مقدماتی از اعداد مختلط

می‌دانیم معادلاتی به فرم کلی $x^{۲}+a^{۲}=۰$ در مجموعه اعداد حقیقی فاقد جواب هستند، برای رفع این مشکل، با گسترش مجموعه اعداد حقیقی می‌توان به مجموعه جدیدی از اعداد رسید که این نوع معادلات در آن مجموعه دارای جواب هستند. این مجموعه را مجموعه اعداد مختلط می‌نامیم که در آن نماد i با خاصیت $i^{۲}=-۱$ در نظر گرفته می‌شود.
فرم کلی نمایش یک عدد مختلط بصورت $z=x+iy$ است که در آن x را قسمت حقیقی z و y را قسمت موهومی z می‌نامیم و به ترتیب با نماد $Re(z)$ و $Im(z)$ نشان می‌دهیم.
بنابراین مجموعه اعداد مختلط را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{C}=\{z=x+iy \mid \ x,y\in\mathbb{R}\ ,\ i^{۲}=-۱\}$$

مثال. قسمت موهومی و حقیقی عدد مختلط $z=۱-i$ را بیابید.
جواب.

$$Re(z)=۱\ \ ,\ \ Im(z)=-۱$$

نکته. از آن جا که هر عدد حقیقی را می‌توان به‌صورت یک عدد مختلط با قسمت موهومی صفر در نظر گرفت، می‌توان نتیجه گرفت $\mathbb{R}$ زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{C}$ است.
تعریف. دو عدد مختلط $z_{۱}=x_{۱}+iy_{۱}$ و $z_{۲}=x_{۲}+iy_{۲}$ را مساوی گوییم، هرگاه قسمت‌های حقیقی آن با هم و قسمت‌های موهومی آن نیز با هم برابر باشند. به بیان ریاضی داریم:

$$z_{۱}=z_{۲}\iff [Re(z_{۱})=Re(z_{۲})\ \ ,\ \ Im(z_{۱})=Im(z_{۲})]$$

اعمال جبری روی اعداد مختلط

برای دو عدد مختلط $z_{۱}=x_{۱}+iy_{۱}$ و $z_{۲}=x_{۲}+iy_{۲}$ اعمال جمع، تفاضل و ضرب به‌صورت زیر تعریف می‌شود:
الف) حاصل‌جمع دو عدد مختلط

$$z_{۱}+z_{۲}=(x_{۱}+x_{۲})+i(y_{۱}+y_{۲})$$

ب) حاصل‌ضرب دو عدد مختلط

$$z_{۱}.z_{۲}=(x_{۱}+iy_{۱})(x_{۲}+iy_{۲})=(x_{۱}x_{۲}-y_{۱}y_{۲})+i(x_{۱}y_{۲}+x_{۲}y_{۱})$$

بنابراین حاصل‌ضرب عدد مختلط $z_{۱}$ در عدد حقیقی a برابر است با

$$az_{۱}=ax_{۱}+iay_{۱}$$

خواص جبری اعمال فوق روی اعداد مختلط

الف) [خاصیت جابجایی] برای هر دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ داریم:
- خاصیت جابجایی جمع

$$z_۱ + z_۲ = z_۲ + z_۱$$

- خاصیت جابجایی ضرب

$$z_۱ . z_۲ = z_۲ . z_۱$$

ب) [خاصیت شرکت‌پذیری] برای هر سه عدد مختلط $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ داریم:
- خاصیت شرکت‌پذیری جمع

$$(z_۱ + z_۲) + z_۳ = z_۱ + (z_۲ + z_۳)$$

- خاصیت شرکت‌پذیری ضرب

$$(z_۱ . z_۲) . z_۳ = z_۱ . (z_۲ . z_۳)$$

ج) [خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت به جمع] برای هر سه عدد مختلط $z_۱$، $z_۲$ و $z_۳$ داریم:

$$z_۱ . (z_۲ + z_۳) = z_۱ . z_۲ + z_۱ . z_۳$$

د) [وجود عنصر خنثی] برای هر عدد مختلط z داریم:
- عدد مختلط ۰ عضو خنثی جمع است.

