشان می‌دهیم و در صورتی‌که هر رأس مجموعه مستقل با یک رأس از خوشه مجاور باشد آن‌گاه آن را گراف شکافنده ستاره‌ای گوییم و با $S^1(n, k)$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید α یک تابع حقیقی مقدار و نامنفی روی مجموعه گراف‌ها باشد. در این‌صورت α را یک اندازه بی‌نظمی گراف‌ها گوییم هرگاه $\alpha(G) = 0$ اگر و تنها اگر G منظم باشد. آلبرتسون در سال ۱۹۹۷ یک اندازه بی‌نظمی را روی گراف‌های همبند به‌صورت $irr(G) = \sum_{uv \in E(G)} |deg_G(u) - deg_G(v)|$ تعریف کرد. عبدو و دیمیتروف در سال ۲۰۱۴، اندازه بی‌نظمی کلی، irr_t، که یک گسترش از شاخص آلبرتسون بود را به‌صورت $irr_t(G) = \sum_{\{u,v\} \subseteq V(G)} |deg_G(u) - deg_G(v)|$ بیان کردند. ژو و همکارانش حدس زیر را روی irr_t بیان کردند.

حدس ۱.۱. [۵، حدس ۶.۱] اگر G یک گراف غیر منظم روی n رأس باشد آن‌گاه

$$irr_t(G) \geq \begin{cases} n-1 & 2 \nmid n \\ 2n-4 & 2 \mid n \end{cases}.$$

* ارائه‌دهنده

عبدو و دیمیتروف در سال ۲۰۱۵ [۱] این حدس را ثابت کردند. ما اخیراً در [۲] یک اثبات ساده برای این حدس بیان کرده‌ایم که در بخش بعدی خواهیم آورد. نیکیفوروف در سال ۲۰۰۶ یک اندازه بی‌نظمی دیگر با نام انحراف درجه گراف را به‌صورت

$$s(G) = \sum_{v \in V(G)} \left| deg_G(v) - \frac{2m}{n} \right|,$$

فرمول بندی کرد، جائی‌که n و m به‌ترتیب مرتبه و اندازه گراف G هستند. الیویرا و همکارانش در سال ۲۰۱۳ [۳] قضیه و حدس زیر را روی انحراف درجه گراف بیان کردند.

قضیه ۲.۱. اگر $G = CS(n,k)$ آن‌گاه $s(G) = \frac{n}{2}k(n-k)(n-1-k)$. به‌علاوه اگر

$$k = \begin{cases} \frac{n}{3} & 3 \mid n \\ \frac{n-1}{3} & 3 \mid n-1 \\ \frac{n-2}{3} \text{ و } \frac{n+1}{3} & 3 \mid n-2 \end{cases},$$

آن‌گاه $CS(n,k)$ دارای ماکسیمم مقدار انحراف درجه در بین همه گراف‌های شکافنده کامل روی n رأس است.

حدس ۳.۱. اگر

$$k = \begin{cases} \frac{n}{3} & 3 \mid n \\ \frac{n-1}{3} & 3 \mid n-1 \\ \frac{n-2}{3} \text{ و } \frac{n+1}{3} & 3 \mid n-2 \end{cases},$$

آن‌گاه $CS(n,k)$ دارای ماکسیمم مقدار انحراف درجه در بین همه گراف‌های همبند روی n راس است.

ما در [۴] این حدس را ثابت کرده‌ایم که در بخش بعدی به‌صورت خلاصه بیان خواهیم کرد.

۲. اثبات حدس‌ها

در این بخش ابتدا یک اثبات ساده برای حدس ۱.۱ بیان می‌کنیم و سپس حدس ۳.۱ را ثابت خواهیم کرد.

۱.۲. **اثبات حدس ۱.۱.** [۲] فرض کنید G یک گراف غیر منظم با مرتبه n و مینیم درجه δ باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم

(۱) $n_{\delta+1} = 0$. در این‌حالت داریم

$$\begin{aligned} irr_t(G) &= \sum_{1 \le i < j \le n-1} n_i n_j (j-i) = \sum_{j=\delta+2}^{n-1} n_\delta n_j (j-\delta) + \sum_{\delta+2 \le i < j \le n-1} n_i n_j (j-i) \\ &\ge \sum_{j=\delta+2}^{n-1} 2 n_\delta n_j \ge 2 n_\delta (n - n_\delta) \ge 2n-2, \end{aligned}$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G، $(\delta, \delta+2)$-دو منظم و $n_\delta = 1$، $n_{\delta+2} = n-1$ (یا $n_\delta = n-1$، $n_{\delta+2} = 1$).

(۲) $n_{\delta+1} \neq 0$. در این‌حالت یکی از δ یا $\delta+1$ فرد است. بدون کاستن از کلّیت فرض کنیم δ فرد باشد. در این‌صورت با استفاده از قضیه اویلر، تعداد رأس‌ها از درجه δ زوج است. حال، اگر n فرد باشد آن‌گاه مانند قبل $irr_t(G) \ge n_\delta(n-n_\delta) \ge n-1$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G، $(\delta, \delta+1)$-دو منظم و $n_\delta = n-1$، $n_{\delta+1} = 1$ (برای حالتی که $\delta+1$ فرد باشد، تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G، $(\delta, \delta+1)$-دو منظم و $n_\delta = 1$، $n_{\delta+1} = n-1$)، اگر n زوج باشد آن‌گاه چون n_δ زوج، پس $n - n_\delta$ نیز زوج است و در نتیجه داریم $irr_t(G) \ge n_\delta(n-n_\delta) \ge 2(n-2)$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر G، $(\delta, \delta+1)$-دو منظم و $n_\delta = 2$، $n_{\delta+1} = n-2$ (یا $n_\delta = n-2$، $n_{\delta+1} = 2$)، برای حالتی که $\delta+1$ فرد باشد نیز تساوی در همین حالت‌ها رخ می‌دهد.

حالت (۱) و (۲) اثبات حدس ۱.۱ است.

۲.۲. **اثبات حدس ۳.۱.** در ادامه هرجا از واژه گراف استفاده شد منظور گرافی ساده و همبند است. [۴] فرض کنید G یک گراف از مرتبه n و اندازه m باشد. برای شروع اثبات ابتدا مجموعه‌های $V^{\downarrow}(G)$، $V^{\uparrow}(G)$، $E^{\downarrow}(G)$ و $\overline{E}^{\uparrow}(G)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} V^{\downarrow}(G) &= \{v \in V(G) : deg_G(v) \leq \frac{2m}{n}\},\ V^{\uparrow}(G) = \{v \in V(G) : deg_G(v) > \frac{2m}{n}\}, \\ E^{\downarrow}(G) &= \{uv \in E(G) : \{u,v\} \subseteq V^{\downarrow}(G)\},\ \overline{E}^{\uparrow}(G) = \{\{u,v\} \subseteq V^{\uparrow}(G) : uv \notin E(G)\}. \end{aligned}$$

لم ۱.۲. فرض کنید $F(n,m)$ خانواده گراف‌های همبند روی n رأس و m یال باشد. در این‌صورت داریم

(۱) $\{G \in F(n,m) : V^{\downarrow}(G) = V(G)\} = \{G \in F(n,m) :$ گراف $G\}$ $-$ منظم است $\frac{2m}{n}$،

(۲) $\{G \in F(n,m) : V^{\uparrow}(G) = V(G)\} = \emptyset$.

لم ۲.۲. فرض کنید G یک گراف غیر منظم باشد. اگر $e = uv \in E^{\downarrow}(G)$ یک رأس غیر برشی و $G^- = G - e$، آن‌گاه $s(G) < s(G^-)$.

لم ۳.۲. فرض کنید G یک گراف غیر منظم باشد. اگر $\{w,z\} \in \overline{E}^{\uparrow}(G)$، $f = wz$ و $G^+ = G + f$، آن‌گاه $s(G) < s(G^+)$.

فرض کنید G یک گراف غیر منظم و $e = uv \in E^{\downarrow}(G)$ یک یال برشی باشد. واضح است که $w \in V^{\uparrow}(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که حداقل یکی از $G - uv + uw$ و $G - uv + vw$ همبند است. بدون کاستن از کلّیت فرض می‌کنیم $G - uv + uw$ همبند است. در این‌صورت یال uw را همبند ساز $G - e$ وابسته به $V^{\downarrow}(G)$ و $V^{\uparrow}(G)$ گوییم.

لم ۴.۲. فرض کنید G یک گراف غیر منظم و $e = uv \in E^{\downarrow}(G)$ برشی باشد. اگر $w \in V^{\uparrow}(G)$، uw یک یال همبند ساز $G - e$ وابسته به $V^{\downarrow}(G)$ و $V^{\uparrow}(G)$ و $G^* = G - uv + uw$، آن‌گاه $s(G) < s(G^*)$.

لم ۵.۲. فرض کنید G یک گراف غیر منظم روی n رأس باشد. همچنین فرض کنید $V^{\uparrow}(G) = \{u_1, \ldots, u_k\}$ یک خوشه، $V^{\downarrow}(G) = \{v_1, \ldots, v_{n-k}\}$ یک مجموعه مستقل، $|V^{\downarrow}(G)|k < \sum_{i=1}^{n-k} deg_G(v_i)$ و $N[G, v_i] = \{u_{i_1}, \ldots, u_{i_{deg_G(v_i)}}\}$، $1 \leq i \leq n-k$.

(۱) اگر $|V^{\uparrow}(G)| > |V^{\downarrow}(G)|$ و $\{u_j \in V^{\uparrow}(G) \setminus N[v_i, G] : 1 \leq i \leq n-k\}$، $G^{\ddagger} = G + \{v_i u_j : 1 \leq i \leq n-k$ و $u_j \in V^{\uparrow}(G) \setminus N[v_i, G]\}$ آن‌گاه $s(G) < s(G^{\ddagger})$.

(۲) اگر $|V^{\uparrow}(G)| \leq |V^{\downarrow}(G)|$ و $\{v_i u_{i_j} : 1 \leq i \leq n-k$ و $2 \leq j \leq deg_G(v_i)\}$، $G^{\intercal} = G - \{v_i u_{i_j} : 1 \leq i \leq n-k$ و $2 \leq j \leq deg_G(v_i)\}$ آن‌گاه $s(G) \leq s(G^{\intercal})$.

لم ۶.۲. اگر

$$k = \begin{cases} \frac{2}{3}n & 3 \mid n \\ \frac{2}{3}(n-1) & 3 \mid n-1 \\ 2 \text{ و } 1 & n = 5 \\ \frac{2}{3}(n+1) & n \neq 5 \text{ و } 3 \mid n-2 \end{cases},$$

آن‌گاه $S^1(n,k)$ دارای ماکسیمم مقدار انحراف درجه در بین همه گراف‌های شکافنده ستاره‌ای روی n رأس است.

لم ۷.۲. ماکسیمم مقدار انحراف درجه در بین همه گراف‌های شکافنده کامل روی n رأس بزرگتر از ماکسیمم مقدار انحراف درجه در بین همه گراف‌های شکافنده ستاره‌ای روی n رأس است.

لم‌های ۱.۲، ۲.۲، ۳.۲، ۴.۲، ۵.۲، ۶.۲، ۷.۲ و قضیه ۲.۱، حدس ۳.۱ را ثابت می‌کنند.

مراجع

1. H. Abdo and D. Dimitrov, *Nonregular graphs with minimal total irregularity,* Bull. Aust. Math. Soc. **92** (1) (2015) 1–10.
2. A. R. Ashrafi and A. Ghalavand, *Note on non-regular graphs with minimal total irregularity,* Appl. Math. Comput. **369** (2020) 124891.
3. J. A. de Oliveira, C. S. Oliveira, C. Justel and N. M. Maia de Abreu, *Measures of irregularity of graphs,* Pesq. Oper. **33** (3) (2013) 383–398.
4. A. Ghalavand and A. R. Ashrafi, *On a conjecture about degree deviation measure of graphs*, Trans. Comb. accepted. DOI:10.22108/toc.2020.121737.1709
5. Y. Zhu, L. You and J. Yang, *The minimal total irregularity of some classes of graphs*, Filomat **30** (5) (2016) 1203–1211.

پست الکترونیکی: alighalavand@grad.kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: ashrafi@kashanu.ac.ir

ارائه پوستری

معادلات دیفرانسیل و دستگاه‌های دینامیکی

بررسی دینامیک و انشعاب هاپف در یک مدل فیتزهاگ-ناگومو

زهرا داوری شلمزاری*
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران
و محمد حسین اکرمی ابرقویی
دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران

چکیده. دراین مقاله مدل فیتزهاگ-ناگومو را معرفی کرده، نقاط تعادل و پایداری موضعی آن‌ها را تعیین می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم که این مدل تحت انشعاب هاپف قرار می‌گیرد.
واژه‌های کلیدی: مدل فیتزهاگ-ناگومو، انشعاب هاپف.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 13D45, 39B42.

۱. پیش‌گفتار

هدف علم اعصاب کشف و درک روش‌های دستگاه عصبی برای پردازش، نگهداری و انتقال اطلاعات است. یکی از اهداف اساسی علم اعصاب ریاضیاتی، تولید و تحلیل مدل‌های ریاضی الگوهای فعالیت نورونی است. این مدل‌ها برای این منظور به‌کار می‌روند تا به شناخت چگونگی تولید الگوهای فعالیت نورونی کمک کنند. نخستین بار هاجکینگ و هاکسلی در سال ۱۹۵۲ یک مدل ریاضی برای توضیح چگونگی آغاز و پخش پتانسیل عمل در نورون‌ها که شامل مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی است ارائه کردند [۳]. در سال ۱۹۵۵ ریچارد فیتزهاگ با یک کامپیوتر آنالوگ کار روی مدل هاجکینگ-هاکسلی را آغاز کرد. ناگومو و همکاران در سال ۱۹۶۲ به‌طور مستقل، مدلی برای توصیف کیفی یک نورون تحریک‌پذیر ارائه دادند که این مدل، مدل نوسان‌ساز فیتزهاگ-ناگومو نامیده می‌شود [۴]. گامبینو و همکاران یک سیستم واکنش-انتشار فیتزهاگ-ناگومو را در دامنه‌های کراندار مربعی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها وجود و پایداری جواب‌های طرح مربعی را در نزدیکی نقطه تعادل بررسی کردند [۲]. آمسترانگ تا و همکاران ویژگی‌های دینامیکی مدل عصبی اصلاح شده فیتزهاگ-ناگومو را بررسی کردند. آن‌ها با تحلیل موضعی سیستم جنبشی نشان دادند که سیستم تحت یک انشعاب هاپف فوق بحرانی قرار می‌گیرد [۷]. میشرا مدل فیتزهاگ-ناگومو با مشتقات کسری را معرفی کرده و سپس با استفاده از تبدیل لاپلاس و تقریب درون‌یابی لاگرانژ به حل مدل پرداخته است [۶].

