مروری بر مشتق

فرض کنید f یک تابع، و $x_\circ$ نقطه‌ای از دامنه‌ی f باشد. حد

$$\lim_{h\to\circ}\frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h}$$

را در صورتی که موجود و متناهی باشد، مشتق f در نقطه‌ی $x_\circ$ می‌نامیم و با نماد $f'(x_\circ)$ نمایش می‌دهیم. در این حالت می‌گوییم f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است. $f'(x_\circ)$ در واقع شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $(x_\circ, f(x_\circ))$ است. توجه کنید که با قرار دادن $h := x - x_\circ$ حد فوق را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}.$$

اگر تابع $y = f(x)$ در هر نقطه از بازه‌ای مانند (a, b) مشتق‌پذیر باشد، تابع جدید f' به‌وجود می‌آید که به هر $x\in(a,b)$ مقدار $f'(x)$ را نظیر می‌کند. f' را تابع مشتق f می‌نامیم و با نمادهای $\frac{df}{dx}$، $\frac{dy}{dx}$ و y' نیز نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱. اگر f در $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته است (عکس قضیه، لزوماً برقرار نیست).

با استفاده مستقیم از تعریف مشتق، می‌توان دید که اگر f یک تابع ثابت روی بازه‌ی (a, b) باشد، آنگاه مشتق f در هر نقطه از این بازه صفر است. با محاسباتی ساده می توان روابط زیر را نیز به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}
\frac{d(x^n)}{dx} &= nx^{n-۱}\\
\frac{d(\sqrt{x})}{dx} &= \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\\
\frac{d(\sqrt[n]{x^m})}{dx} &= \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}\\
\frac{d(\sin x)}{dx} &= \cos x\\
\frac{d(\cos x)}{dx} &= -\sin x
\end{aligned}$$

مشتق مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج قسمت توابع

قضیه ۲. اگر توابع f و g در نقطه‌ی $x_\circ$ مشتق‌پذیر باشند، آنگاه توابع $f+g$، $f-g$ و $f\times g$ نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیرند و داریم:

$$\begin{aligned}(f\pm g)'(x_\circ) &= f'(x_\circ)\pm g'(x_\circ),\\ (f\times g)'(x_\circ) &= f'(x_\circ)g(x_\circ)+g'(x_\circ)f(x_\circ).\end{aligned}$$

اگر علاوه بر این، شرط $g(x_\circ)\neq \circ$ نیز برقرار باشد، آنگاه تابع $\frac{f}{g}$ نیز در $x_\circ$ مشتق‌پذیر است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_\circ)=\frac{f'(x_\circ)g(x_\circ)-g'(x_\circ)f(x_\circ)}{(g(x_\circ))^{۲}}.$$

مثال ۳. با استفاده از مشتق توابع سینوس و کسینوس، می توان مشتق چهار تابع مثلثاتی دیگر یعنی تانژانت، کتانژانت، سکانت و کسکانت را محاسبه نمود. توجه کنید که

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x=\frac{۱}{\cos x},\quad \csc x=\frac{۱}{\sin x}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{d(\tan x)}{dx}&=۱+\tan^{۲}x=\sec^{۲}x\\ \frac{d(\cot x)}{dx}&=-(۱+\cot^{۲}x)=-\csc^{۲}x\\ \frac{d(\sec x)}{dx}&=\sec x\tan x\\ \frac{d(\csc x)}{dx}&=-\csc x\cot x.\end{aligned}$$

قضیه ۴. (قاعده‌ی زنجیری) فرض کنید تابع U در نقطه‌ی x و تابع f در نقطه‌ی $U(x)$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع ترکیبی $f\circ U$ در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f\circ U)'(x)=U'(x)f'\left(U(x)\right).$$

نتیجه ۵. فرض کنیم U تابعی مشتق‌پذیر از x باشد. با استفاده از قاعده‌ی زنجیری روابط زیر را داریم:

$$\frac{d(U^n)}{dx} = nU'U^{n-1}$$
$$\frac{d(\sqrt{U})}{dx} = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$
$$\frac{d(\sqrt[n]{U^m})}{dx} = \frac{mU'}{n\sqrt[n]{U^{n-m}}}$$
$$\frac{d(\sin U)}{dx} = U'\cos U$$
$$\frac{d(\cos U)}{dx} = -U'\sin U$$
$$\frac{d(\tan U)}{dx} = U'(1+\tan^2 U) = U'\sec^2 U$$
$$\frac{d(\cot U)}{dx} = -U'(1+\cot^2 U) = -U'\csc^2 U$$
$$\frac{d(\sec U)}{dx} = U'\sec U\tan U$$
$$\frac{d(\csc U)}{dx} = -U'\csc U\cot U.$$