$$z + ۰ = ۰ + z = z$$

- عدد مختلط ۱ عضو خنثی ضرب است.

$$z . ۱ = ۱ . z = z$$

ه) [وجود عنصر وارون] برای هر عدد مختلط $z = x + iy$ داریم:

$$z + (-z) = ۰$$

عدد مختلط $-z = (-x) + i(-y) = -x - iy$ را قرینه (یا وارون جمعی) z می‌نامیم. بنابراین می‌توانیم تفاضل دو عدد مختلط را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$z_۱ - z_۲ = z_۱ + (-z_۲)$$

– همچنین به‌سادگی ثابت می‌شود که برای هر عدد مختلط ناصفر z عدد مختلط w وجود دارد به طوری که

$$z.w = ۱$$

عدد مختلط w را معکوس (یا وارون ضربی) z می‌نامیم. ثابت می‌شود که وارون ضربی هر عدد مختلط ناصفر z منحصر بفرد است ما آن را با نماد $z^{-۱}$ نشان می‌دهیم. با توجه به این می‌توان حاصل تقسیم بر یک عدد مختلط ناصفر را به صورت

$$\frac{z_۱}{z_۲} = z_۱.z_۲{}^{-۱}$$

تعریف کرد. با یک محاسبه بسیار ساده می‌توان نشان داد که اگر $z = x + iy \neq ۰$، آنگاه

$$z^{-۱} = \frac{x}{x^۲ + y^۲} - i\frac{y}{x^۲ + y^۲}$$

مثال. کسرهای مختلط زیر را ساده کنید.

۱. $z = \dfrac{۵ + ۴i}{۳ - i}$

۲. $w = \dfrac{i^{۸۰} - i + ۱}{i^۴ + i}$

جواب. ۱.

$$\begin{aligned} z &= \frac{۵ + ۴i}{۳ - i} \\ &= (۵ + ۴i)(۳ - i)^{-۱} \\ &= (۵ + ۴i)(\frac{۳}{۱۰} + \frac{i}{۱۰}) \\ &= \frac{۱}{۱۰}(۱۱ + ۱۷i) \end{aligned}$$

۲. چون $i^۲ = -۱$ پس $i^{۸۰} = (i^۲)^{۴۰} = ۱$ و $i^۴ = (i^۲)^۲ = ۱$. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} w = \frac{i^{۸۰} - i + ۱}{i^۴ + i} &= \frac{۱ - i + ۱}{۱ + i} \\ &= (۲ - i)(۱ + i)^{-۱} \\ &= (۲ - i)(\frac{۱}{۲} - \frac{i}{۲}) \\ &= \frac{۱}{۲}(۱ - ۳i) \end{aligned}$$

مزدوج یک عدد مختلط

تعریف. مزدوج عدد مختلط $z=x+iy$ را که با نماد $\bar{z}$ نشان می‌دهیم به‌صورت $\bar{z}=x-iy$ تعریف می‌کنیم. در واقع مزدوج z از قرینه کردن قسمت موهومی z به‌دست می‌آید.
نکته. با ضرب هر عدد مختلط در مزدوج آن، داریم:

$$z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^۲+y^۲$$

بنابراین، برای ساده‌سازی یک کسر مختلط می‌توان صورت و مخرج کسر را در مزدوج عبارت مخرج ضرب کنیم.
مثال. کسر مختلط زیر را ساده کرد.

$$z=\frac{۵+۴i}{۳-i}$$

جواب.

$$\begin{aligned} z &= \frac{۵+۴i}{۳-i}\times\frac{۳+i}{۳+i} \\ &= \frac{۱}{۱۰}(۱۱+۱۷i) \end{aligned}$$