۲. معرفی مدل

واحد اصلی پردازش اطلاعات در دستگاه‌های عصبی نورون‌ها هستند. وجه مشخصه نورون‌ها نسبت به سایر سلول‌ها توانایی آن‌ها در تولید سیگنال‌های الکتریکی و انتقال آن‌ها به دیگر نورون‌ها تا فواصل دور است. این کار با تولید پالس‌های الکتریکی خاصی که به آن‌ها پتانسیل عمل یا اسپایک می‌گوییم، انجام می‌شود. در مغز انسان تقریبا 10^{11} نورون وجود دارد، همه‌ی نورون‌ها از تعدادی دندریت، جسم سلولی و آکسون تشکیل شده است. دندریت‌ها عموماً محل دریافت پیام از خارج سلول می‌باشند. جسم سلولی در واقع حکم پردازنده را دارد که در پاسخ به ورودی، خروجی مناسب را تولید می‌کند و در نهایت آکسون این پیام را منتقل می‌سازد. علاوه بر این 10^{15} سیناپس نیز در دستگاه عصبی وجود دارد. سیناپس‌ها محل اتصال و ارتباط نورون‌ها با یک‌دیگر هستند. فرآیند دریافت پیام و تولید و انتشار پاسخ بستگی به نوع نورون و ساختمان آن دارد و معمولاً فرآیندهای پیچیده‌ای هستند [۱، ۴].

* ارائه‌دهنده

مدل نوسان‌ساز فیتزهاگ–ناگومو به‌صورت زیر است:

$$\begin{cases} \dot{V} = V(a-V)(V-1) - W + I, \\ \dot{W} = bV - cW, \end{cases} \quad (1)$$

که در آن a, b, c پارامترهای ثابت، V ولتاژ غشایی، W متغیر بازیابی و I مقدار جریان است. در ادامه فرض می‌کنیم $I = 0$ و به بررسی دینامیک مدل می‌پردازیم. نقاط تعادل از حل دستگاه زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} V(a-V)(V-1) - W = 0, \\ bV - cW = 0. \end{cases}$$

همواره $P_0 = (0,0)$ یک نقطه تعادل دستگاه است و با تعریف $\Delta_1 = a^2 - 2a + (\frac{-4b}{c} + 1)$ دستگاه دارای نقطه تعادل زیر است:

$$P_1 = \left(\frac{(a+1) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2}, \frac{b}{c}\left(\frac{(a+1) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2}\right) \right).$$

واضح است که نقطه تعادل فوق برای $\Delta_1 \geq 0$ تعریف می‌شود.

ماتریس ژاکوبی سیستم (1) به‌صورت زیر است:

$$Df(V,W) = \begin{pmatrix} 2aV - 3V^2 - a + 2V & -1 \\ b & -c \end{pmatrix}.$$

در نقطه $(0,0)$ ماتریس ژاکوبی به‌صورت

$$A = Df(0,0) = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ b & -c \end{pmatrix},$$

به‌دست می‌آید. چند جمله‌ای مشخصه ماتریس A به‌صورت زیر است:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \delta(A) = \lambda^2 + (a+c)\lambda + (ac+b).$$

در نتیجه

$$\Delta_2 = (a+c)^2 - 4(ac+b), \quad \lambda_{1,2} = \frac{-(a+c) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2}.$$

فرض می‌کنیم $\delta = \det A$. در این صورت پایداری مبدأ را به‌صورت گزاره زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۱.۲. نقطه تعادل مبدأ برای سیستم (1)

۱) گره است هرگاه $det(A) > 0$ و $\Delta_2 \geq 0$ که اگر $tr(A) > 0$ آن‌گاه گره ناپایدار و اگر $tr(A) < 0$ آن‌گاه گره پایدار است.

۲) کانون است هرگاه $det(A) > 0$ و $\Delta_2 < 0$ که اگر $tr(A) > 0$ آن‌گاه کانون ناپایدار و اگر $tr(A) < 0$ آن‌گاه کانون پایدار است.

۳) مرکز است هرگاه $det(A) > 0$ و $tr(A) = 0$.

۴) یک نقطه زینی است هرگاه $det(A) < 0$.

ماتریس ژاکوبی برای نقطه تعادل غیربدیهی P_1 به‌صورت زیر است:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{(a+1) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2}(2a - \frac{3}{2}((a+1) \pm \sqrt{\Delta_1}) + 2) - a & -1 \\ b & -c \end{pmatrix}.$$

فرض می‌کنیم $\Delta_۳ = (tr\ B)^۲ - ۴\det(B)$. سپس در مورد پایداری نقطه تعادل $P_۱$ گزاره زیر را داریم.

گزاره ۲.۲. نقطه تعادل $P_۱$برای سیستم (۱)

۱) گره است هرگاه $\det B > ۰$ و $\Delta_۳ \geq ۰$؛
۲) کانون است هرگاه $\det B > ۰$ و $\Delta_۳ < ۰$؛
۳) یک نقطه زینی است هرگاه $\det B < ۰$.

۳. بررسی انشعاب در مدل

در این بخش به بررسی انشعاب در مدل می‌پردازیم. با توجه به ساختار ماتریس ژاکوبی در این مدل انتظار انشعاب هاپف داریم. به عبارت دیگر، اگر یک سیستم در نقطه تعادل به ازای مقدار مشخصی از پارامتر یک جفت مقدار ویژه موهومی محض داشته باشد انتظار انشعاب هاپف داریم که در این انشعاب سیکل حدی به‌وجود می‌آید [۵]. برای یافتن انشعاب ابتدا با استفاده از تغییر متغیر زیر دستگاه را به فرم نرمال جردن تبدیل می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ \frac{\sqrt{\Delta_۲}}{۲} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

همچنین با در نظر گرفتن پارامتر انشعاب به صورت $\alpha = a + c$ داریم:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{۲}{\sqrt{\Delta_۲}}(b + c(\alpha - c)) y - \frac{۲c}{\sqrt{\Delta_۲}}((\alpha - c + ۱) - y)y^۲, \\ \dot{y} = (\alpha - c + ۱)y^۲ - \alpha y - y^۳ - \frac{\sqrt{\Delta_۲}}{۲}x, \end{cases} \tag{۲}$$

چندجمله‌ای مشخصه و مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبی سیستم (۲) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$P(\Lambda) = \Lambda^۲ + \alpha\Lambda + (b + c(\alpha - c)),$$

$$\Lambda_{۱,۲} = \frac{-\alpha \pm i\sqrt{\theta}}{۲},$$

که در آن $\theta = \alpha^۲ - ۴(b + c(\alpha - c))$. حال شرایط انشعاب هاپف را بررسی می‌کنیم:

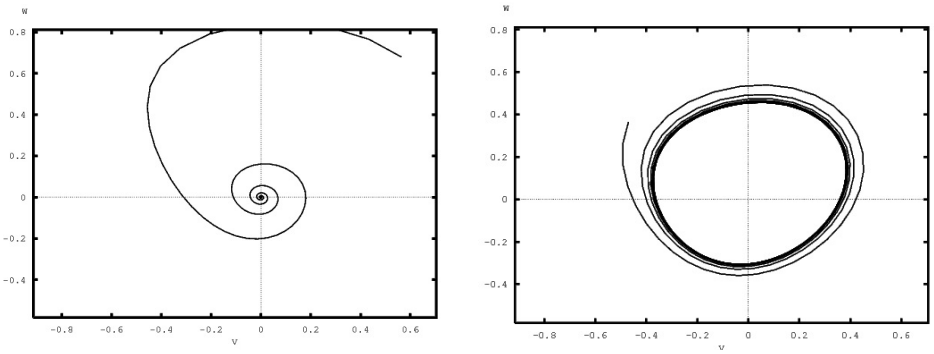
۱) $\Lambda(۰) = \pm\frac{i\sqrt{\theta}}{۲}$,
۲) $\frac{d}{d\alpha}(Re(\Lambda(\alpha)) = -\frac{۱}{۲}$,
۳) $\kappa = \frac{-۳}{۸} + \frac{c^۳ - c^۲}{۲\sqrt{\Delta_۲}(b - c^۲)} \neq ۰$.

نتیجه این بخش را در قضیه زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه ۱.۳. سیستم (۱) به‌ازای مقدار پارامتر $\alpha = ۰$ تحت انشعاب هاپف قرار می‌گیرد. علاوه‌براین اگر $\kappa > ۰$ انشعاب زیر بحرانی و اگر $\kappa < ۰$ فوق بحرانی است.

۴. شبیه‌سازی عددی

در این بخش برای تایید مطالب تحلیلی بخش‌های قبل به ازای برخی مقادیر عددی پارامترها به شبیه‌سازی نمای فاز سیستم با استفاده از نرم‌افزار XPPAUTO می‌پردازیم. در این قسمت فرض کنید $b = ۱$ و $c = ۰/۱$. همان‌طورکه در بخش قبل بیان کردیم پارامتر انشعاب برابر $\alpha = a + c$ است. در نتیجه با تغییر مقدار a نمای فاز سیستم را رسم می‌کنیم. در نتیجه به ازای $a = -۰/۱$ انشعاب هاپف داریم. در شکل ۱ برای مقدار $a = -۰/۲$



$a = -\circ/\mathbf{2}, b = \mathbf{1}, c = \circ/\mathbf{1}, I = \circ$ ((آ)) $a = \circ/\mathbf{2}, b = \mathbf{1}, c = \circ/\mathbf{1}, I = \circ$ ((ب))

شکل ۱. نمای فاز سیستم (۱).

سیکل حدی وجود دارد (حالت (آ)) و برای مقدار $a = \circ/\mathbf{2}$ سیکل حدی وجود ندارد (حالت (ب)) و نقطه مبدأ یک کانون پایدار است. لازم به ذکر است که به ازای $a = -\circ/\mathbf{1}, b = \mathbf{1}, c = \circ/\mathbf{1}$ مقدار پارامتر κ برابر $\kappa = -\circ/\mathbf{37}$ است که نشان می‌دهد انشعاب فوق بحرانی است یعنی سیکل حدی به‌وجود آمده پایدار است، که شکل ۱ این مطلب را تأیید می‌کند.

مراجع

1. R. Fitzhugh, *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*, Biophys. J. **1** (6) (1961) 445–466.
2. G. Gambino, M. C. Lombardo, G. Rubino and M. Sammartino, *Pattern selection in the 2D FitzHugh–Nagumo model*, *Ricerche di Matematica* **68** (2) (2019) 535–549.
3. A. L. Hodgkin and A. F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*, J. Physiol. **117** (4) (1952) 500–544.
4. E. M. Izhikevich, *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*, The MIP Press, Cambridge, MA, 2007.
5. Y. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, London, 2004.
6. J. Mishra, *Analysis of the Fitzhugh Nagumo model with a new numerical scheme*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **13** (3) (2020) 781–795.
7. F. A. Tah, C. B. Tabi and T. C. Kofané, *Hopf bifurcations on invariant manifolds of a modified Fitzhugh–Nagumo model*, Nonlinear Dyn. **102** (1) (2020) 311–327.

پست الکترونیکی: zahradavari7447@gmail.com
پست الکترونیکی: akrami@yazd.ac.ir

ارائه‌های پوستری

منطق و علوم کامپیوتر

بازسازی پویای دیاگرام ورونوی با موانع متحرک در گرید

سعید آسعیدی*
گروه علوم کامپیوتر، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران
و علی محدث
گروه علوم کامپیوتر، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده. دیاگرام ورونوی ازجمله مفاهیم کاربردی در شاخه‌های مختلف علوم کامپیوتر است. یکی از کاربردهای مهم دیاگرام ورونوی در علم رباتیک جهت طراحی مسیرهای ایمن در محیط با وجود موانع برای حرکت ربات‌ها است. تاکنون الگوریتم‌های مختلفی جهت ساخت و بازسازی دیاگرام ورونوی در شرایط مختلف از جمله پس از افزودن و حذف یک مانع در محیط ارائه شده است. ما در این مقاله قصد داریم به مسأله طراحی ایمن‌ترین مسیر برای حرکت ربات‌ها با وجود موانع متحرک بپردازیم. در این مقاله سه راهکار جهت بازسازی پویای دیاگرام ورونوی در صورت حرکت یک مانع در محیط ارائه کرده، و راهکارهای ارائه شده را نیز از لحاظ کارایی با یکدیگر مقایسه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: هندسه محاسباتی، دیاگرام ورونوی، موانع متحرک، بازسازی پویا.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 68U05, 68W01.

۱. پیش‌گفتار

دیاگرام ورونوی یکی از مفاهیم اساسی در هندسه محاسباتی است که در زمینه‌های مختلف مانند رباتیک، شبکه‌های کامپیوتری، جغرافیا و اقلیم شناسی و ... کاربرد دارد. فرض کنید مجموعه‌ای از نقاط در صفحه داده شده است، ناحیه‌ی ورونوی یک نقطه عبارت است از مجموعه نقاطی از صفحه که به آن نقطه نزدیک‌ترین هستند. دیاگرام ورونوی نیز نشان‌دهنده‌ی مرزهای نواحی ورونوی برای این مجموعه از نقاط است. مفهوم دیاگرام ورونوی بیش از یک قرن قدمت داشته و در سال ۱۸۵۰ برای اولین بار ارائه شده است [۱]. در سال ۱۹۸۷ آقای Fortune الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n)$ برای محاسبه‌ی دیاگرام ورونوی ارائه داد [۳].

در زمینه‌ی رباتیک استفاده‌های زیادی از دیاگرام ورونوی شده است. در [۲، ۵] نمونه‌هایی از کاربرد ورونوی در طراحی مسیر و برنامه‌ریزی حرکت ربات‌ها ارائه شده است. در بررسی رفتار و حرکت ربات، معمولاً فضای کار ربات به‌صورت یک گرید در نظر گرفته می‌شود که موانع موجود در مسیر یک ربات در سلول‌های گرید به‌عنوان سایت‌ها در نظر گرفته می‌شوند.

به این ترتیب ایمن‌ترین مسیر که از موانع بیشترین فاصله‌های ممکن را داشته باشد توسط دیاگرام ورونوی به‌دست خواهد آمد [۲، ۴]. در [۴] تغییرات دیاگرام ورونوی به‌صورت پویا پس از حذف و اضافه شدن یک مانع در یک گرید مورد بررسی قرار گرفته است. در [۷] دیاگرام ورونوی توسعه یافته بر روی گریدهای شش ضلعی به‌منظور مسیریابی یک عامل هوشمند محاسبه شده است.

با تغییر محیط و مشاهدات جدید، دیاگرام ورونوی به‌صورت پویا تغییر کرده و دیاگرام جدید از دیاگرام قبلی به‌دست می‌آید. تغییرات در محیط ممکن است مشاهده‌ی یک مانع جدید در گرید و یا حذف یک مانع توسط عوامل خارجی باشد [۴]. همچنین، حرکت مانع در گرید به‌صورت پویا می‌تواند باعث تغییر دیاگرام ورونوی شود. برای محاسبه‌ی دیاگرام ورونوی برای موانع متحرک در فضاها و شرایط مختلف مطالعاتی انجام شده است. به‌عنوان مثال، در [۸] دیاگرام ورونوی موانع دیسکی متحرک، و در [۶] دیاگرام ورونوی نقاط متحرک در صفحه و فضا تحت شرایط محدود مورد بررسی قرار گرفته است.