مشتق‌گیری ضمنی

اگر y تابعی از x باشد اما به‌طور صریح بر حسب x بیان نشده باشد، برای به‌دست آوردن y'، از طرفین معادله‌ی ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم. برای مثال اگر معادله‌ی ضمنی به‌صورت $x^2 + y^3 = 5$ باشد، با مشتق‌گیری از طرفین نسبت به x داریم: $2x + 3y'y^2 = 0$. یعنی

$$y' = -\frac{2x}{3y^2}.$$

در حالت کلی اگر معادله‌ی ضمنی به‌صورت $F(x,y) = 0$ باشد، آنگاه

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}$$

که در آن صورت و مخرج کسر فوق به ترتیب مشتق F نسبت به x و y می باشند.

مشتق مراتب بالاتر

فرض کنید $y = f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر روی بازه‌ی (a,b) باشد. اگر f' نیز روی این بازه‌مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن را با یکی از نمادهای f''، y''، $\frac{d^2y}{dx^2}$ یا $\frac{d^2f}{dx^2}$ نمایش داده و مشتق مرتبه‌ی دوم f می‌نامیم. به‌طور مشابه

مشتق مرتبه‌های سوم، چهارم، ...، nام و ... تعریف می شوند. نمادهای متناظر بصورت f'''، $f^{(۴)}$، $f^{(۵)}$، ...، $f^{(n)}$ و ... می باشند.

برای مثال در مورد تابع $f(x) = \sin x$ داریم:

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(۴)}(x) = \sin x, \ldots$$

چند قضیه مهم در مورد مشتق

قضیه ۶. (قضیه تابع معکوس) فرض کنید f تابعی وارون پذیر باشد و $b = f(a)$. اگر $f'(a)$ موجود و مخالف صفر باشد، آنگاه تابع $f^{-۱}$ در نقطه‌ی b مشتق‌پذیر است و

$$\left(f^{-۱}\right)'(b) = \frac{۱}{f'(a)}.$$

قضیه‌ی تابع معکوس می‌گوید برای محاسبه مشتق $f^{-۱}$ در نقطه‌ی b لازم نیست ضابطه‌ی $f^{-۱}$ را بدانیم. کافی است مشتق f در a را بدست آوریم و معکوس نماییم.

مثال ۷. تابع $f(x) = \frac{۲x-۳}{x+۱}$ مفروض است. مشتق $f^{-۱}$ را در نقطه‌ی $b = ۱$ به‌دست آورید.

حل. ابتدا a را بدست می‌آوریم. برای این کار ضابطه‌ی f را مساوی ۱ قرار می دهیم.

$$\frac{۲x-۳}{x+۱} = ۱ \Rightarrow ۲x - ۳ = x + ۱ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow a = ۴.$$

حال $f'(۴)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{۲(x+۱) - (۲x-۳)}{(x+۱)^۲} = \frac{۵}{(x+۱)^۲} \Rightarrow f'(۴) = \frac{۱}{۵}.$$

بنابراین طبق قضیه‌ی تابع معکوس داریم:

$$\left(f^{-۱}\right)'(۱) = \frac{۱}{f'(۴)} = ۵.$$

قضیه ۸. (قضیه رول) فرض کنید f بر بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a, b) مشتق پذیر باشد و $f(a) = f(b) = ۰$. در این صورت دست‌کم یک c بین a و b وجود دارد که $f'(c) = ۰$.

قضیه‌ی رول می‌گوید بین هر دو ریشه از معادله‌ی $f = ۰$، حداقل یک ریشه از معادله‌ی $f' = ۰$ وجود دارد. قضیه ی رول در صورتی که $f(a)$ و $f(b)$ برابر و غیر صفر باشند نیز برقرار است.

مسأله ۹. نشان دهید معادله‌ی $x^۵ + x^۳ + x + ۱۷ = ۰$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی دارد.