ویژگی‌های مزدوج اعداد مختلط

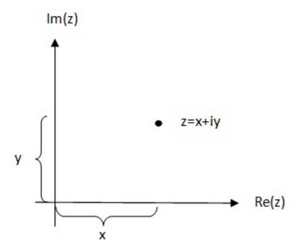
برای هر عدد مختلط z، $z_۱$ و $z_۲$ و هر عدد حقیقی a درستی روابط زیر به‌سادگی قابل اثبات است:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{z}} &= z \\ \overline{(z_۱+z_۲)} &= \bar{z_۱}+\bar{z_۲} \\ \overline{z_۱.z_۲} &= \bar{z_۱}\bar{z_۲} \\ \overline{z_۱^n} &= \bar{z_۱}^n \\ \overline{az_۱} &= a\bar{z_۱} \end{aligned}$$

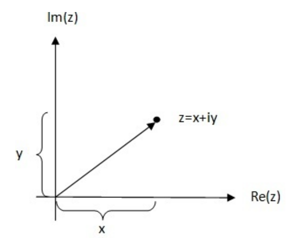
به‌علاوه، اگر $z_۲\neq ۰$ آنگاه $\overline{(\frac{z_۱}{z_۲})}=\frac{\bar{z_۱}}{\bar{z_۲}}$.
نکته. از روابط فوق و با استقراء روی n می‌توان ثابت کرد که مزدوج مجموع n عدد مختلط برابر با مجموع مزدوج آنهاست. همین‌طور ثابت می‌شود که مزدوج حاصل‌ضرب n عدد مختلط نیز برابر با حاصل‌ضرب مزدوج آنهاست.

نمایش هندسی و برداری اعداد مختلط

دو محور عمود بر هم در یک صفحه، مانند نمودار زیر، را در نظر بگیرید که محل تقاطع دو محور را مبدأ مختصات، محور افقی را محورحقیقی و محور عمودی را محور موهومی و صفحه را صفحه اعداد مختلط می‌نامیم. برای نمایش هندسی عدد مختلط $z = x + iy$، قسمت حقیقی آن یعنی x را روی محور افقی و قسمت موهومی یعنی y را روی محور عمودی مشخص می‌کنیم سپس نقطه‌ای در صفحه که مختصات دکارتی آن (x, y) است را به‌عنوان نمایش هندسی عدد مختلط z در نظر می‌گیریم.



برعکس، هر نقطه در صفحه با مختصات دکارتی (a, b) را می‌توانیم نمایش هندسی عدد مختلط $z = a + ib$ بنامیم. بنابراین یک تناظر یک به یک بین مجموعه اعداد مختلط و مجموعه نقاط روی صفحه مختصات وجود دارد. با توجه به اینکه هر نقطه (a, b) از صفحه دکارتی را می‌توان به‌عنوان برداری که ابتدای آن مبدأ و انتهای آن نقطه (a, b) است، در نظر گرفت لذا هر عدد مختلط $z = x + iy$ برداری است که ابتدای آن مبدأ، یعنی نقطه $(۰, ۰)$ و انتهای آن (x, y) است.



در این نمایش اعداد مختلط، به هر عدد مختلط یک بردار نسبت می‌دهیم که آن را نمایش برداری می‌نامیم. با استفاده از نمایش برداری اعداد مختلط، می‌توان مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت دو عدد مختلط، همین‌طور قرینه و مزدوج یک عدد مختلط را نمایش داد.

اندازه یک عدد مختلط

تعریف. برای هر عدد مختلط $z = x + iy$، اندازه یا قدر مطلق z را که با نماد $|z|$ نشان می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|z| = \sqrt{(Re(z))^۲ + (Im(z))^۲} = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

به‌وضوح $|z| = ۰$ اگر و تنها اگر $z = ۰$.
مثال. اندازه اعداد مختلط $z_۱ = i$ و $z_۲ = ۱ - i$ را محاسبه کنید.
جواب.

$$\begin{aligned} |z_۱| &= \sqrt{۰^۲ + ۱^۲} = ۱ \\ |z_۲| &= \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲} = \sqrt{۲} \end{aligned}$$