* ارائه‌دهنده

در این مقاله به بررسی نحوه تغییر دیاگرام ورونوی با حرکت یک مانع در گرید، و بازسازی دیاگرام ورونوی در این شرایط می‌پردازیم. در بخش ۲ به ارائه مفاهیم اولیه و در بخش ۳ به بررسی راه‌کارهایی جهت بازسازی دیاگرام ورونوی با وجود یک مانع متحرک می‌پردازیم. در بخش ۴ راه‌کارهای ارائه شده از لحاظ کارائی مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۲. مفاهیم اولیه

ما در این مقاله مانند [۴] محیط کار ربات را به‌صورت گرید در نظر می‌گیریم. از ساختمان داده‌ای به نام $dist_i$ برای ذخیره‌ی فاصله‌ی iامین سلول گرید تا نزدیک‌ترین مانع به آن سلول استفاده می‌کنیم و این نزدیک‌ترین مانع در ساختمان داده‌ای به نام $obst_i$ ذخیره می‌شود. به‌عنوان مثال اگر $dist_۵ = ۳$ و $obst_۵ = ۹$ باشد، به این معنی است که نزدیک‌ترین مانع به سلول شماره ۵ در سلول شماره ۹ قرار دارد و فاصله این دو سلول برابر ۳ است. بنابراین اگر مانعی در سلول شماره i قرار داشته باشد، برای آن سلول $dist_i = ۰$ و $obst_i = i$ خواهد بود. در ادامه از عبارت "مقدار سلول i" برای $dist_i$ استفاده می‌کنیم.

مقدار هر سلول کمترین فاصله سلول‌ها تا موانع را نشان می‌دهد و با استفاده از آن نواحی ورونوی موانع محاسبه خواهند شد. تعاریف زیر سلول‌های داخلی، مرزی و خارجی ناحیه‌ی ورونوی را معرفی می‌کنند:

تعریف ۱.۲. سلول x متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع O را سلول داخلی ناحیه‌ی ورونوی مانع O گوییم اگر تمام همسایگان x موجود و متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع O باشند.

تعریف ۲.۲. سلول x متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع O را سلول مرزی ناحیه‌ی ورونوی مانع O گوییم اگر x سلول داخلی ناحیه‌ی ورونوی مانع O نباشد.

تعریف ۳.۲. سلول x متعلق به گرید را سلول خارجی ناحیه‌ی ورونوی مانع O گوییم اگر x متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع O نباشد.

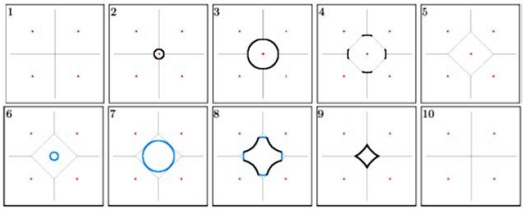
از آن‌جایی که وضعیت گرید ممکن است به‌صورت پویا تغییر کند و مانعی اضافه یا حذف شود، مقادیر ساختمان داده‌ی سلول‌های گرید نیز با هر تغییر باید ویرایش شوند. برای ویرایش این مقادیر از الگوریتم دایجسترا و ساختمان داده‌ی دیگری به نام $dist_i^{new}$ استفاده شده است به‌طوری‌که $dist_i^{new}$ مقدار ویرایش شده فاصله برای سلول شماره i را ذخیره می‌کند و الگوریتم دایجسترا این مقدار را به‌صورت زیر حساب می‌کند [۴]:

$$dist_i^{new} = \min_{n \in adj(i)} \{dist_i, distance(i,n) + dist_n^{new}\}. \quad (۱)$$

در رابطه (۱)، $adj(i)$ بیانگر شماره سلول‌های همسایه با سلول شماره i است که می‌تواند ۴ یا ۸ سلول همسایه درنظر گرفته شود. همچنین $distance(i,n)$ بیانگر فاصله‌ی سلول شماره n از سلول i است که می‌توان آن را فاصله‌ی اقلیدسی در نظر گرفت. رابطه (۱) یک روال سلسله مراتبی را در ویرایش مقادیر کمترین فاصله‌ها ارائه می‌دهد. هنگامی که مانعی به گرید اضافه می‌شود، یک موج، که آن را موج کاهنده می‌نامیم، از سلول مانع شروع می‌شود و مقدار سلول‌ها را کاهش می‌دهد و تا سلول‌هایی که مقدارشان کاهش نیابد پیش می‌رود و منتشر می‌شود. این سلول‌هایی که موج کاهنده در آن‌ها متوقف می‌شود مرز ناحیه‌ی ورونوی جدید را ایجاد می‌کنند. این موج با دستور $dist_o^{new} = ۰$ شروع و با افزودن این سلول به صف اولویت منتشر می‌یابد.

برای پیاده‌سازی این موج از ساختمان داده صف اولویت استفاده شده است. هر سلول که مقدار جدیدی اخذ می‌کند، به این صف افزوده شده تا باعث پیشبرد موج در گرید گردد.

سطر اول در شکل ۱ انتشار موج کاهنده به ازای اضافه شدن یک مانع را نشان می‌دهد.



شکل ۱. سطر بالایی: مراحل انتشار موج کاهنده با افزودن یک مانع در مرکز. سطر پایینی: مراحل انتشار موج افزاینده (شماره‌های ۸،۷،۶) و انتشار موج کاهنده (شماره‌های ۱۰،۹،۸) با حذف یک مانع از مرکز [۴].

هنگامی که مانعی از گرید حذف می‌شود، دو موج ایجاد می‌شود تا نواحی ورونوی جدید به‌دست آید. موج اول را موج افزاینده می‌نامیم و از سلولی که مانع از آن حذف شده شروع می‌شود. این موج با دستور $dist_o^{new} = \infty$ شروع می‌شود و با قرار دادن این سلول به صف اولویت منتشر می‌شود. موج افزاینده باعث افزایش مقدار سلول‌های همسایه می‌شود و مقادیری که برای سلول‌ها به‌دست می‌آورد ناصحیح است! در ابتدا سلول حذف شده مقدار بی‌نهایت اخذ می‌کند. سپس برای هر سلول همسایه که مانع مربوط به آن همان مانع حذف شده باشد، مقدار سلول را که به دلیل همسایگی با مانع حذف شده مقدار کوچکی بود بینهایت قرار می‌دهیم و این باعث می‌شود مقدار جدید این سلول طبق رابطه (۱) از همسایگانش به‌دست آید که البته مقدار ناصحیحی خواهد بود. به همین ترتیب موج افزاینده پیش می‌رود تا جایی که به سلول‌هایی برسیم که متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع حذف شده نباشند. این سلول‌ها در مرز ناحیه‌ی ورونوی مانع حذف شده قرار دارند. در این لحظه موج دوم به‌وجود می‌آید که یک موج کاهنده است. این موج از مقادیر صحیح سلولهای نواحی دیگر استفاده کرده و مقادیر صحیح سلول‌های ناحیه‌ی حذف شده را باز محاسبه می‌کند. سطر دوم در شکل ۱ این دو موج را نشان می‌دهد [۴].

۳. راهکارهای بازساخت دیاگرام ورونوی حساس به حرکت مانع

فرض کنیم مانع مورد نظر از سلول شماره i به سلول شماره j حرکت کند به‌طوری‌که سلول j یکی از ۸ همسایه‌ی سلول i باشد. در این حالت مانع از سلول شماره i حذف شده و در سلول شماره j اضافه شده است. بنابراین برای پیاده‌سازی حرکت مانع از سلول i به سلول j کافیست دستور حذف مانع از سلول i و افزودن مانع در سلول j را اجرا کنیم. این ساده‌ترین و اولین راهکار پیاده‌سازی حرکت مانع است.

در ادامه دو راهکار دیگر برای بازساخت دیاگرام ورونوی پس از جابجایی مانع ارائه خواهیم کرد. راهکار دوم بر اساس عمل شیفت مقادیر سلول‌های گرید پیاده‌سازی شده است و راهکار سوم براساس انتشار یک موج یگانه برای بازساخت دیاگرام ورونوی مطرح می‌شود. کارایی این روش‌ها در بخش ۴ مورد بررسی قرار گرفته است.

۱.۳. بازسازی دیاگرام ورونوی بر اساس شیفت دادن سلول‌ها. در حرکت یک مانع، اگر مقادیر سلول‌های گرید قبل از حرکت مانع را با جدول A و مقادیر سلول‌ها بعد از حرکت را با جدول B در نظر بگیریم، با مقایسه‌ی ناحیه ورونوی مانع حرکت کرده در جداول A و B مشاهده خواهیم کرد که تقریباً اکثر سلول‌های جدول B از شیفت دادن سلول‌های A در جهت حرکت به‌دست می‌آیند.

این سلول‌ها، که مقادیرشان توسط عمل شیفت سلول‌های A به‌دست می‌آید، را سلول‌های داخلی ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده نام‌گذاری کرده‌ایم.

بنابراین، با حرکت یک مانع، مقادیر جدید سلول‌های داخلی آن مانع با عمل شیفت سلول‌های گرید در جهت حرکت محاسبه می‌شوند و نیازی به انتشار موج و قرار دادن این سلول‌ها در صف اولویت نیست. تنها کافیست مقادیر جدید را برای سلول‌های مرزی ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده محاسبه کنیم.

برای به‌دست آوردن مقادیر جدید سلول‌های مرزی، مقدار این سلول‌ها را بی‌نهایت قرار می‌دهیم تا بتوانیم به ترتیب

فاصله آن‌ها از مانع، مقدار صحیح آن‌ها را به کمک همسایگانش و طبق رابطه (۱) به‌دست آوریم. با محاسبه‌ی مقدار صحیح هر سلول، آن سلول را با وزن مقدار جدیدی که اخذ کرده به صف اولویت اضافه می‌کنیم تا انتشار برای آن سلول صورت گیرد.

انتشار موج برای سلول‌های مرزی سه نتیجه‌ی مهم دارد.

اول، وزن سلول‌های مرزی ویرایش شده و مقدار صحیح اخذ می‌کنند.

دوم، برخی از سلول‌های خارجی ناحیه‌ی ورونوی در طی مراحل انتشار و با توجه به مقادیر جدید به‌دست آمده برای سلول‌های مرزی، متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع خواهند شد. به عبارت دیگر، طی عمل انتشار در سلول‌های مرزی، سلول‌های جدید ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده مشخص می‌شوند.

سوم، برخی از سلول‌های مرزی در طی مراحل انتشار با توجه به فاصله گرفتن مانع از آن‌ها، تعلق خود را به ناحیه‌ی ورونوی مانع از دست می‌دهند و به ناحیه‌ی ورونوی مانع مجاور متعلق خواهند شد.

بنابراین، با حرکت یک مانع، الگوریتم بازسازی دیاگرام ورونوی براساس شیفت دادن سلول‌ها را به‌صورت زیر مطرح می‌کنیم:

(۱) تمام سلول‌های ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده را به سمت جهت حرکت شیفت می‌دهیم. این کار با کپی مقدار سلول‌های مجاور در خلاف جهت حرکت مانع انجام می‌شود.
(۲) مقدار سلول‌های مرزی ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده را بی‌نهایت قرار می‌دهیم.
(۳) به ترتیب فاصله از مانع به ازای هرسلول دارای مقدار بی‌نهایت به شماره‌ی i:
(آ) مقدار صحیح سلول i را به کمک همسایگانش طبق رابطه (۱) حساب می‌کنیم و به‌عنوان مقدار جدید در آن قرار می‌دهیم.
(ب) سلول i را با مقدار جدیدش در صف اولویت قرار می‌دهیم.

در مرحله ۱ از الگوریتم مقدار سلول‌های داخلی مشخص می‌شود و در قسمت ۳آ مقدار سلول‌های مرزی مشخص می‌شود و در قسمت ۳ب مرز جدید مشخص می‌شود.

۲.۳. **بازسازی دیاگرام ورونوی بر اساس انتشار موج کاهنده-افزاینده.** به‌منظور حذف یک مانع، با بی‌نهایت قرار دادن مقدار سلول مانع حذف شده، مقدار سلول‌های اطراف تغییر می‌کند و به‌این‌صورت یک موج افزاینده صورت می‌گیرد تا به مرز نواحی ورونوی دیگر برسد. سپس با استفاده از مقادیر سلول‌های ورونوی نواحی همسایه، مقدار صحیح سلول‌های تغییر یافته به‌دست می‌آید. به همین ترتیب سلول‌های همسایه ویرایش می‌شوند و مقادیر صحیح اخذ می‌کنند و به‌این‌صورت یک موج کاهنده صورت می‌گیرد تا جایی که سلول مانع حذف شده دارای وزن بی‌نهایت مقدار صحیح خود را اخذ کند.

اما در حرکت یک مانع نیازی به بی‌نهایت قرار دادن مقدار سلول مانع نیست. در عمل حذف، از آن‌جایی که مقدار سلول مانع بعد از حذف مشخص نیست از دو انتشار استفاده می‌شود تا مقدار صحیح به‌دست آید. اما در عمل حرکت یک مانع، مقادیر هر دو سلول مبدأ و مقصد حرکت مشخص است. سلول مقصد مقدار صفر و سلول مبدأ مقداری معادل با فاصله آن تا مقصد اخذ می‌کند و هر دو مقدار صحیح است. بنابراین، تنها کافیست این دو سلول را با وزن مقادیر جدید به صف اضافه کنیم و با انجام تنها یک موج انتشار کاهنده-افزاینده سلول‌های دیگر را ویرایش کنیم. شبه‌کد ارائه شده در قسمت الف از شکل ۲ نشان دهنده‌ی حرکت مانع می‌باشد.

در انتشار موج کاهنده گفته شده در بخش ۲، در صورتی که مقدار جدید محاسبه شده برای یک سلول در طول انتشار کمتر از مقدار آن سلول باشد، آن مقدار کمتر جایگزین مقدار سلول می‌شود و سلول ویرایش شده با وزن مقدار جدید خود جهت پیشبرد موج انتشار به صف اولویت اضافه خواهد شد. اما در این بخش، در دو حالت مقدار یک سلول در طول انتشار کاهنده-افزاینده تغییر می‌کند. اول این‌که مقدار جدید برای آن سلول کاهش یابد و دوم این‌که آن سلول نامعتبر باشد. سلول متعلق به ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده نامعتبر گفته می‌شود اگر فاصله سلول از سلول مبدأ مانع کمتر یا مساوی فاصله سلول از سلول مقصد مانع باشد.