حل. تابع $f(x) = x^{۵} + x^{۳} + x + ۱۷$ را در نظر بگیرید. چون این تابع یک چندجمله‌ای درجه‌ی فرد است، لذا به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ، مثبت و به ازای مقادیر به اندازه کافی کوچک، منفی است. برای مثال $f(۱۰)$ مثبت است و $f(-۱۰)$ منفی. از پیوستگی f و قضیه‌ی مقدار میانی نتیجه می شود که f حداقل در یک نقطه بین ۱۰ و ۱۰− صفر می شود. حال نشان می‌دهیم که f در نقطه‌ی دیگری صفر نمی‌شود. اگر f در دو نقطه صفر شود، طبق قضیه‌ی رول، f' باید حداقل در یک نقطه صفر شود. اما چنین چیزی رخ نمی‌دهد زیرا $f'(x) = ۵x^{۴} + ۳x^{۲} + ۱$ همواره مثبت است و هیچگاه صفر نمی‌شود.

قضیه ۱۰. (قضیه مقدار میانگین) فرض کنید f بر بازه‌ی $[a, b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a, b) مشتق پذیر باشد. در این صورت دست‌کم یک c بین a و b وجود دارد که

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

عبارت سمت راست تساوی فوق، شیب خطی است که از نقاط $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌گذرد. طبق قضیه‌ی مقدار میانگین حداقل یک نقطه از نمودار f بین a و b وجود دارد که خط مماس بر آن با خط مذکور موازی است. بنابراین، قضیه‌ی رول، حالت خاصی است از قضیه‌ی مقدار میانگین که خط مورد نظر افقی است.

قضیه‌ی مقدار میانگین یکی از پرکاربردترین قضایای حساب دیفرانسیل و انتگرال است. در قضیه‌ی زیر به برخی از نتایج این قضیه‌ی مهم اشاره می‌کنیم که در رسم نمودار توابع از آنها استفاده می‌شود.

قضیه ۱۱. با مفروضات قضیه‌ی مقدار میانگین:

الف) اگر f' روی بازه‌ی (a, b) مثبت باشد، f روی این بازه، اکیداً صعودی است.

ب) اگر f' روی بازه‌ی (a, b) منفی باشد، f روی این بازه، اکیداً نزولی است.

ج) اگر f' روی بازه‌ی (a, b) صفر باشد، f روی این بازه، ثابت است.

د) اگر f'' روی بازه‌ی (a, b) مثبت باشد، جهت تقعر f روی این بازه، رو به بالا است.

ه) اگر f'' روی بازه‌ی (a, b) منفی باشد، جهت تقعر f روی این بازه، رو به پایین است.

قضیه ۱۲. اگر f در نقطه‌ی c یک اکسترمم موضعی داشته باشد (یعنی c یک ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی برای f باشد) و بعلاوه $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = ۰$.

از این قضیه در نظریه‌ی ماکسیمم و مینیمم و بهینه‌یابی استفاده می‌شود. توجه کنید که عکس قضیه لزوماً برقرار نیست.

مسأله ۱۳. مجموع ارتفاع و قطر قاعده‌ی یک استوانه قائم ۳ است. ارتفاع استوانه چقدر باشد تا حجم آن بیشترین مقدار ممکن باشد؟

حل. ارتفاع و قطر قاعده را به ترتیب با h و r نمایش می‌دهیم. طبق فرض مساله رابطه‌ی $h + r = ۳$ بین آنها برقرار است. بنابر این می توان نوشت $r = ۳ - h$. چون به دنبال بیشترین حجم ممکن هستیم لذا فرمولی برای حجم می نویسیم و آن را به یک تابع تک متغیره از h تبدیل می‌کنیم. با توجه به اینکه حجم استوانه برابر با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارفاع است لذا

$$V = \pi r^۲ h = \pi(۳ - h)^۲ h.$$

با مشتق‌گیری از V نسبت به h داریم

$$\frac{dV}{dh} = \pi(۹ - ۱۲h + ۳h^۲) = ۳\pi(h - ۱)(h - ۳).$$

برای بدست آوردن بهترین h، مشتق را مساوی صفر قرار می‌دهیم که مقادیر $h = ۱$ و $h = ۳$ بدست می آیند. اما $h = ۳$ قابل قبول نیست زیرا حجم به ازای این مقدار صفر می شود در حالی که در مساله حجم ماکسیمم مورد نظر است. بنابراین $h = ۱$ جواب مساله است.