تعریف. فاصله دو عدد مختلط $z_۱ = x_۱ + iy_۱$ و $z_۲ = x_۲ + iy_۲$ را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

$$|z_۱ - z_۲| = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲}$$

ویژگی‌های قدر مطلق اعداد مختلط

برای هر عدد مختلط z، $z_۱$ و $z_۲$ و هر عدد حقیقی a درستی روابط زیر به‌سادگی قابل اثبات است:

$$
\begin{aligned}
|\frac{z_1}{z_2}| &= \frac{|z_1|}{|z_2|} \\
|z_1 z_2| &= |z_1||z_2| \\
|z| &= |\bar{z}| \\
|z|^2 &= z\bar{z} \\
|z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2| \\
||z_1| - |z_2|| &\leq |z_1 - z_2| \\
|Re(z)| &\leq |z| \\
|Im(z)| &\leq |z| \\
Re(z) &= \frac{z + \bar{z}}{2} \\
Im(z) &= \frac{z - \bar{z}}{2i}
\end{aligned}
$$

مثال. مکان هندسی مجموعه زیر را در صفحه اعداد مختلط مشخص کنید.

$$A = \{z \in \mathbb{C} \ | \ |\frac{z-i}{z+i}| \leq 2, z = x + iy\}$$

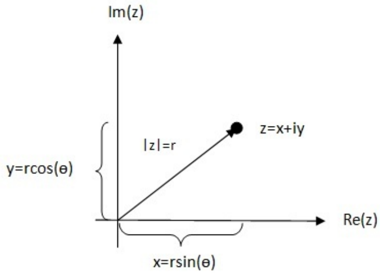
جواب.

$$
\begin{aligned}
|\frac{z-i}{z+i}| \leq 2 \ &\longrightarrow \ \frac{|z-i|}{|z+i|} \leq 2 \\
&\longrightarrow \ |z-i| \leq 2|z+i| \\
&\longrightarrow \ |x + i(y-1)| \leq 2|x + i(y+1)| \\
&\longrightarrow \ \sqrt{x^2 + (y-1)^2} \leq 2\sqrt{x^2 + (y+1)^2} \\
&\longrightarrow \ x^2 + y^2 + \frac{10}{3}y + 1 \geq 0 \\
&\longrightarrow \ x^2 + (y + \frac{5}{3})^2 \geq \frac{16}{9}
\end{aligned}
$$

این مجموعه نقاط، شامل نقاط روی مرز و خارج دایره‌ای به مرکز $(0, -\frac{5}{3})$ و شعاع $\frac{4}{3}$ است.

نمایش قطبی اعداد مختلط

دیدیم که در دستگاه مختصات دکارتی، هر عدد مختلط با یک زوج مرتب نشان داده می‌شود. عدد مختلط ناصفر $z = x + iy$ را در نظر می‌گیریم. اگر زاویه نمایش برداری z با جهت مثبت محور x را θ بنامیم و $|z|$ را با r نشان دهیم آنگاه $\sin\theta = \frac{x}{r}$ و $\cos\theta = \frac{y}{r}$.



از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. بنابراین

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

بدین ترتیب نمایش دیگری از عدد مختلط z به‌صورت زوج مرتب (r, θ) به‌دست می‌آید که در آن r اندازه z و θ زاویه‌ای است که نمایش برداری z با جهت مثبت محور x می‌سازد. این نمایش عدد z را نمایش مثلثاتی و یا قطبی آن می‌نامیم. دستگاه مختصات قطبی شامل یک محور تحت عنوان محور قطبی است که روی آن مبدأ را با $O = (0, 0)$ نشان می‌دهیم. توجه کنید زاویه‌ای که بردار نمایش z با جهت مثبت محور قطبی می‌سازد منحصر بفرد نیست. در واقع برای هر عدد صحیح k زاویه $2k\pi + \theta$ نیز زاویه بردار نمایش z با جهت مثبت محور قطبی است.

تعریف. برای هر عدد مختلط ناصفر z، اگر θ یکی از زوایایی باشد که بردار نمایش z با جهت مثبت محور قطبی می‌سازد هر یک از زوایای $2k\pi + \theta$، $(k \in \mathbb{Z})$، را یک آرگومان یا شناسه z می‌نامیم و آن را با نماد $arg z$ نشان می‌دهیم. دقیقاً یکی از آرگومان‌های z عددی بین صفر و 2π است آن را آرگومان اصلی z می‌نامیم و با نماد $Arg z$ نشان می‌دهیم. بنابراین $0 \leq Arg z < 2\pi$.