معتبر بودن هر سلول پس از حرکت یک مانع، در حین انتشار موج کاهنده–افزاینده، زمانی که موج به یک سلول می‌رسد، بررسی خواهد شد. برای پیاده‌سازی این روش باید عمل بررسی اعتبار یک سلول در شبه‌کد انتشار کاهنده–افزاینده قرار داده شود. بنابراین شبه‌کد مربوط به انتشار کاهنده–افزاینده در قسمت ب از شکل ۲ ارائه می‌گردد و بررسی اعتبار یک سلول در قسمت ج از شکل ۲ نمایش داده می‌شود.

```
Move_obstacle(i, j, O)
{
1    dist_j^new = 0
2    dist_i^new = distance(i, j)
3    obst_j = 0
4    obst_i = j
5    Insert(OPEN, j, dist_j^new)
6    Insert(OPEN, i, dist_i^new)
}
```

الف

```
ProcessLower_Raise(s)
{
1  Foreach n ∈ Adj(s)
2    if (tie_n = s)
3      insert(TIES, n)
4    if(dist_n^new > dist_s^new)
5      d' = distance(n, s) + dist_s^new
6      if(d' < dist_n^new || Is_Invalid(n) )
7          valid[n] = true
8          dist_n^new = d'
9          parent_n = s
10         obst_n = obst_s
11         Insert(OPEN, n, dist_n^new)
}
```

ب

```
bool Is_Invalid(n)
{
1  If (Valid[n] == true)
2     Return false
3  If(dist_index(n, i) < dist_index(n, j))
4     Return true
5  else   Return false
}

float dist_index(cell a, cell b)
{
1     i_1 = row_index(a)
2     j_1 = column_index(a)
3     i_2 = row_index(b)
4     j_2 = column_index(b)
5     Return sqrt((i_1 − i_2)^2 + (j_1 − j_2)^2)
}
```

ج

شکل ۲. الف: شبه‌کد راهکار سوم برای پیاده‌سازی حرکت مانع O از سلول i به سلول j.
ب: شبه‌کد انتشار موج کاهنده–افزاینده. ج: بررسی معتبر بودن یک سلول.

از ساختمان داده‌ی $valid$ جهت بررسی معتبر شدن سلول‌های نامعتبر استفاده می‌کنیم. یک سلول نامعتبر پس از ویرایش شدن و اخذ مقدار صحیح معتبر خواهد شد. روال $Is\_Invalid$ معتبر بودن یک سلول را به کمک تابع فاصله و ساختمان داده‌ی $valid$ بررسی می‌کند. در خط شماره ۶ از روال مربوط به انتشار موج کاهنده–افزاینده در قسمت ب از شکل ۲، اگر مقدار جدید به‌دست آمده کمتر از مقدار قبلی سلول باشد یا اگر سلول نامعتبر باشد، مقدار سلول ویرایش می‌شود. این سلول معتبر شده و به صف اولویت اضافه می‌شود.

بنابراین، با جابجایی مانع از سلول i به سلول j، این سلول‌ها با مقادیر جدید خود به صف اولویت اضافه شده و باعث انتشار موج کاهنده–افزاینده می‌شوند. طبق الگوریتم، در طول انتشار مقدار سلول‌های نامعتبر افزایش می‌یابد و سلول‌هایی که مقدار جدیدشان کمتر می‌شود کاهش می‌یابند. موج انتشار تا مرزهای ناحیه‌ی ورونوی پیش می‌رود و مرزهای جدید مانع حرکت کرده را ایجاد می‌کند.

۴. بررسی و مقایسه‌ی راهکارها

از آن‌جایی که در الگوریتم‌های ارائه شده عملیات و مقایسه‌های انجام شده روی سلول‌ها مبتنی بر ورود آن‌ها در صف اولویت است، ما در این مقاله برای بررسی کارایی و مقایسه‌ی راهکارها از لحاظ پیچیدگی زمانی و فضایی تنها به بررسی تعداد سلول‌های اضافه شده به صف اولویت می‌پردازیم. همچنین در هر سه راهکار از درنظر گرفتن سلول‌هایی که از ناحیه‌ی ورونوی همسایه به ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده افزوده می‌شوند صرف نظر می‌کنیم.

در راهکار اول به سه موج انتشار برای بازسازی دیاگرام ورونوی نیاز است. دو موج جهت حذف مانع از مبدأ و یک موج جهت افزودن مانع در مقصد. در هر موج تقریباً تمام سلول‌های ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده در صف اولویت قرار می‌گیرند و باعث پیشروی موج می‌شوند. بنابراین اگر ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده دارای n سلول باشد، برای بازسازی دیاگرام ورونوی به تعداد $3n$ سلول به صف اولویت اضافه می‌شود. البته در این راهکار لزومی ندارد سلول مقصد مجاور سلول مبدأ باشد.

ما در راهکار دوم با استفاده از عمل شیفت دادن سلول‌ها، مقدار جدید سلول‌های داخلی را به‌دست می‌آوریم و با قرار دادن سلول‌های مرزی در صف اولویت مرز جدید ناحیه‌ی ورونوی مانع را محاسبه می‌کنیم. این راهکار برای موانعی مفید است که ناحیه‌ی ورونوی آن‌ها دارای سلول‌های داخلی زیادی باشد. زیرا بدون انجام محاسبات و انتشار موج و تنها با استفاده از شیفت سلول همسایه مقدار آن‌ها محاسبه می‌شود.

از طرف دیگر، با حرکت یک خانه‌ای مانع در گرید، مرز ناحیه‌ی ورونوی مانع، پیشرفت و پسرفت زیادی در نواحی دیگر ندارد. بنابراین با محاسبه‌ی مقدار جدید یک سلول مرزی و قرار دادن آن در صف اولویت موج مربوط به آن سلول مرزی پیشروی زیادی در اطراف آن سلول نخواهد داشت. همان‌طور که گفته شد از این پیشروی ناچیز در نواحی همسایه در تمامی راهکارها صرف نظر می‌کنیم.

بنابراین در راهکار دوم اگر فرض کنیم ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده دارای n سلول باشد که k سلول داخلی و m سلول مرزی است، در این‌صورت مقدار k سلول به‌صورت مستقیم به‌دست می‌آید و با قرار دادن m سلول در صف اولویت دیاگرام ورونوی بازسازی خواهد شد. این تعداد در مقایسه با تعداد $3m$ در راهکار اول کمتر است به‌خصوص زمانی که مقدار m نسبت به k کوچک باشد.

البته در این راهکار هرچند که برای محاسبه‌ی سلول‌های داخلی نیازی به انتشار موج و عملیات مربوط به آن نیست، اما نباید از عملیات لازم برای عمل شیفت سلول‌ها صرف نظر کرد. همچنین از دیگر مواردی که در این راهکار باید در نظر گرفته شود زمان لازم برای مرتب سازی سلول‌های مرزی به ترتیب فاصله از مانع است.

در راهکار سوم با قرار دادن دو سلول مبدأ و مقصد در صف اولویت و انتشار تنها یک موج، دیاگرام ورونوی نهایی را بازسازی می‌کنیم. در طول انتشار اگر مقدار یک سلول کاهش یابد یا اگر یک سلول نامعتبر باشد مقدار جدید آن محاسبه می‌شود و با مقدار جدید به صف اولویت اضافه می‌شود.

بنابراین یک موج تا انتهای ناحیه‌ی ورونوی مقادیر جدید سلول‌ها را محاسبه می‌کند. اگر ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده دارای n سلول باشد، تمامی n سلول به صف اولویت رفته و مقدار جدید آن‌ها محاسبه می‌شود. البته همانند راهکارهای قبل از در نظر گرفتن سلول‌های افزوده شده به ناحیه‌ی ورونوی صرف نظر می‌کنیم.

اگر فرض کنیم ناحیه‌ی ورونوی مانع حرکت کرده دارای n سلول باشد که k سلول داخلی و m سلول مرزی است، زمانی که مقدار m بیشتر از مقدار k باشد با توجه به سرباری که عملیات شیفت و مرتب سازی در راهکار دوم دارد ممکن است راهکار سوم بهتر و سریعتر به نتیجه برسد. راهکار سوم با انتشار تنها یک موج مقدار سلول‌ها را ویرایش می‌کند و عملیات سرباری مانند راهکار دوم ندارد. همان‌طور که گفته شد نامعتبر بودن یک سلول نیز در حین انتشار موج بررسی می‌شود و هزینه‌ی عملیاتی به الگوریتم اضافه نمی‌کند.

بنابراین هر دو راهکار دوم و سوم برای بازسازی دیاگرام ورونوی در حرکت یک مانع کارایی بسیار بالاتری نسبت به راهکار اول دارند و می‌توان با استفاده از این راهکارها دیاگرام ورونوی یک مانع را پس از حرکت در زمان مورد قبول بازسازی کرد.

۵. نتیجه‌گیری

دیاگرام ورونوی یکی از مفاهیم مهم و کاربردی در هندسه محاسباتی است. محاسبه برخط و پویای دیاگرام ورونوی کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف مانند رباتیک دارد. ما در این مقاله به بازسازی پویای دیاگرام ورونوی پس از حرکت مانع در محیط گریدی پرداختیم و به این منظور، الگوریتم‌هایی ارائه نمودیم.

الگوریتم اول با حذف مانع از مبدأ و افزودن مانع در مقصد نواحی ورونوی موانع را به‌روزرسانی می‌کند.

الگوریتم دوم با شیفت نواحی ورونوی در جهت حرکت به بازسازی دیاگرام ورونوی می‌پردازد و راهکار سوم با انتشار یک موج کاهنده–افزاینده، ناحیه ورونوی مانع حرکت کرده را بازسازی می‌کند. هر کدام از این الگوریتم‌های بازسازی پویای دیاگرام ورونوی در شرایط خاصی بهتر از دیگری عمل می‌کنند.

مراجع

1. F. Aurenhammer, *Voronoi diagrams—a survey of a fundamental geometric data structure*, ACM Comput. Surv. (CSUR) **23** (3) (1991) 345–405.
2. F. Benavides, G. Tejera, M. Pedemonte and S. Casella, *Real path planning based on genetic algorithm and Voronoi diagrams*, In IX Latin Amer. Robot. Sym. IEEE Colombian Conf. Auto. Control (2011) pp. 1–6.
3. S. Fortune, *A sweepline algorithm for voronoi diagrams*, Algorithmica **2** (2) (1987) 153–174.
4. N. Kalra, D. Ferguson and A. Stentz, *Incremental reconstruction of generalized Voronoi diagrams on grids*, Robot. Autonom. Syst. **57** (2) (2009) 123–128.
5. S. Shojaeipour, S. M. Haris, K. Khalili and A. Shojaeipour, *Motion planning for mobile robot navigation using combine quad-tree decomposition and voronoi diagrams*, In 2nd Int. Conf. Comput. Auto. Eng. (ICCAE) **1** (2010) 90–93.
6. A. Weisman, L. P. Chew and K. Kedem, *Voronoi diagrams of moving points in the plane and of lines in space: tight bounds for simple configurations*, Inform. Process. Lett. **92** (5) (2004) 245–251.
7. F. Tang, X. You, X. Zhang, and K. Li, *Hexagon-Based Generalized Voronoi Diagrams Generation for Path Planning of Intelligent Agents*, Math. Probl. Eng. **2020** (2020). DOI:10.1155/2020/5750739
8. C. Song, J. Cha, M. Lee and D. S. Kim, *Dynamic Voronoi diagram for moving disks*, IEEE Trans. Visual. Comput. Graph. (2019). DOI:10.1109/TVCG.2019.2959321

پست الکترونیکی: asaeedi@kashanu.ac.ir
پست الکترونیکی: mohades@aut.ac.ir

ابرضرب ساختارها در منطق فازی مرتبه اول مبتنی بر نرم مثلثی پیوسته

سید محمد امین خاتمی*
گروه علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

چکیده. ابتدا یادآوری داریم از معنی‌شناسی متریک برای منطق پایه که دوگان معنی‌شناسی متداول است و همچنین مروری داریم بر مفهوم ساختار پیوسته در منطق پایه با معنی‌شناسی متریک. بعد از این مرور و برشمردن نتایج قبلی، شرایط اثبات قضیه فشردگی در منطق پایه با معنی‌شناسی متریک را بهبود می‌دهیم. سپس با استفاده از قضیه فشردگی و مرور خواص فیلترها و ابرفیلترها، به کمک مفهوم فیلتر، برای هر مجموعه نامتناهی I و هر خانواده $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ از ساختارهای پیوسته در منطق فازی با معنی‌شناسی متریک، فراضرب آن‌ها را معرفی می‌کنیم و در انتها قضیه واش را ثابت می‌کنیم.
واژه‌های کلیدی: منطق فازی، منطق فازی پیوسته، فراضرب ساختارها.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 03B50, 03B52, 03C20.

۱. مقدمه

فراضرب ساختارها در منطق و همچنین بعضاً در آنالیز و جبر یکی از تکنیک‌های متداولی است که منجر به پیدایش ساختارهای جدیدی با همان خاصیت ساختارهای اولیه می‌شود. استفاده از چنین تکنیکی به این دلیل است که در حالت نامتناهی، حاصل‌ضرب مستقیم ساختارها و یا اجتماع آن‌ها ممکن است همه خواص مرتبه اول را حفظ نکنند.

اگر $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای نامتناهی از ساختارهای مرتبه اول در منطق کلاسیک باشد، آنگاه به ازای هر فرافیلتر $\mathfrak{F}$ روی مجموعه I، می‌توان فراضرب $\mathcal{M}_i$ها را تشکیل داد. به‌علاوه هر گزاره‌ای که تقریباً در همه $\mathcal{M}_i$ها درست باشد، در فراضرب آن‌ها نیز درست است و بالعکس.

در سال ۲۰۰۳ هنسون و همکارانش ساختار فراضربی را برای ساختارهای آنالیز ریاضی معرفی کردند [۴]. پس از آن در سال ۲۰۰۸ بن‌یاکوف و همکارانش با ایده گرفتن از کارهای هنسون، ساختار فراضربی را برای منطقی موسوم به منطق پیوسته که در واقع تعمیمی از منطق لوکاسیویچ بود معرفی کردند [۲]. در سال ۲۰۱۵ ساختار فراضربی برای منطق گودل معرفی شد [۶].

در مقاله حاضر با تعمیم ایده‌های موجود در [۱] و [۵] و [۶]، ساختار فراضربی را برای رده همه منطق‌های فازی مبتنی بر s-نرم پیوسته معرفی می‌کنیم.

