بسمه تعالی

حد و پیوستگی

فرض کنید تابع $f(x)$ روی بازه بازی شامل c، بجز احتمالا خود c، تعریف شده باشد. می‌گوییم حد $f(x)$ وقتی x به c میل می‌کند برابر L است هرگاه با نزدیک شدن x به c، مقدار $f(x)$ به L نزدیک شود. در این حالت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$.

مثال ۱. الف) اگر f تابع همانی باشد، یعنی $f(x) = x$ برای هر x، آنگاه برای هر عدد حقیقی c داریم $\lim\limits_{x\to c} f(x) = c$.

ب) اگر f تابع ثابت باشد، یعنی عدد k وجود داشته باشد که $f(x) = k$ برای هر x، آنگاه برای هر عدد حقیقی c داریم $\lim\limits_{x\to c} f(x) = k$.

قضیه ۲. **(قوانین حد)** فرض کنید L، M، c و k اعدادی حقیقی باشند. فرض کنید توابع f و g روی بازه بازی شامل c، بجز احتمالا خود c، تعریف شده باشند. اگر $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ و $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ آنگاه

(۱) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \pm g(x)) = L \pm M.$

(۲) $\lim\limits_{x\to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot L.$

(۳) $\lim\limits_{x\to c}(f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M.$

(۴) $\lim\limits_{x\to c}(\dfrac{f(x)}{g(x)}) = \dfrac{L}{M},\ (M \neq ۰).$

(۵) $\lim\limits_{x\to c}(f(x))^n = L^n,\ (n \in \mathbb{N}).$

(۶) $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, (n \in \mathbb{N}).$ (اگر n زوج باشد آنگاه L باید نامنفی باشد)

قضیه ۳. الف) اگر $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_۱ x + a_۰$ یک چندجمله‌ای باشد آنگاه برای هر c داریم $\lim\limits_{x\to c} P(x) = a_n c^n + \cdots + a_۱ c + a_۰ = P(c)$.

ب) اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چند جمله‌ای باشند و $Q(c) \neq ۰$ آنگاه $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(c)}{Q(c)}$.

مثال ۴. حدود زیر را محاسبه کنید:

الف) $\lim\limits_{x\to ۱} \dfrac{x^۲ + x - ۲}{x^۲ - x}$.

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}$.

حل. الف)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=3.$$

ب) توجه کنید که

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}&=\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+100}+10}{\sqrt{x^2+100}+10}\\&=\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+100}+10\right)}=\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{20}.$$

قضیه ۵. **(فشردگی)**.فرض کنید برای هر x در بازه بازی شامل c، بجز احتمالا خود c، $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$. اگر $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\lim\limits_{x\to c} h(x)=L$، آنگاه $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$.

قضیه ۶. فرض کنید f و g در نقطه c حد دارند. اگر به‌ازای هر x در بازه بازی شامل c، بجز احتمالا خود c، $f(x)\leqslant g(x)$ آنگاه $\lim\limits_{x\to c} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

فرض کنید $f(x)$ بر بازه‌ای چون (c,b) تعریف شده و وقتی x درون این بازه به c میل می‌کند مقدار $f(x)$ به عددی مثل L نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم f در c دارای حد راست L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=L$. به طور مشابه، فرض کنید $f(x)$ بر بازه‌ای چون (a,c) تعریف شده و وقتی x درون این بازه به c میل می‌کند مقدار $f(x)$ به عددی مثل M نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم f در c دارای حد چپ M است و می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=M$.

مثال ۷. فرض کنید k یک عدد طبیعی است. مطلوب است محاسبه $\lim\limits_{x\to 0^+} x\left(\left[\dfrac{1}{x}\right]+\left[\dfrac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\dfrac{k}{x}\right]\right)$.

حل. به ازای $i=1,\cdots,k$ داریم

$$\frac{i}{x}-1<\left[\frac{i}{x}\right]\leqslant\frac{i}{x}.$$

بنابراین

$$x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\cdots+\frac{k}{x}-k\right)<x\left(\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{x}\right]\right)\leqslant x\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\cdots+\frac{k}{x}\right).$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{k(k+1)}{2} - kx < x\left(\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{x}\right]\right) \leqslant \frac{k(k+1)}{2}.$$

پس با استفاده از قضیه فشردگی نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to 0^+} x\left(\left[\frac{1}{x}\right] + \left[\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[\frac{k}{x}\right]\right) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

قضیه ۸. فرض کنید fروی بازه بازی شامل c، بجز احتمالا خود c، تعریف شده است. در این صورت $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$.

قضیه ۹. اگر x بر حسب رادیان باشد آنگاه $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

مثال ۱۰. حدود زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x}$.

ب) $\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t}$.

حل. الف)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{5}\cdot \sin 2x}{\frac{2}{5}\cdot 5x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{5}.$$

ب)

$$\lim_{t\to 0} \frac{\tan t \sec 2t}{3t} = \frac{1}{3}\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\cos 2t} = \frac{1}{3}.$$

فرض کنید f روی بازه بازی شامل c تعریف شده باشد. می‌گوییم f در c پیوسته است هرگاه $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

قضیه ۱۱. فرض کنید توابع f و g روی بازه بازی شامل c تعریف شده باشند. اگر f و g در c پیوسته باشند آنگاه توابع زیر نیز در c پیوسته‌اند:

(۱) مجموع و تفاضل: $f+g$

(۲) مضرب ثابت: $k\cdot f$ به ازای هر عدد k.