قرارداد. عدد مختلط $\cos\theta + i\sin\theta$ را با نماد $e^{i\theta}$ نمایش خواهیم داد.

با توجه به قرارداد فوق، صورت قطبی عدد مختلط $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ را به‌صورت $re^{i\theta}$ نیز نمایش می‌دهیم. چون توابع مثلثاتی توابع متناوب هستند به سادگی ثابت می‌شود که

$$e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2} \quad \text{اگر و تنها اگر برای یک عدد صحیح } k, \quad \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$$

مثال. فرم قطبی اعداد مختلط $z_۱ = ۱ + i$ و $z_۲ = -i$ را بنویسید.
جواب.

$$z_۱ = \sqrt{۲}(\cos(\frac{\pi}{۴}) + i\sin(\frac{\pi}{۴})) = \sqrt{۲}\ e^{\frac{\pi i}{۴}}$$

$$z_۲ = \cos(\frac{۳\pi}{۲}) + i\sin(\frac{۳\pi}{۲}) = e^{\frac{۳\pi i}{۲}}$$

حاصل‌ضرب اعداد مختلط با نمایش قطبی

یکی از مزایای استفاده از صورت قطبی اعداد مختلط محاسبه ساده‌تر حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت اعداد است. همچنین به توان رساندن یک عدد مختلط با این روش بسیار ساده است. در واقع با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

و

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta$$

می‌توانیم قضیه زیر را به سادگی ثابت کنیم:

قضیه ۱. فرض کنید $z_۱ = r_۱(\cos\theta_۱ + i\sin\theta_۱)$ و $z_۲ = r_۲(\cos\theta_۲ + i\sin\theta_۲)$. در این صورت

$$z_۱z_۲ = r_۱r_۲(\cos(\theta_۱ + \theta_۲) + i\sin(\theta_۱ + \theta_۲))$$

بنابراین حاصل‌ضرب دو عدد مختلط عددی است که قدر مطلق آن برابر با حاصل‌ضرب قدر مطلق‌ها و آرگومان آن مجموع آرگومان‌ها است. هم‌چنین با توجه به اینکه

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

و

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

برای هر عدد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، داریم:

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = re^{-i\theta}$$

بنابراین با استفاده از اتحاد مثلثاتی $\cos^۲\alpha + \sin^۲\alpha = ۱$ می‌توانیم قضیه زیر در مورد خارج‌قسمت دو عدد مختلط را ثابت کنیم:

قضیه ۲. فرض کنید $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \neq 0$.
در این صورت

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

بنابراین برای هر عدد مختلط ناصفر $z = re^{i\theta}$، $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$

توان یک عدد مختلط

عدد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را در نظر بگیرید. بنابر قضیه ۱،

$$z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

و با به کاربردن استقراء ثابت می‌شود برای هر عدد طبیعی n،

$$z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

در واقع برای هر عدد طبیعی n رابطه زیر که به دستور دمو آور معروف است، برقرار می‌باشد.

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

نکته. رابطه دموآور برای اعداد صحیح منفی نیز برقرار است. در حقیقت اگر $z = re^{i\theta}$ و n یک عدد طبیعی باشد آنگاه

$$z^{-n} = (\frac{1}{z})^n = (\frac{1}{r})^n e^{-in\theta}$$

مثال. حاصل عبارت $(1 + i\sqrt{3})^{-10}$ را محاسبه کنید.
جواب. نخست صورت قطبی عدد مختلط را یافته و سپس با استفاده از رابطه دموآور

حاصل را به‌دست می‌آوریم. چون $1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$ پس

$$\begin{aligned}(1+i\sqrt{3})^{-10} &= 2^{-10}(\cos\frac{-10\pi}{3}+i\sin\frac{-10\pi}{3})\\ &= \frac{1}{1024}(\cos(-4\pi+\frac{2\pi}{3})+i\sin(-4\pi+\frac{2\pi}{3}))\\ &= \frac{1}{1024}(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})\\ &= \frac{1}{1024}(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})\\ &= \frac{-1}{2048}+\frac{i\sqrt{3}}{2048}\end{aligned}$$

نکته. یکی از روش های ساده کردن کسرهای مختلط، استفاده از صورت قطبی اعداد در صورت و مخرج کسر و سپس ساده سازی عبارت حاصل است.