۲. معنی‌شناسی متریک برای منطق فازی

منطق فازی مبتنی بر t- نرم پیوسته موسوم به منطق پایه در سال ۱۹۹۸ توسط هایک معرفی شد [۳]. سه منطق مشهور لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی در واقع حالات خاصی از منطق پایه هستند. در این منطق مجموعه مقادیر درستی بازه یکه واحد $[0,1]$ است و روابط منطقی پایه عبارتند از $\{\&, \to, \bot\}$ که تعبیر $\&$ یک t-نرم پیوسته $*$[1]، تعبیر $\to$ مانده $*$ [2] که آن‌را با $\Rightarrow$ نمایش می‌دهیم و تعبیر $\bot$ عدد صفر است. t-نرم‌های لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی عبارتند از

- لوکاسویچ: $x *_L y = \max\{0, x+y-1\}$،
- گودل: $x *_G y = \min\{x, y\}$،

* ارائه‌دهنده

[1] تابعی پیوسته مثل $* : [0,1]^2 \to [0,1]$ که روی هر دو مؤلفه صعودی است و به‌علاوه به ازای هر $x, y, z \in [0,1]$، $x*y = y*x$، $(x*y)*z = x*(y*z)$ و $x*1 = x$.

[2] تابعی است مثل $\Rightarrow : [0,1]^2 \to [0,1]$ به‌طوری که به ازای هر $x, y, z \in [0,1]$، $x*z \le y$ اگر و فقط اگر $z \le x \Rightarrow y$.

- حاصل‌ضربی: $x *_{\pi} y = x.y$.

در مورد مانده یک t-نرم به‌راحتی با توجه به این‌که مجموعه مقادیر درستی بازه یکه واحد است و نیز با توجه به پیوستگی $*$، می‌توان نتیجه گرفت که $x \Rightarrow y = \max\{z : x * z \leq y\}$ و لذا چنان‌چه $x \leq y$ آن‌گاه $x \Rightarrow y = ۱$. در مورد t-نرم‌های لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی برای $x > y$ داریم

- لوکاسویچ: $x \Rightarrow_{L} y = ۱ + y - x$،
- گودل: $x \Rightarrow_{G} y = y$،
- حاصل‌ضربی: $x \Rightarrow_{\pi} y = y/x$.

روابط منطقی دیگر مثل $\wedge$، $\vee$، $\leftrightarrow$، $\neg$ و $\top$ در منطق پایه از روی روابط منطقی $*$ و $\&$ و $\bot$ ساخته می‌شوند. در بین مانده‌های t-نرم‌های مشهور، فقط مانده t-نرم لوکاسیویچ پیوسته است و مانده t-نرم‌های گودل و حاصل ضربی پیوسته نیستند. پیوستگی تعبیر روابط منطقی در منطق لوکاسویچ باعث شده است که خیلی از نتایج منطق کلاسیک را به منطق لوکاسیویچ (و یا توسیع‌های آن که دارای روابط منطقی پیوسته هستند) تعمیم داد. در حالت کلی منطق پایه و یا بعضی از حالت‌های مشهور آن مثل منطق گودل و منطق حاصل‌ضربی، یکی از دلایل محدودیت توسعه نتایج منطق کلاسیک، عدم پیوستگی بعضی از تعبیرهای روابط منطقی است.

نویسنده مقاله و پورمهدیان، در سال ۲۰۱۶ با ایده گرفتن از منطق پیوسته معرفی شده توسط بن‌یاکوف و همکارانش [۲]، با در نظر گرفتن دوگان معنی‌شناسی متداول روی منطق گودل، و در نظر گرفتن متریکی روی $[۰, ۱]$ که تعبیر رابط منطقی $\leftrightarrow$ بود، نشان دادند که تعبیر همه روابط منطقی در منطق گودل به توابعی پیوسته تبدیل می‌شوند [۶]. در نهایت مجدداً با همکاری مشترک نویسنده و پورمهدیان این کار برای منطق پایه گزاره‌ای انجام شد [۱].

نویسنده گزارشی از مطالعه منطق فازی مرتبه اول با معنی‌شناسی متریک را به‌صورت موردی برای سه منطق لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی در [۸] ارائه کرد. در حالت عمومی منطق پایه مرتبه اول نیز مطالعه معنی‌شناسی متریک توسط نویسنده به‌صورت کلی انجام شده است و حتی به کمک آن قضیه فشردگی در حالت کلی برای منطق پایه مرتبه اول به اثبات رسید که موضوع در [۵] در حال داوری است.

در معنی‌شناسی متریک که دوگان معنی‌شناسی متداول برای منطق پایه است، تعبیر $\&$ با یک s-نرم به‌جای t-نرم صورت می‌گیرد. یک s-نرم پیوسته تابعی است پیوسته مثل $\star : [۰, ۱]^{۲} \to [۰, ۱]$ که روی هر دو مؤلفه صعودی است و به‌علاوه به ازای هر $x, y, z \in [۰, ۱]$، $x \star y = y \star x$، $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ و $x \star ۰ = x$. به‌علاوه $\star$ را مانده $\dot{\to}$ می‌نامند هرگاه

$$x \dot{\to} y \leq z \text{ اگر و فقط اگر } y \leq x \star z \ .$$

s-نرم‌های متناظر با t-نرم‌های لوکاسیویچ، گودل و حاصل‌ضربی عبارتند از

- لوکاسویچ: $x \star_{L} y = \min\{۱, x + y\}$،
- گودل: $x \star_{G} y = \max\{x, y\}$،
- حاصل‌ضربی: $x \star_{\pi} y = x + y - x.y$.

در معنی‌شناسی متریک، ۱ را به‌عنوان غلط محض و تعبیر $\bot$، یک s-نرم پیوسته را برای تعبیر رابط منطقی $\&$، و مانده این s-نرم پیوسته را برای تعبیر $\to$ در نظر می‌گیریم. تعبیر رابط‌های منطقی $\wedge$ و $\vee$ و $\top$ نیز به‌صورت مشابه دوگان تعبیر متداولشان و به ترتیب برابر تابع ماکزیمم، تابع مینیمم و تابع ثابت صفر می‌شود. تعبیر رابط منطقی $\leftrightarrow$ یک متریک است و به همین دلیل این معنی‌شناسی را متریک می‌نامیم. به‌علاوه چنان‌چه s-نرم $\star$ ضعیف‌تر از s-نرم لوکاسیویچ باشد [۳] و $[۰, ۱]$ و $[۰, ۱]^{۲}$ را با توپولوژی القایی این متریک در نظر بگیریم، تعبیر همه روابط منطقی توابعی پیوسته خواهند بود.

قضیه ۱.۲. [۱] اگر $\star$ یک s-نرم پیوسته و $\dot{\to}$ مانده آن باشد و تابع d با ضابطه $d(x, y) = (x \dot{\to} y) \star (y \dot{\to} x)$ تعریف شود، آن‌گاه به ازای هر $x, y, z \in [۰, ۱]$، $d(x, y) \leq d(x, z) \star d(z, y)$. به‌علاوه چنان‌چه $\star$ از s-نرم لوکاسیویچ ضعیف‌تر باشد، آن‌گاه d یک متریک روی $[۰, ۱]$

[۳] به ازای هر x و y، $x \star y \leq x \star_{L} y$

است. به‌علاوه تابع $\mathbf{d}\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = d(x_1,y_1) \star d(x_2,y_2)$ یک متریک روی $[0,1]^2$ تعریف می‌کند و $\star : ([0,1],d) \to ([0,1]^2,\mathbf{d})$ و $\dot{\to} : ([0,1]^2,\mathbf{d}) \to ([0,1],d)$ توابعی پیوسته هستند.

در منطق مرتبه اول فازی با معنی‌شناسی معمولی، تعبیر سور عمومی با تابع inf و تعبیر سور وجودی با تابع sup می‌باشد. در معنی‌شناسی متریک این تعابیر نیز دوگان می‌شوند. یعنی به ازای هر فرمول $\psi(y,\bar{x})$ و هر ساختار مرتبه اول $\mathcal{M}$ چنان‌چه تعبیر فرمول دلخواه χ را با $\chi^{\mathcal{M}}$ نمایش دهیم، آن‌گاه

- اگر $\varphi(\bar{x}) = \forall y\ \psi(y,\bar{x})$ آن‌گاه $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \sup_{b\in M}\{\psi^{\mathcal{M}}(b,\bar{a})\}$.
- اگر $\varphi(\bar{x}) = \exists y\ \psi(y,\bar{x})$ آن‌گاه $\varphi^{\mathcal{M}}(\bar{a}) = \inf_{b\in M}\{\psi^{\mathcal{M}}(b,\bar{a})\}$.

یکی از مهم‌ترین ابزارهایی که در این‌جا برای ساختن فراضرب ساختارها از آن استفاده کرده‌ایم، رابطه تشابه است. محمول دو موضعی ρ را یک محمول تشابه می‌نامند هرگاه اصول تشابه به‌صورت زیر برای آن درست باشند:

S۱ $\forall x \rho(x,x)$.
S۲ $\forall x \forall y \big(\rho(x,y) \to \rho(y,x)\big)$.
S۳ $\forall x \forall y \forall z \big[\big(\rho(x,y)\&\rho(y,z)\big) \to \rho(x,z)\big]$.

در معنی‌شناسی متریک، تعبیر رابطه تشابه نیز یک متریک است.

قضیه ۲.۲. [۵] اگر s-نرم پیوسته $\star$ از s-نرم لوکاسیویچ ضعیف‌تر باشد و با معنی‌شناسی متریک ساختار $\mathcal{M}$ در اصول تشابه صدق کند، آن‌گاه تعبیر ρ در $\mathcal{M}$ یک شبه متر است. به‌علاوه چنان‌چه تعریف کنیم

$$\rho_n(\bar{x},\bar{y}) = \rho(x_1,y_1)\&\rho(x_2,y_2)\&...\&\rho(x_n,y_n),$$

آن‌گاه تعبیر ρ_n نیز یک شبه متر روی M^n می‌باشد (M عالم سخن $\mathcal{M}$ است).

اصول تشابه در مورد خواص درونی رابطه تشابه (تساوی) هستند. خواص بیرونی مساوی بودن این است که اشیاء مساوی باید برآیندهای یکسانی را نتیجه دهند. این خواص بیرونی مرتبط با هر نماد محمولی P و هر نماد تابعی f در زبان مرتبه اول زمینه عبارتند از اصول «مصداقیت تشابه» به‌صورت زیر

E۱ $\forall \bar{x},\forall \bar{y}\big[\rho_n(\bar{x},\bar{y}) \to \big(P(\bar{x}) \leftrightarrow P(\bar{y})\big)\big]$،
E۲ $\forall \bar{x},\forall \bar{y}\big[\rho_n(\bar{x},\bar{y}) \to \rho\big(f(\bar{x}),f(\bar{y})\big)\big]$.

اگر یک نماد محمولی یا تابعی در اصول مصداقیت تشابه صدق کند، تعبیر آن پیوسته خواهد بود.

قضیه ۳.۲. [۵] فرض کنید در یک منطق پایه با معنی‌شناسی متریک که مبتنی بر s-نرمی ضعیف‌تر از s-نرم لوکاسیویچ است، ساختار $\mathcal{M}$ در اصول تشابه صدق کند. در این‌صورت اگر نماد محمولی P در اصل E۱ صادق باشد، آن‌گاه تابع $P^{\mathcal{M}} : (M^n,\rho_n^{\mathcal{M}}) \to ([0,1],d)$ یک تابع پیوسته ۱-لیپشیتس خواهد بود. همچنین اگر نماد محمولی f در اصل E۲ صادق باشد، آن‌گاه تابع $f^{\mathcal{M}} : (M^n,\rho_n^{\mathcal{M}}) \to (M,\rho^{\mathcal{M}})$ نیز یک تابع پیوسته ۱-لیپشیتس خواهد بود.

اگر همه نمادهای تابعی و محمولی در زبان مرتبه اول زمینه، در اصول مصداقیت تشابه صادق باشند، ساختار مربوطه را یک ساختار پیوسته می‌نامند. در یک ساختار پیوسته تعبیر هر فرمولی پیوسته است.

قضیه ۴.۲. [۵] فرض کنید در یک منطق پایه با معنی‌شناسی متریک که s-نرم آن ضعیف‌تر از s-نرم لوکاسیویچ است، ساختار $\mathcal{M}$ در اصول تشابه صدق کند و به‌علاوه همه نمادهای تابعی و محمولی در اصول مصداقیت تشابه صدق کنند. در این‌صورت تعبیر همه فرمول‌ها در ساختار $\mathcal{M}$ پیوسته ۱-لیپشیتس خواهد بود.

۳. فیلتر و فرافیلتر

در این بخش مروری داریم بر مفهوم فیلتر و فرافیلتر و چند واقعیت در مورد آن‌ها. اگر S یک مجموعه ناتهی باشد، آن‌گاه یک فیلتر $\mathfrak{F}$ روی مجموعه S، خانواده‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های ناتهی S با خواص زیر است:

(۱) به ازای هر $A,B \in \mathfrak{F}$، $A \cap B \in \mathfrak{F}$.

(۲) به ازای هر $A \in \mathfrak{F}$ و هر $C \supseteq A$، $C \in \mathfrak{F}$.

فیلتر $\mathfrak{F}$ روی S را یک فرافیلتر می‌نامند هرگاه به ازای هر $A \subseteq S$، یا $A \in \mathfrak{F}$ و یا $S \setminus A \in \mathfrak{F}$. با استفاده از لم زرن می‌توان نشان داد به ازای هر فیلتر $\mathfrak{D}$ یک فرافیلتر $\mathfrak{F}$ شامل $\mathfrak{D}$ وجود دارد.

اگر مجموعه‌ای مثل $\mathfrak{D}$ از زیرمجموعه‌های S دارای خاصیت اشتراک متناهی باشد، آنگاه یک فیلتر $\mathfrak{F}$ و لذا یک فرافیلتر $\mathfrak{F}'$ شامل $\mathfrak{D}$ وجود دارد.

اگر X و I دو مجموعه ناتهی و f یک تابع از I بتوی X باشد و بعلاوه $\mathfrak{F}$ یک فیلتر روی I باشد، آنگاه مجموعه $\{f(\chi) : \chi \in \mathfrak{F}\}$ دارای خاصیت اشتراک متناهی است و لذا مشمول در یک فیلتر روی X است که آن‌را با $f(\mathfrak{F})$ نمایش می‌دهند.

اگر X یک فضای توپولوژیک و $\mathfrak{F}$ یک فیلتر روی X باشد. می‌گویند فیلتر $\mathfrak{F}$ همگرا به عنصر $x \in X$ است هرگاه به ازای هر زیرمجموعه باز U از نقطه x، $U \in \mathfrak{F}$. به‌علاوه در این‌صورت نقطه x را یک نقطه حدی فیلتر $\mathcal{F}$ می‌نامند و می‌نویسند $\mathfrak{F} \to x$.

اگر X یک فضای توپولوژیک و I یک مجموعه ناتهی باشد، می‌گویند $\mathfrak{F}$ -حد خانواده $\{x_i\}_{i\in I}$ برابر $x \in X$ است و می‌نویسند $\lim_{\mathfrak{F}} x_i = x$. هرگاه به ازای هر مجموعه باز U از x، $\{i \in I : x_i \in U\} \in \mathfrak{F}$.