(۳) حاصلضرب: $f\cdot g$

(۴) خارج قسمت: $\frac{f}{g}$ (به شرطی‌که $g(c) \neq 0$).

(۵) توان: f^n برای عدد طبیعی n.

(۶) ریشه: $\sqrt[n]{f}$ برای عدد طبیعی n. (اگر n زوج باشد باید $f(c)$ نامنفی باشد.)

قضیه ۱۲. (پیوستگی تابع مرکب). اگر تابع f در c و تابع g در $f(c)$ پیوسته باشد آنگاه تابع مرکب $g \circ f$ در c پیوسته است.

قضیه ۱۳. اگر تابع g در b پیوسته باشد و $\lim_{x\to c} f(x) = b$، آنگاه

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g(b) = g(\lim_{x\to c} f(x)).$$

قضیه ۱۴. (مقدار میانی). اگر f تابعی پیوسته روی بازه $[a, b]$ باشد و $y_۰$ مقدار دلخواهی بین $f(a)$ و $f(b)$، آنگاه عدد c در بازه $[a, b]$ وجود دارد به طوریکه $y_۰ = f(c)$.

مثال ۱۵. ثابت کنید معادله $\sqrt{۲x + ۵} + x^۲ = ۴$ جواب حقیقی دارد.

حل. قرار دهید $f(x) = \sqrt{۲x + ۵} + x^۲ - ۴$. در این صورت $f(۰) < ۰$ و $f(۲) > ۰$. با توجه به اینکه f روی بازه $[۰, ۲]$ پیوسته است، طبق قضیه مقدار میانی، f بر این بازه حداقل یک ریشه دارد.

مثال ۱۶. نشان دهید معادله $x^۲ \sec x = ۱$ حداقل دو ریشه دارد.

حل. معادله را به شکل $x^۲ = \cos x$ بازنویسی نموده و قرار می‌دهیم $f(x) = x^۲ - \cos x$. در این صورت f بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. همچنین $f(-\frac{\pi}{۲}) > ۰$، $f(۰) < ۰$ و $f(\frac{\pi}{۲}) > ۰$. بنابر قضیه مقدار میانی f بر هر یک از بازه‌های $(-\frac{\pi}{۲}, ۰)$ و $(۰, \frac{\pi}{۲})$ یک ریشه دارد. واضح است که اگر α ریشه f باشد آنگاه $\cos\alpha \neq ۰$، بنابراین $\sec\alpha$ تعریف شده است. پس هر ریشه f جوابی برای معادله $x^۲ \sec x = ۱$ است. بنابراین معادله $x^۲ \sec x = ۱$ حداقل دو جواب دارد.

گوییم تابع $f(x)$ وقتی x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند دارای حد L است و می‌نویسیم $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ هرگاه برای اعداد به اندازه کافی بزرگ x، مقدار $f(x)$ به اندازه دلخواه به L نزدیک شود. به طور مشابه $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ هرگاه برای اعداد به اندازه کافی کوچک x، مقدار $f(x)$ به اندازه دلخواه به L نزدیک شود.

قضیه ۱۷. اگر در قضیه ۲ به جای $\lim_{x\to c}$ قرار دهیم $\lim_{x\to\infty}$ یا $\lim_{x\to-\infty}$ باز هم همه قانون‌های حدی برقرارند.

مثال ۱۸. مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^۲ + ۱۶})$.

حل.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^۲ + ۱۶}) &= \lim_{x\to\infty} (x - \sqrt{x^۲ + ۱۶}) \cdot \frac{x + \sqrt{x^۲ + ۱۶}}{x + \sqrt{x^۲ + ۱۶}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^۲ - (x^۲ + ۱۶)}{x + \sqrt{x^۲ + ۱۶}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-۱۶}{x + \sqrt{x^۲ + ۱۶}} = ۰.\end{aligned}$$

فرض کنید f در یک همسایگی محذوف c تعریف شده باشد. می‌گوییم حد f وقتی x به سمت c میل می‌کند برابر بینهایت است و می‌نویسیم $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ هرگاه به‌ازای همه x های به اندازه کافی نزدیک c، $f(x)$ به اندازه دلخواه بزرگ شود. به طور مشابه $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ هرگاه به‌ازای همه x های به اندازه کافی نزدیک c، $f(x)$ به اندازه دلخواه کوچک شود.

مثال ۱۹. مطلوبست محاسبه $\lim_{x\to ۲} \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴}$.

حل. برای هر x که $\sqrt{۵} > x > ۲$ داریم $۵ > x^۲ > ۴$، بنابراین $[x^۲] = ۴$ که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴} = ۰.$$

از طرفی برای هر x که $۲ > x > \sqrt{۳}$ داریم $۴ > x^۲ > ۳$، بنابراین $[x^۲] = ۳$ که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{[x^۲]-۴}{x^۲-۴} = -\infty.$$

بنابراین حد مورد نظر وجود ندارد.

مرجع:

توماس، جرج بی؛ ویر، موریس دی؛ هاس، جوئل. حساب دیفرانسیل و انتگرال (قسمت اول، جلد ۱). ترجمه سیامک کاظمی، موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف و انتشارات فاطمی، ۱۳۹۲.