مثال. کسر $\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ را ساده کنید.

جواب.

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} &= \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}}{2e^{\frac{-\pi i}{6}}}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})i}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi i}{12}}\end{aligned}$$

ریشه‌های اعداد مختلط

در این بخش می‌خواهیم ریشه‌های n–ام عدد مختلط z را به‌دست آوریم. ابتدا تعریف ریشه n–ام را بیان می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید z_0 یک عدد مختلط و n یک عدد طبیعی باشد. عدد مختلط w را یک ریشه n–ام z_0 می‌نامیم اگر $w^n=z_0$. در واقع به هر جواب از معادله $z^n=z_0$ یک ریشه n–ام z_0 گفته می‌شود.

برخلاف مجموعه اعداد حقیقی که در آن، همه اعداد دارای ریشه n-ام نیستند، در مجموعه اعداد مختلط، همه اعداد دارای دقیقاً n ریشه n-ام متمایز می‌باشند. عمل یافتن ریشه اعداد با استفاده از نمایش قطبی اعداد انجام می‌شود. برای این منظور فرض می‌کنیم $z_\circ = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$ و $w = \rho(\cos\phi + i\sin\phi) = \rho e^{i\phi}$ یک ریشه n-ام $z_\circ$ باشد، در این صورت از معادله $w^n = z_\circ$ نتیجه می‌شود که

$$\rho^n e^{in\phi} = w^n = z_\circ = re^{i\theta}$$

از تساوی اخیر معادلات $\rho^n = r$ و $n\phi = ۲k\pi + \theta$ حاصل می‌شود. از این دو معادله مقادیر ρ و ϕ به ترتیب برحسب r و θ به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[n]{r} \\ \phi &= \frac{۲k\pi + \theta}{n}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

بنابراین، ریشه‌های n-ام عدد مختلط $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$w_k = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{۲k\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{۲k\pi + \theta}{n}).$$

به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $z_\circ \neq \circ$ آنگاه به ازای مقادیر مختلف k فقط و فقط n عدد مختلط متمایز به‌دست می‌آید، به عبارت دقیقتر به ازای مقادیر $k = \circ, ۱, ۲, \cdots, n - ۱$ همه ریشه‌های n-ام $z_\circ$ به‌دست می‌آید. این ریشه‌ها عبارتند از

$$\begin{aligned} w_\circ &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}) \\ w_۱ &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{۲\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{۲\pi + \theta}{n}) \\ &. \\ &. \\ &. \\ w_{n-۱} &= \sqrt[n]{r}(\cos\frac{۲(n-۱)\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{۲(n-۱)\pi + \theta}{n}) \end{aligned}$$

نکاتی در مورد ریشه های n ام یک عدد مختلط

- اندازه تمام ریشه‌های n-ام عدد مختلط z با هم مساوی و برابر با $\sqrt[n]{r}$ است که $r = |z|$.

- اختلاف بین آرگومان‌های اصلی دو ریشه متوالی w_j و w_{j+1} برابر با $\frac{2\pi}{n}$ است.

مثال. ریشه های چهارم عدد i را بیابید.

جواب. با توجه به اینکه $|i| = 1$ و $Argi = \frac{\pi}{2}$ لذا ریشه‌های چهارم عدد i از رابطه زیر قابل محاسبه است:

$$w_k = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4} + i\sin\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4}), k = 0, 1, 2, 3.$$

با جایگذاری مقدار k ریشه‌ها به دست می‌آیند که عبارتند از

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\\
w_1 &= \cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}\\
w_2 &= \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\\
w_3 &= \cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}
\end{aligned}$$