اگر X و Y دو فضای توپولوژیک و $f : X \to Y$ یک تابع پیوسته در نقطه $x_\circ$ باشد و به‌علاوه فیلتر $\mathfrak{F}$ روی X همگرا به نقطه $x_\circ$ باشد، آنگاه $f(\mathfrak{F}) \to f(x_\circ)$.

اگر X و Y دو فضای توپولوژیک، f تابعی از X به‌توی Y و I یک مجموعه ناتهی و $\mathfrak{F}$ یک فیلتر روی I باشد، آنگاه هر وقت برای خانواده $\{x_i\}_{i\in I}$ از عناصر X، $\lim_{\mathcal{F}} x_i = x$ و تابع f در نقطه x پیوسته باشد، خواهیم داشت $f(\lim_{\mathcal{F}} x_i) = \lim_{\mathcal{F}} f(x_i)$.

۴. نتایج اصلی

نتایج اصلی این مقاله مشتمل بر دو بخش هستند. در بخش اول نتایج ارائه شده در [۵] را در مورد معنی‌شناسی متریک برای منطق پایه تعمیم می‌دهیم. به‌عبارت دقیق‌تر نشان می‌دهیم در همه نتایج مربوط به معنی‌شناسی متریک که در بخش ۲ این مقاله آن‌ها را ذکر کردیم، شرط ضعیف‌تر بودن s-نرم $\star$ از s-نرم لوکاسیویچ قابل حذف است. در بخش دوم فراضرب ساختارها را برای منطق پایه با معنی‌شناسی متریک معرفی می‌کنیم و قضیه واش را برای منطق پایه با معنی‌شناسی متریک ثابت می‌کنیم.

۱.۴. تعمیم معنی‌شناسی متریک. در این بخش، توپولوژی روی $[\circ, 1]$ و $[\circ, 1]^2$ معرفی می‌کنیم که تحت آن تعبیر همه روابط منطقیِ منطق پایه توابعی پیوسته می‌شوند. توجه کنید که قبلاً در بخش ۲ مقاله، با شرط ضعیف‌تر بودن s-نرم $\star$ از s-نرم لوکاسیویچ، این موضوع را داشتیم ولی اکنون شرط ضعیف‌تر بودن s-نرم $\star$ از s-نرم لوکاسیویچ حذف می‌شود.

تعریف ۱.۴. فرض کنید $\star$، $\to$، d و $\mathbf{d}$ همان‌هایی باشند که در قضیه ۱.۲ آمده‌اند. به ازای هر $r \in (\circ, 1]$، $\star$-گوی باز حول $a \in [\circ, 1]$ به شعاع r عبارت است از

$$N_r(a) = \{b \in [\circ, 1] : d_\star(a, b) < r\}.$$

به‌طور مشابه $\star$-گوی باز حول $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in [\circ, 1]^2$ و با شعاع r عبارت است از

$$\mathbf{N}_r(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} \in [\circ, 1]^2 : \mathbf{d}_\star(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < r\}.$$

زیرمجموعه G از $[\circ, 1]$ را $\star$-باز می‌نامیم هرگاه به ازای هر $a \in G$ شعاع $r > \circ$ موجود باشد به‌طوری که $N_r(a) \subseteq G$. زیرمجموعه‌های $\star$-بازِ $[\circ, 1]^2$ به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

قضیه ۲.۴. با نمادگذاری تعریف ۱.۴، خانواده همه زیرمجموعه‌های $\star$-بازِ $[\circ, 1]$ که آن‌را با $T_\star$ نمایش می‌دهیم یک توپولوژی روی $[\circ, 1]$ تشکیل می‌دهند. همچنین خانواده همه زیرمجموعه‌های $\star$-بازِ $[\circ, 1]^2$ که آن‌را با $T_\bigstar$ نمایش می‌دهیم یک توپولوژی روی $[\circ, 1]^2$ تشکیل می‌دهد.

اثبات. به‌وضوح مجموعه تهی و $[۰,۱]$ متعلق به $T_\star$ هستند.

فرض کنید $A,B \in T_\star$. اگر $A\cap B$ تهی باشد که متعلق به $T_\star$ است و در غیر این‌صورت برای هر عنصر $a\in A\cap B$ چون در مجموعه A و B هر دو $\star$-باز هستند، لذا $r_A>۰$ و $r_B>۰$ وجود دارند که $N_{r_A}(a)\subseteq A$ و $N_{r_B}(a)\subseteq B$. اکنون اگر قرار دهیم $r=\min\{r_A,r_B\}$، آنگاه

$$N_r(a)\subseteq N_{r_A}(a)\cap N_{r_B}(a)\subseteq A\cap B$$

لذا $A\cap B$ یک مجموعه $\star$-باز است.

اگر به ازای خانواده $\{G_i\}_{i\in I}$ از مجموعه‌های $\star$-باز داشته باشیم $G=\cup_{i\in I}G_i$، چنان‌چه G تهی باشد که چیزی برای اثبات نداریم و چنان‌چه G ناتهی باشد و $a\in G$، آنگاه چنان‌چه به ازای $i\in I$ داشته باشیم $a\in G_i$، چون G_i یک مجموعه $\star$-باز است لذا $r>۰$ وجود دارد که $N_r(a)\subseteq G_i\subseteq G$ که نشان می‌دهد G نیز $\star$-باز است.

بنابراین $T_\star$ یک توپولوژی روی $[۰,۱]$ تشکیل می‌دهد. اثبات مشابهی نشان می‌دهد که $T_\bigstar$ نیز یک توپولوژی روی $[۰,۱]^۲$ می‌سازد. □

توجه دارید که وقتی $\star$ ضعیف‌تر از S_L باشد، آنگاه $T_\star$ و $T_\bigstar$ به ترتیب دقیقاً همان توپولوژی‌های القایی توسط متریک d و $\mathbf{d}$ می‌باشند.

قضیه ۳.۴. با نمادهای معرفی شده در تعریف ۱.۴ و قضیه ۲.۴، صرف نظر از این‌که s-نرم پیوسته $\star$ ضعیف‌تر از S_L باشد یا نباشد، هر دو تابع $\star:([۰,۱]^۲,T_\bigstar)\to([۰,۱],T_\star)$ و $\to:([۰,۱]^۲,T_\bigstar)\to([۰,۱],T_\star)$ پیوسته هستند.

اثبات. برای پیوستگی $\star$، با در نظر گرفتن زیرمجموعه $\star$-باز دلخواه $A\in T_\star$، باید نشان دهیم تصویر معکوس آن تحت $\star$، یعنی $\star^{-۱}(A)$، یک زیرمجموعه $\star$-باز از $[۰,۱]^۲$ است. برای این منظور فرض کنید $\mathbf{a}\in\star^{-۱}(A)$. بنابراین $\star(\mathbf{a})\in A$ و لذا $a_۱\star a_۲\in A$. اما چون A یک مجموعه $\star$-باز فرض شده، پس $r>۰$ موجود است که $N_r(a_۱\star a_۲)\subseteq A$. ادعا می‌کنیم $\mathbf{N}_r(\mathbf{a})\subseteq\star^{-۱}(A)$. برای اثبات ادعا عنصر $\mathbf{b}\in\mathbf{N}_r(\mathbf{a})$ را در نظر بگیرید. چون $\mathbf{d}_\star(\mathbf{a},\mathbf{b})<r$ لذا با توجه به خواص s-نرم که در [۷] آمده است داریم

$$d_\star(a_۱\star a_۲,b_۱\star b_۲)\le\mathbf{d}_\star(\mathbf{a},\mathbf{b})<r.$$

لذا $b_۱\star b_۲\in N_r(a_۱\star a_۲)\subseteq A$ که به این معنی است که $\star(\mathbf{b})\in A$ و لذا $\mathbf{b}\in\star^{-۱}(A)$. بنابراین $\mathbf{N}_r(\mathbf{a})\subseteq\star^{-۱}(A)$ که به معنی اثبات ادعایی است که در بالا داشتیم.

مشابهاً با توجه به خواص مانده یک s-نرم، اثبات مشابهی برای پیوستگی $\to$ می‌توان ارائه کرد. □

چون لزوماً s-نرم پیوسته $\star$ ضعیف‌تر از S_L نیست، لذا محمول تشابه دیگر ممکن است شبه متر نباشد. در واقع تعبیر محمول تشابه در خواص زیر صدق می‌کند:

- $\rho^{\mathcal{M}}(a,a)=۰$.
- $\rho^{\mathcal{M}}(a,b)=\rho^{\mathcal{M}}(b,a)$.
- $\rho^{\mathcal{M}}(a,b)\le\rho^{\mathcal{M}}(a,c)\star\rho^{\mathcal{M}}(c,b)$.

که در واقع نامساوی مثلث به شکل کلی‌تری بیان شده است که آن‌را نامساوی $\star$-مثلث می‌نامیم. این موضوع در مورد تعبیر

$$\rho_n(\bar{x},\bar{y})=\rho(x_۱,y_۱)\&\rho(x_۲,y_۲)\&\ldots\&\rho(x_n,y_n),$$

نیز به شکل مشابه است. یعنی تعبیر ρ_n یک شبه متر روی M^n و البته با خاصیت $\star$-مثلث می‌باشد. به‌علاوه با روندی مثل اثبات قضیه ۲.۴ می‌توان نشان داد که اگر $\mathcal{M}$ یک ساختار با عالم سخن M در معنی‌شناسی متریک با s-نرم پیوسته دلخواه s باشد، آنگاه خانواده

$$\left\{N^{\rho}_{r>۰}(a)=\{b:\rho^{\mathcal{M}}(a,b)<r\}\right\}_{۰<r\le۱,a\in M}.$$

یک پایه برای یک توپولوژی مثل T_ρ روی M تشکیل می‌دهند. به‌طور مشابه

$$\{\mathbf{N}^\rho_{r>\circ}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{b} : \rho^{\mathcal{M}}_n(\mathbf{a},\mathbf{b}) < r\}\}_{\circ<r\leq 1,\mathbf{a}\in M^n}.$$

یک پایه برای یک توپولوژی روی M^n تشکیل می‌دهند که آن‌را با T_{ρ_n} نمایش می‌دهیم.

به‌وضوح اگر در معنی‌شناسی متریک با هر s-نرم پیوسته دلخواه، اگر ساختار $\mathcal{M}$ در اصول تشابه صدق کند، آن‌گاه چنان‌چه نماد محمولی P در اصل $E1$ صادق باشد خواهیم داشت

$$\sup_{\bar{a},\bar{b}\in M^n}\left[\rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}) \dot{\to} \left(P^{\mathcal{M}}(\bar{a}) \leftrightarrow P^{\mathcal{M}}(\bar{b})\right)^{\mathcal{M}}\right] = \circ.$$

و بنابراین برای هر $\bar{a},\bar{b}\in M^n$،

$$d\big(P^{\mathcal{M}}(\bar{a}), P^{\mathcal{M}}(\bar{b})\big) \leq \rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}). \qquad (1)$$

لذا با توجه به پایه توپولوژی‌های T_{ρ_n} و $T_\star$، تابع $P^{\mathcal{M}} : (M^n, T_{\rho_n}) \to ([\circ,1], T_\star)$ پیوسته است. ما از رابطه ۱ به پیوستگی ۱-لیپشیتس تعبیر محمول P نام می‌بریم.

به‌طور مشابه چنان‌چه نماد تابعی f در اصل $E2$ صادق باشد، آن‌گاه برای هر $\bar{a},\bar{b}\in M^n$،

$$\rho^{\mathcal{M}}\big(f^{\mathcal{M}}(\bar{a}), f^{\mathcal{M}}(\bar{b})\big) \leq \rho^{\mathcal{M}}_n(\bar{a},\bar{b}). \qquad (2)$$

که ایجاب می‌کند تابع $f^{\mathcal{M}} : (M^n, T_{\rho_n}) \to (M, T_\rho)$ نیز یک تابع پیوسته باشد که با توجه به رابطه ۲ این پیوستگی را نیز ۱-لیپشیتس می‌نامیم.

در معنی‌شناسی متریک با s-نرم پیوسته دلخواه $\star$، ساختار $\mathcal{M}$ را یک ساختار پیوسته می‌نامیم هرگاه در اصول تشابه صدق کند و به‌علاوه همه نمادهای زبان زمینه آن ساختار در اصول مصداقیت تشابه صادق باشند.

اکنون برای برای خانواده $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ از ساختارهای پیوسته و فیلتر $\mathfrak{F}$ روی I، می‌خواهیم $\mathfrak{F}$-ضرب آن‌ها را تعریف کنیم.

تعریف ۴.۴. اگر $M_I = \prod_{i\in I} M_i$ حاصل‌ضرب مستقیم جهان‌های خانواده $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ باشد و عناصر آن‌را به‌صورت $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}(i)\}_{i\in I}$ نمایش دهیم، آن‌گاه به‌راحتی می‌توان دید که رابطه زیر روی M_I یک رابطه هم‌ارزی است:

$$\mathbf{a} \sim_{\mathfrak{F}} \mathbf{b} \text{ اگر و فقط اگر } \left\{i\in I : \mathcal{M}_i \models \rho\big(\mathbf{a}(i),\mathbf{b}(i)\big)\right\} \in \mathfrak{F}.$$

مجموعه همه کلاس‌های هم‌ارزی رابطه $\sim_{\mathfrak{F}}$ را با $M_{I,\mathfrak{F}}$ نمایش می‌دهیم. $\mathfrak{F}$-ضرب خانواده $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ عبارت است از

$$\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}} = \left(M_{I,\mathfrak{F}}, P_j^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}, f_k^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}\right).$$

که به ازای هر نماد محمولی n متغییره P_j، تابع $P_j^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}$ از $M^n_{I,\mathfrak{F}}$ بتوی $[\circ,1]$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$P^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}\big([\mathbf{x}_1]_{\sim_{\mathfrak{F}}},....,[\mathbf{x}_n]_{\sim_{\mathfrak{F}}}\big) = \lim_{\mathfrak{F}} P^{\mathcal{M}_i}\big(\mathbf{x}_1(i),...,\mathbf{x}_n(i)\big),$$

و به ازای هر نماد تابعی n متغییره f، تابع $f^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}} : M^n_{I,\mathfrak{F}} \to M_{I,\mathfrak{F}}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}\big([\mathbf{x}_1]_{\sim_{\mathfrak{F}}},....,[\mathbf{x}_n]_{\sim_{\mathfrak{F}}}\big) = [\mathbf{f}_{\mathbf{x}}]_{\sim_{\mathfrak{F}}},$$

که در آن $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(i) = f^{\mathcal{M}_i}\big(\mathbf{x}_1(i),...,\mathbf{x}_n(i)\big)$.

لم ۵.۴. به ازای هر خانواده $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ از ساختارهای پیوسته و به ازای هر فیلتر $\mathfrak{F}$ روی مجموعه I، ساختار $\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}$ خوش‌تعریف است.