معادله خط در صفحه مختلط

می‌دانیم معادله هرخط مستقیم در صفحه xoy به‌صورت $ax + by + c = 0$ است که در آن ضرایب a، b و c اعدادی حقیقی‌اند و حداقل یکی از اعداد a یا b مخالف صفر است. حال اگر فرض کنیم $z = x + iy$، برای تبدیل معادله خط در صفحه اعداد مختلط با استفاده از روابط $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$ و $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ و قرار دادن آن در معادله خط داریم:

$$\begin{aligned}
a(\frac{z + \bar{z}}{2}) + b(\frac{z - \bar{z}}{2i}) + c &= 0\\
ia(z + \bar{z}) + b(z - \bar{z}) + 2ic &= 0\\
(b + ia)z - (b - ia)\bar{z} + 2ic &= 0.
\end{aligned}$$

بنابراین با فرض $A = b + ia$ و $B = 2ic$، معادله یک خط در صفحه مختلط به‌صورت

$$Az - \bar{A}\bar{z} + B = 0$$

است که در آن A یک عدد مختلط ناصفر و B یک عدد موهومی محض است.

مثال. معادله خط $2x - y + 1 = 0$ را در صفحه اعداد مختلط بازنویسی کنید.

جواب.

$$\begin{aligned} ۳(\frac{z+\bar{z}}{۲}) - ۱(\frac{z-\bar{z}}{۲i}) + ۱ &= ۰ \\ ۳i(z+\bar{z}) - ۱(z-\bar{z}) + ۲i &= ۰ \\ z(-۱+i) - \bar{z}(-۱-i) + ۲i &= ۰. \end{aligned}$$

معادله دایره در صفحه مختلط

نقطه دلخواه $z = x+iy$ را روی دایره‌ای به مرکز $z_۰ = x_۰ + iy_۰$ و شعاع r در نظر بگیرید. می‌دانیم فاصله بین این دو نقطه z و $z_۰$ از رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\sqrt{(x-x_۰)^۲ + (y-y_۰)^۲}$$

که این فاصله بیانگر شعاع دایره است، بنابراین $r = \sqrt{(x-x_۰)^۲ + (y-y_۰)^۲}$. از طرفی

$$\begin{aligned} |z-z_۰|^۲ &= (z-z_۰)\overline{(z-z_۰)} \\ &= ((x-x_۰)+i(y-y_۰))((x-x_۰)-i(y-y_۰)) \\ &= (x-x_۰)^۲ + (y-y_۰)^۲. \end{aligned}$$

از مقایسه روابط اخیر معادله دایره‌ای به مرکز $z_۰$ و شعاع r در صفحه مختلط به‌صورت $|z-z_۰| = r$ است.

مثال. معادله دایره ای به مرکز $z_۰ = i$ و شعاع $r = ۳$ برابر $|z-i| = ۳$ است.

نکته. از نظر هندسی، همه ریشه‌های n-ام عدد مختلط z روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع $\sqrt[n]{r}$ و با فاصله $\frac{۲\pi}{n}$ از یکدیگر قرار دارند.

تمرین

۱.عبارات زیر را ساده کنید.

$$\frac{۳i^{۳۰} - i^{۱۹}}{۲i-۱}$$

$$\frac{(۱-i)^{۸۱}}{(۱+i)^{۵۳}}$$

$$(\frac{۱+\sqrt{۳}i}{۱-\sqrt{۳}i})^{۱۰}$$

۲. مکان هندسی مجموعه نقاط زیر را بیابید.

$$|z-۱+i|\geq ۱, |z+i|=|z-۱|, |z-۲i|\leq ۳, |z-۳+۴i|\leq ۵$$

۳. معادلات زیر را حل کنید.

$$z^{۲}+(۲i-۳)z+(۵-i)=۰, ۱+z^{۲}+z^{۴}+z^{۶}=۰, z^{۶}+۳z^{۳}+۱=۰, z^{۵}-i-۱=۰$$

$$z^{۴}=(\frac{۱-i\sqrt{۳}}{۱+i\sqrt{۳}})^{۳}, z^{۸}=\sqrt{\frac{۱-i}{۱+i\sqrt{۳}}}, \sqrt[۶]{\frac{۱+i}{۱-i\sqrt{۳}}}$$