اثبات. برای سادگی فرض کنید P و f دو نماد محمولی و تابعی دو موضعی باشند. به‌علاوه برای عناصر $[\mathbf{a}_1]_{\mathfrak{F}}, [\mathbf{a}_2]_{\mathfrak{F}}, [\mathbf{b}_1]_{\mathfrak{F}}, [\mathbf{b}_2]_{\mathfrak{F}}$ از $M_{I,\mathfrak{F}}$ و به ازای $j = 1,2$ فرض کنید $[\mathbf{a}_j]_{\mathfrak{F}} = [\mathbf{b}_j]_{\mathfrak{F}}$. بنابراین برای $j = 1,2$،

$$A_j = \{i\in I : \mathcal{M}_i \models \rho\big(\mathbf{a}_j(i),\mathbf{b}_j(i)\big)\} \in \mathfrak{F}.$$

لذا برای هر $i \in A = A_1 \cap A_2$

$$\begin{aligned} d\Big(P^{\mathcal{M}_i}\big(\overline{\mathbf{a}(i)}\big), P^{\mathcal{M}_i}\big(\overline{\mathbf{b}(i)}\big)\Big) &\leq \rho_2^{\mathcal{M}_i}\Big(\overline{\mathbf{a}(i)}, \overline{\mathbf{b}(i)}\Big) \\ &= S\Big(\rho^{\mathcal{M}_1}\big(\mathbf{a}_1(i), \mathbf{b}_1(i)\big), \rho^{\mathcal{M}_2}\big(\mathbf{a}_n(i), \mathbf{b}_n(i)\big)\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

چون d یک متریک است، نتیجه می‌گیریم

$$\big\{i \in I : P^{\mathcal{M}_i}\big(\overline{\mathbf{a}(i)}\big) = P^{\mathcal{M}_i}\big(\overline{\mathbf{b}(i)}\big)\big\} \supseteq A \in \mathfrak{F}.$$

لذا $\lim_{\mathfrak{F}} P^{\mathcal{M}_i}\big(\overline{\mathbf{a}(i)}\big)$ موجود است اگر و فقط اگر $\lim_{\mathfrak{F}} P^{\mathcal{M}_i}\big(\overline{\mathbf{b}(i)}\big)$ موجود باشد و با توجه به هاسدورف بودن فضاهای متریک،

$$P^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}\big([\mathbf{a}_1]_{\sim_{\mathfrak{F}}}, ..., [\mathbf{a}_n]_{\sim_{\mathfrak{F}}}\big) = P^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}\big([\mathbf{b}_1]_{\sim_{\mathfrak{F}}}, ..., [\mathbf{b}_n]_{\sim_{\mathfrak{F}}}\big).$$

یعنی در همه جاهایی $P^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}$ تعریف شده است، خوش‌تعریف می‌باشد.
مشابهاً پیوستگی ۱-لیپشیتس برای تعبیر نمادهای تابعی در $\mathcal{M}_i$ ایجاب می‌کند که تعبیر آن‌ها در $\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}$ خوش‌تعریف باشد. □

قضیه زیر که در اثبات قضیه واش مورد استفاده قرار می‌گیرد، دلیل اصلی این امر است که هر $\mathfrak{F}$ -ضربی از ساختارها، درستی گزاره‌های مرتبه اول را حفظ نمی‌کند و به ازای فرافیلترهای $\mathfrak{F}$ درستی گزاره‌های مرتبه اول در $\mathfrak{F}$ -ضرب حفظ می‌شود. چنین $\mathfrak{F}$ -ضرب‌هایی را فراضرب می‌نامند.

قضیه ۶.۴. [۵] اگر $\{x_i\}_{i\in I}$ و $\{y_i\}_{i\in I}$ دو خانواده از عناصر فضای متریک $([0,1], d)$ باشند و $\mathfrak{F}$ یک ابرفیلتر روی I باشد، آن‌گاه

$$\lim_{\mathfrak{F}} x_i \leq \lim_{\mathfrak{F}} y_i \text{ اگر و فقط اگر } \{i : x_i \leq y_i\} \in \mathfrak{F}.$$

قضیه ۷.۴. (قضیه واش) فرض کنید $\{\mathcal{M}_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از ساختارهای پیوسته و $\mathfrak{F}$ یک فرافیلتر روی I باشد. به ازای هر فرمول $\varphi(\bar{x})$ و $\big\{[\mathbf{a}_i]_{\sim_{\mathfrak{F}}}\big\}_{i=1}^{n} \subseteq M_{I,\mathfrak{F}}$،

$$\varphi^{\mathcal{M}_{I,\mathfrak{F}}}\big([\mathbf{a}_1]_{\sim_{\mathfrak{F}}}, \ldots, [\mathbf{a}_n]_{\sim_{\mathfrak{F}}}\big) = \lim_{\mathfrak{F}} \varphi^{\mathcal{M}_i}\big(\mathbf{a}_1(i), \ldots, \mathbf{a}_n(i)\big).$$

اثبات. اثبات با استقرا روی پیچیدگی فرمول‌ها انجام می‌شود. در مورد فرمول‌های اتمی با توجه به تعریف $\mathfrak{F}$ -ضرب، موضوع درست است. در مورد فرمول‌هایی که با استفاده از روابط منطقی ساخته می‌شوند، پیوستگی روابط منطقی موضوع را نتیجه می‌دهد. در مورد فرمول‌هایی که با کمک سورها ساخته می‌شوند با کمک قضیه ۶.۴ موضوع نتیجه می‌شود. □

سخن پایانی

ما با تعمیم معنی‌شناسی متریک که در [۱] معرفی شده است، توانستیم، ابرضرب ساختارهای پیوسته را در منطق پایه معرفی کنیم. با استفاده از تکنیک ابرضرب می‌توان قضیه فشردگی را برای منطق پایه در حالت کلی اثبات کرد. نویسنده این کار را قبلاً برای منطق گودل انجام داده است [۶] و برای منطق پایه مبتنی بر معنی‌شناسی با s-نرم‌های ضعیف‌تر از s-نرم لوکاسیویچ نیز موضوع انجام شده و در حال داوری است [۵]. علاوه بر این با استفاده از این دیدگاه شاید بتوان مفهوم تایپ‌ها و قضیه حذف تایپ را نیز در حالت کلی برای منطق پایه ثابت کرد. قضیه فشردگی و قضیه حذف تایپ می‌تواند گسترش نظریه مدل منطق پایه را تسهیل کند.

مراجع

۱. س. م. ا. خاتمی و م. پورمهدیان، منطق پیوسته، منطق پژوهی، ۱۹، (۱۳۹۸)، ۱۲۰-۸۹.

2. I. Ben Yaacov and A. Berenstein and C. Henson and A. Usvyatsov, *Model theory for metric structures*, In Z. Chatzidakis, D. Macpherson, A. Pillay and A.Wilkie, eds., Model Theory with Applications to Algebra and Analysis, Vol. II, volume 350 of Lecture Notes of the London Mathematical Society, pp. 315–427. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
3. P. Hájek, *Metamathematics of Fuzzy Logic*, Springer, Dordrecht, 1998.
4. C. Henson and J. Iovino, *Ultraproducts in Analysis*, Em Logic and Analysis, pp. 1–113, In C. Ward Henson, J. Iovino A. Kechris, E. Odell, eds., London Mathematical Society Lecture Note Series: 262, Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 2002.
5. S. M. A. Khatami, *Compactness of first order fuzzy logics*, under review.
6. S. M. A. Khatami, M. Pourmahdian, *On the compactness property of extensions of first-order Godel logic*, Iranian J. Fuzzy Syst. **12** (2015) 101–121
7. S. M. A. Khatami, *A metric on* $[0,1]$ *which makes it a topological SL-algebra*, In Proc. 6th Iranian Joint Cong. Fuzzy Intell. Syst. (CFIS) (2018) pp. 111–113.
8. S. M. A. Khatami, *Compactness property of predicate fuzzy logics*, In Proc. 48th Ann. Iranian Math. Conf. Bu-Ali Sina Univ., Hamedan, Iran, (2017) pp. 1849–1853.

پست الکترونیکی: khatami@birjandut.ac.ir

ارائه پوستری

هندسه و توپولوژی

منیفلدهای پاراسایای آماری با التصاق نامتقارن متریک

فاطمه راعی
دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران
و محمدباقر کاظمی*
دانشگاه زنجان، زنجان، ایران

چکیده. در این مقاله به مطالعه‌ی دسته‌ای از منیفلدهای شبه ریمانی آماری، موسوم به منیفلدهای LP ساساکی آماری می‌پردازیم. بر روی این منیفلدها التصاق نیم-متقارنی را بر حسب التصاق آماری تعریف کرده و نشان می‌دهیم که این التصاق متریک است. تانسور انحنای وابسته به التصاق جدید را بر حسب تانسورهای التصاق آماری محاسبه کرده و آن‌ها را در جهت میدان برداری ساختاری به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: منیفلد آماری، ساختار تقریبا پاراسایا، التصاق متریک.
طبقه‌بندی موضوعی [۲۰۱۰]: 60D05, 50C15.

۱. پیش‌گفتار

منیفلدهای آماری در سال‌های اخیر کاربردهای فراوانی در آمار، هندسه دیفرانسیل، فیزیک آماری، نظریه ریسمان و پردازش تصویر پیدا کرده‌اند و بنابراین علاقمندان زیادی نیز به مطالعه و بررسی این دسته از منیفلدها پرداخته‌اند [۳].

منیفلد آماری، فضایی است که مجموعه نقاط آن را تابع چگالی پارامتریک $p(x,\zeta)$ تشکیل می‌دهند. اگر در این توزیع‌ها $\zeta = [\zeta^1, \ldots, \zeta^n] \in \mathbb{R}^n$، در این‌صورت منیفلد آماری n بعدی است. حال X را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. برای X مجموعه توانی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{P}(X) = \{p(x) : X \to \mathbb{R} | x \in X, p(x) \geq 0, \int p(x)dx = 1\}.$$

به ازای مجموعه‌ی باز $O \subset \mathbb{R}^n$ و تابع چگالی p، یک مدل یا منیفلد آماری به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۲]

$$M := \{p(x;\zeta) \in \mathcal{P}(X) | \zeta = [\zeta^1, \ldots, \zeta^n] \in O\}.$$

ماتریس g را با درایه‌های زیر در نظر بگیرید

$$g_{ij} = \int_X (\frac{\partial}{\partial \zeta^i} logp(x;\zeta))(\frac{\partial}{\partial \zeta^j} logp(x;\zeta))p(x;\zeta)dx,$$

که یک ماتریس مثبت معین است. با توجه به تعریف ملاحظه می‌شود که این ماتریس متقارن نیز می‌باشد بنابراین می‌تواند تشکیل یک متر برای مدل آماری فوق بدهد که به این متر، متر فیشر گفته می‌شود و در نتیجه (M, g) یک منیفلد ریمانی است. بنابراین ضرایب کریستوفل برای این متر به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}),$$

به کمک این ضرایب α-التصاق‌ها نیز بر روی این منیفلدها تعریف می‌شوند:

$$g(\nabla^\alpha_{\partial_i} \partial_j, \partial_k) = \Gamma_{ij,k}.$$

در حالتی‌که آلفا برابر با صفر باشد همان التصاق لویچویتا مورد نظر است.
مثال زیر را برای درک بهتر این منیفلدها در این‌جا ارائه می‌نماییم.

* ارائه‌دهنده

مثال ۱.۱. تابع چگالی توزیع نرمال زیر را در نظر بگیرید

$$p(x,\xi)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in\Gamma=\mathbb{R},$$

در این‌جا پارامترهای این توزیع عبارتند از $\xi=(\xi^1,\xi^2)=(\mu,\sigma)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$.
متر فیشر این منیفلد دو بعدی آماری نیز به‌شکل زیر به‌دست می‌آید

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma^2} & 0\\ 0 & \frac{2}{\sigma^2}\end{pmatrix}.$$

در ادامه تعریف منیفلد آماری را از دیدگاه هندسه دیفرانسیل و با کمک التصاق‌ها بیان می‌کنیم.

منیفلد ریمانی (M,g) را منیفلد آماری می‌گوییم هرگاه یک التصاق آفین و متقارن ∇ روی این منیفلد موجود باشد که به ازای هر $U,V,W\in\chi(TM)$

$$(\nabla_U g)(V,W)=(\nabla_V g)(U,W).$$

بر روی منیفلد آماری (M,g,∇)، التصاق آفین و متقارن ∇^* وجود دارد که

$$Ug(V,W)=g(\nabla_U V,W)+g(V,\nabla^*_U W), \qquad (1)$$

التصاق ∇^*، دوگان التصاق ∇ نامیده می‌شود. به‌راحتی می‌توان دید که $(\nabla^*)^*=\nabla$. اگر فرض کنیم $\hat{\nabla}$ التصاق لویچویتای منیفلد است، میدان تانسوری K به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$K_XY=\nabla_XY-\hat{\nabla}_XY,$$

که تانسوری متقارن است و داریم

$$K_XY=K_YX,\qquad g(K_XY,Z)=g(Y,K_XZ),\qquad \forall X,Y,Z\in\chi(TM).$$

۲. منیفلد پاراسایای آماری

فرض کنید (M,g) منیفلد لورنتزی n بعدی است. (M,ξ,η,ϕ,g) را منیفلد پاراسایا می‌نامیم هرگاه $(1,1)$ میدان تانسوری ϕ، میدان برداری ξ، -1 فرمی η و متر لورنتزی g بر روی این منیفلد وجود داشته باشند به‌طوری که [۵]:

$$\eta(\xi)=-1\ ,\ \phi^2(X)=X+\eta(X)\xi,$$
$$g(\phi X,\phi Y)=g(X,Y)+\eta(X)\eta(Y).$$

این ساختار اگر به ازای التصاق لوی-چویتای $\hat{\nabla}$ وابسته به متر g در شرط زیر صدق کند منیفلد LP ساساکی نامیده می‌شود:

$$(\hat{\nabla}_X\phi)(Y)=g(X,Y)\xi+\eta(Y)X+2\eta(X)\eta(Y)\xi.$$

در این‌صورت می‌توان نشان داد که بر روی این دسته از منیفلدها تساوی های زیر برقرار هستند:

$$\phi\xi=0\ ,\ \eta(\phi X)=0\ ,\ rank\phi=n-1.$$

اگر برای هر میدان برداری X و Y دو فرمی زیر را تعریف نماییم

$$\Phi(X,Y)=g(\phi X,Y),$$

آنگاه $\Phi(X,Y)$ یک میدان تانسوری متقارن $(0,2)$ است.

تعریف ۱.۲. فرض کنید (M,g,∇) منیفلد آماری لورنتزی n بعدی است که دارای ساختار پاراسای (ξ,η,ϕ,g) است. $(M,\xi,\eta,\phi,g,\nabla)$ را منیفلد LP ساساکی آماری می‌نامیم هرگاه

$$K_X\phi Y+\phi K_X Y=0,\ (\nabla_X\phi)(Y)=g(X,Y)\xi+\eta(Y)X+2\eta(X)\eta(Y)\xi.$$

بر روی منیفلدهای پاراسایا به ازای میدان‌های برداری مماس X، Y و Z برای تانسور انحنا R و تانسور ریچی Ric وابسته به التصاق لوی-چویتا، تساوی‌های زیر را داریم [۶]:

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi&=\eta(Y)X-\eta(X)Y,\\ Ric(X,\xi)&=(n-1)\eta(X),\\ Ric(\phi X,\phi Y)&=Ric(X,Y)+(n-1)\eta(X)\eta(Y). \end{aligned} \tag{۲}$$

فرض کنید M' یک زیرمنیفلد، منیفلد LP ساساکی آماری باشد. فرمول متناظر گوس و ونگارتن در حالت آماری به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \nabla_X Y&=\nabla'_X Y+h(X,Y),\ \forall X,Y\in\chi(TM'),\\ \nabla_X N&=-A_N X+\nabla^{\perp}_X N,\ \forall N\in\chi(T^{\perp}M'), \end{aligned}$$

که h فرم بنیادی نوع دوم و A عملگر شکلی وابسته به آن است به‌طوری که $\{\nabla^Y_X,A_NX\}\in\chi(TM')$ و $\{h(X,Y),\nabla^{\perp}_X{}^N\}\in\chi(T^{\perp}M)$ است.

۳. التصاق‌های نیم-متقارن متریک آماری

می‌دانیم التصاق لوی-چویتا دارای تانسور تاب متقارن است یعنی

$$\hat{T}(X,Y)=\hat{\nabla}^Y_X-\hat{\nabla}^X_Y-[X,Y]=0,$$

و نیز التصاقی متریک می‌باشد یعنی سازگار با متر وابسته است $\hat{\nabla}g=0$.

تعریف ۱.۳. [۱] التصاق خطی $\bar{\nabla}$ را نیم-متقارن می‌گوییم هر گاه به ازای ۱-فرمی η، تانسور تاب وابسته به این التصاق به‌صورت زیر باشد:

$$\bar{T}(X,Y)=\eta(Y)X-\eta(X)Y.$$

بر روی منیفلد LP ساساکی آماری $(M,\xi,\eta,\phi,g,\nabla)$ التصاق‌های زیر را تعریف می‌نماییم:

$$\bar{\nabla}_X Y:=\nabla_X Y+\eta(Y)X-g(X,Y)\xi+K_X Y, \tag{۳}$$

$$\bar{\nabla}^*_X Y:=\nabla^*_X Y+\eta(Y)X-g(X,Y)\xi+K_X Y. \tag{۴}$$

واضح است که $\bar{\nabla}$ و $\bar{\nabla}^*$ التصاق‌هایی خطی روی M هستند. با توجه به متقارن بودن منیفلدهای آماری، با محاسبه مستقیم تاب وابسته به این التصاق جدید، ملاحظه می‌شود که تاب متناظر نیم-متقارن بوده و به‌شکل زیر به‌دست می‌آید

$$\bar{T}(X,Y)=\eta(Y)X-\eta(X)Y.$$

قضیه ۲.۳. التصاق نیم-متقارن $\bar{\nabla}$ که در بالا تعریف شده است، التصاقی متریک است.

اثبات. با توجه به تساوی‌های (۱) و (۳)، به ازای میدان‌های برداری مماس X، Y و Z داریم

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\bar{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \bar{\nabla}_X Z)\\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y + \eta(Y)X - g(X,Y)U - K_X Y, Z)\\ &\quad - g(\nabla_X Z + \eta(Z)X - g(X,Z)U - K_X Z, Y)\\ &= g(Y, \nabla^*_X Z) - g(Y, \nabla_X Z) + ۲g(K_X Z, Y)\\ &= -۲g(K_X Z, Y) + ۲g(K_X Z, Y) = ۰.\end{aligned}$$

□

تانسور انحنای $\bar{R}^*$ وابسته به التصاق نیم-متقارن $\bar{\nabla}^*$ را روی M به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\bar{R}^*(X,Y)Z = \bar{\nabla}^*_X \bar{\nabla}^*_Y Z - \bar{\nabla}^*_Y \bar{\nabla}^*_X Z - \bar{\nabla}^*_{[X,Y]} Z. \tag{۵}$$

اگر R^* تانسور انحنای متناظر با التصاق آماری ∇^* باشد، گزاره‌های زیر برقرار هستند.

قضیه ۳.۳. بر روی منیفلد LP ساساکی آماری $(M, \xi, \eta, \phi, g, \nabla)$ با التصاق نیم-متقارن $\bar{\nabla}^*$، تانسور انحنای $\bar{R}^*$ و R^* به‌صورت زیر مرتبط هستند:

$$\begin{aligned}\bar{R}^*(X,Y)Z &= R^*(X,Y)Z + \{\eta(X)\xi - X - \nabla^*_X \xi - K_X \xi\} g(Y,Z)\\ &\quad - \{\eta(Y)\xi - Y - \nabla^*_Y \xi - K_Y \xi\} g(X,Z)\\ &\quad + (\nabla^*_X K)(Y,Z) - (\nabla^*_Y K)(X,Z) + K_X K(Y,Z) - K_Y K(X,Z)\\ &\quad - g(\eta(X)\xi - \nabla^*_X \xi - K_X \xi, Z)Y + g(\eta(Y)\xi - \nabla^*_Y \xi - K_Y \xi, Z)X.\end{aligned} \tag{۶}$$

اثبات. از آن‌جایی که $K_X Y = K(X,Y) = \nabla_X Y - \hat{\nabla}_X Y$، با توجه به تعریف التصاق نیم-متقارن $\bar{\nabla}^*$ در معادله (۴) و تانسور انحنای $\bar{R}^*$ در رابطه (۵)، نتیجه با محاسبه مستقیم حاصل می‌شود. □

می‌دانیم بر روی منیفلدهای آماری التصاق لوی-چویتا و التصاق‌های آماری در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\nabla + \nabla^* = ۲\hat{\nabla},$$

در نتیجه، برای تانسور انحناهای R، R^* و $\tilde{R}$ وابسته به $\hat{\nabla}$، ∇^* و ∇ داریم $\tilde{R} + R^* = ۲R$. بنابراین به کمک تساوی های (۲) و (۶) قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۴.۳. بر روی منیفلد LP ساساکی آماری $(M, \xi, \eta, \phi, g, \nabla)$ با التصاق نیم-متقارن $\bar{\nabla}^*$ رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}\bar{R}^*(X,Y)\xi &= -\tilde{R}(X,Y)\xi + ۲(\eta(Y)X - \eta(X)Y) - \eta(Y)\{\nabla^*_X \xi - K_X \xi\}\\ &\quad - \eta(X)\{-\nabla^*_Y \xi - K_Y \xi\}\\ &\quad + (\nabla^*_X K)(Y,\xi) - (\nabla^*_Y K)(X,\xi) + K_X K(Y,\xi) - K_Y K(X,\xi)\\ &\quad + \eta(\nabla^*_X \xi)Y + \eta(K_X \xi)Y - \eta(\nabla^*_Y \xi)X - \eta(K_Y \xi)X.\end{aligned}$$

به کمک قضایای فوق و با محاسبه اثر تانسورهای انحنا می‌توان ارتباط بین تانسورهای ریچی و اسکالر وابسته به التصاق‌های ذکر شده را نیز به‌دست آورد.

مراجع

1. N. S. Agashe and M. R. Chaffle, *A semi-symmetric non-metric connection of a Riemannian manifold*, Indian J. Pure Appl. Math. **23** (6) (1992) 399–409.
2. S. Amari, *Differential-geometrical Methods in Statistics*, Lecture Notes in Statistics, Vol. 28, Springer, Berlin, 1985.
3. K. Arwini and C. T. J. Dodson, *Information geometry: Near Randomness and Near Independence*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1953, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
4. A. Haseeb and R. Prasad, *Certain curvature conditions in Kenmotsu manifolds with Respect to the semi-symmetric metric connection*, Commun. Korean Math. Soc. **32** (2017) 1033–1045.
5. K. Matsumoto, *On Lorentzian Paracontact manifolds*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **12** (2) (1989) 151–156.
6. R. Rosca, *On Lorentzian P-Sasakian Manifolds*, Clssical Analysis, World Scientific Publi., Singapore, 1992.
7. K. Yano, *On semi-symmetric metric connections*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **15** (1970) 1579–1586.

پست الکترونیکی: f.raei@cfu.ac.ir
پست الکترونیکی: mbkazemi@znu.ac.ir

فهرست اسامی نویسندگان مقالات

ردیف	نام نویسندگان	شماره صفحه
۱	فرشته آراد، ایوب شیخی	۱۱
۲	سعید آسعیدی، علی محدث	۴۳۱
۳	مرتضی اسمعیلی، مهدی رستمی	۲۳
۴	زهره اکبری، مرضیه ایزدی، محمدعلی یعقوبی	۱۰۵
۵	مرضیه ایزدی، محمدعلی یعقوبی	۱۱۱
۶	فائزه بهمنی، علی افتخاری	۳۵
۷	رضا بیرانوند، احداله فرضی صفرآبادی	۱۵۷
۸	مرضیه پوربابایی، عباس سعادتمندی	۴۰
۹	مرضیه پوربابایی، عباس سعادتمندی	۳۳۷
۱۰	حسین پوربشاش، محمود خاکسار عشاق	۴۵
۱۱	سمیه تاری	۲۶۷
۱۲	عبدالصالح توغدری، رسول روزگار	۲۲۹
۱۳	محمدرضا توکلی‌مقدم، زهرا گویا	۱۳۹
۱۴	فائزه تیبا	۳۶۵
۱۵	سعید جوهری	۱۸۵
۱۶	الهام حاجی‌رضائی، مجتبی بهرامیان	۴۱۳
۱۷	اشرف حاجیلو، فاطمه ذبیحی	۳۴۲
۱۸	اعظم حجازی نوقابی، علیرضا سهیلی	۵۱
۱۹	مرجان حکیمی‌نژاد، محتبی قربانی	۲۲۹
۲۰	رسول حیدری دستجردی	۲۱۹
۲۱	سید محمدامین خاتمی	۳۲۱
۲۲	سید محمدامین خاتمی	۴۳۸
۲۳	امیر خمسه، مهیار قاصدیان	۲۳۳
۲۴	محمد احسان دادکانی، مریم علیپور، سمانه صردی زید	۵۶
۲۵	زهرا داوری شلمزاری، محمدحسین اکرمی ابرقویی	۴۲۵
۲۶	علی رجایی، عباس معارف‌پرور	۲۷۳
۲۷	مهدی رستمی، مرتضی اسمعیلی	۲۷
۲۸	صفورا رضایی آدریانی، زهرا عیدی‌نژاد، رضا سعادتی	۲۰۳
۲۹	مریم رضایی کاشی، مجتبی بهرامیان	۱۹۱
۳۰	علی‌اصغر رضائی، مریم فتوحی راغب	۳۷۱
۳۱	پردیس رمضانی، معصومه بی‌باک	۳۸۹
۳۲	آرتا روحی، فاطمه جهادی، مهدی روزبه، سعید زالزاده	۳۰۳
۳۳	ابراهیم ریحانی	۳
۳۴	ماجد رئیسی، مریم عرب عامری	۳۴۷
۳۵	مهدی سبزواری، معصومه مهموم سالکویه	۳۵۲
۳۶	مریم سقالرزاده، امیر عصاری	۳۹۳
۳۷	محمدعلی سلحشور	۱۶۲
۳۸	غلامرضا سلطانی ابری	۲۷۸

ردیف	نام نویسندگان	شماره صفحه
۳۹	مهدی سلمان‌پور	۲۹۳
۴۰	یامین سیاری، احمد محمدحسنی	۳۹۷
۴۱	زهرا سیدی لاهرودی، مجید جعفری خالدی	۱۶
۴۲	امین شاه‌کرمی، بهمن غضنفری	۶۱
۴۳	جواد شرفی، حسن دقیق	۱۹۶
۴۴	سعید شعبانیان	۲۴۵
۴۵	مهدی شمس	۳۰۸
۴۶	مهدی شمس	۳۱۳
۴۷	فرخ شیرژیان، علی ایرانمنش	۱۶۷
۴۸	پریسا شیری یایشهری، مجتبی حاجی‌پور	۶۷
۴۹	سمانه صابرعلی	۲۸۲
۵۰	محمد صامت، فرشته فروزش	۱۶۹
۵۱	سید محمود ضابط زاده	۷۲
۵۲	جواد عبادپور گلنبر، فرزاد فرزانفر	۲۵۰
۵۳	عاطفه عبداله ابیانه، محمدعلی رعایت پناه	۱۱۶
۵۴	جلال عسکری، محمد خلیلی	۱۲۱
۵۵	محمدجواد فاضلی، مهدی پناهی	۷۸
۵۶	فرح‌ناز فخرالدین آرانی، بهناز ساویزی	۱۴۳
۵۷	رضا فیاضی، هادی وکیلی، اصغر فیاضی	۳۷۵
۵۸	فریبا فیاضی، علی‌رضا اشرفی	۱۷۴
۵۹	محمدحسام قاسمی، زهرا گویا	۱۴۸
۶۰	منصور قدیری، فاطمه دهقانی	۴۰۱
۶۱	علی قلاوند	۲۳۸
۶۲	علی قلاوند، علی‌رضا اشرفی	۴۱۹
۶۳	فاطمه قندی، مصطفی داوطلب علیائی	۱۲۶
۶۴	محمدباقر کاظمی، فاطمه راعی	۴۴۹
۶۵	رقیه کتانی	۸۲
۶۶	محمدرضا کریم‌زاده، بیاض دارابی	۲۲۴
۶۷	محمدرضا کریم‌زاده، بیاض دارابی	۳۲۶
۶۸	زهرا محتشم، زهرا گویا	۱۵۲
۶۹	زهرا محمدزاده، اسد عازمی	۲۵۴
۷۰	زهرا محمودی	۸۷
۷۱	زهرا محمودی	۳۵۷
۷۲	مرضیه مطهری، محمدرضا اصلاحچی	۲۰۸
۷۳	عباس معارف‌پرور، جواد شرفی	۲۸۷
۷۴	نسرین ملک محمدی	۱۷۸
۷۵	سهیلا مهدوی زفرقندی	۴۰۶
۷۶	علی مهدی‌پور، علی افتخاری	۹۲
۷۷	سید سیف‌اله موسی‌زاده	۲۵۹
۷۸	آذر میرزایی، مینو کامرانی	۹۷
۷۹	مریم نجفوند دریکوندی، مصطفی داوطلب علیائی	۱۳۱
۸۰	علی‌محمد نظری، پریسا امیری‌فرد	۳۸۰
۸۱	محمدرضا یاسمیان، ندا اخلاقی	۳۳۰
۸۲	محسن یوسف‌نژاد، سید عباس محمدی	۲۱۴



www.aimc51.kashanu.ac.ir